

ÜBUNGEN ZUR FUNKTIONENTHEORIE I

— BLATT 1 —

Helmut Hamm, Tilman Bauer

4. April 2006

Registrierung für Übungsgruppen. Bitte registrieren Sie sich bis Freitag, den 7. April, 11:00, online unter <http://wwwmath.uni-muenster.de/u/tbauer/FT-1.html> für eine Übungsgruppe.

Die Übungen dürfen und sollen in Gruppen von bis zu drei Studenten bearbeitet und abgegeben werden. Allerdings muss jeder, dessen Name auf der Abgabe steht, auch alle Aufgaben bearbeitet haben – bitte nicht disjunkt aufteilen.

Übung 1. Zeigen Sie: Sind $z, w \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$, so gilt

$$|z + w| = |z| + |w| \iff \exists t \in \mathbf{R}, t > 0: w = tz.$$

Tipp: Betrachten Sie zunächst den Fall $z = 1$.

Übung 2. (a) Seien $x, y \in \mathbf{R}$. Berechnen Sie $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ mit

$$(\alpha + i\beta)^2 = x + iy.$$

(b) Berechnen Sie die komplexen Nullstellen der quadratischen Gleichung

$$z^2 + 2iz + i = 0.$$

Übung 3. (a) Sei $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ definiert durch

$$f(x + iy) = x + y - 2ix.$$

Bestimmen Sie $c, d \in \mathbf{C}$, so dass $f(z) = cz + d\bar{z}$.

(b) Seien $a, b \in \mathbf{C}$ und $g: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ die \mathbf{R} -lineare Abbildung $z \mapsto az + b\bar{z}$. Zeigen Sie:

$$\det g > 0 \iff |a| > |b|.$$

Übung 4. Entscheiden Sie (mit ausführlicher Begründung), ob die folgenden Teilmengen von \mathbf{C} offen bzw. abgeschlossen sind:

(a) $\mathbf{C} - \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$;

(b) $\{z \in \mathbf{C} \mid (\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z) = 0\}$.

Abgabe bis Di, 11. April, 11:15 in den Briefkästen