Diplomandenseminar Wintersemester 2004/05: Elliptische Operatoren, Topologie und asymptotische Methoden
Analytische Eigenschaften von Dirac-Operatoren

Markus Förster

10. November 2004

John Roe: Elliptic operators, topology and asymptotic methods
Second Edition
Chapman & Hall: Research Notes in Mathematics Series

§5 Analytical properties of Dirac operators

Wiederholung

- *Zusammenhang* auf E[1] ist Abbildung

  $$\nabla : \Gamma^\infty(TM) \times \Gamma^\infty(E) \to \Gamma^\infty(E), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

  derart, dass für jede Funktion $f \in C^\infty(M)$ die Eigenschaften

  $$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y \qquad \text{und} \qquad \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (X.f)Y.^2$$

  erfüllt sind. Ein Zusammenhang lässt sich als Abbildung

  $$\nabla : \Gamma^\infty(E) \to \Omega^1(E) := \Gamma(T^*M \otimes E)$$

  in den Raum aller E-wertigen 1-Formen auffassen.[3]

- *Clifford-Algebra* auf V[4] ist Algebra $C\ell(V)$ mit 1 und (injektiver) Abbildung $\varphi : V \to C\ell(V)$ mit $\varphi(v)^2 = -(v, v)1$, hat universelle Eigenschaft[5], ist eindeutig bis auf Isomorphie.

- *Clifford-Bündel* S ist Bündel von Clifford-Modulen (d.h. Fasern sind Links-$C\ell(T_mM) \otimes \mathbb{C}$-Module [6]) mit hermitischer Metrik und *kompatiblen Zusammenhang*, d.h. es gilt

  1. $(v \cdot s_1, s_2) = -(s_1, v \cdot s_2)$ für alle $v \in T_mM$ und $s_1, s_2 \in \Gamma^\infty(S)$.
  2. $\nabla_X(Ys) = (\nabla_X Y)s + Y\nabla_X s$ für alle Vektorfelder $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ und $s \in \Gamma^\infty(S)$.

  Oft $\mathbb{Z}/2$-graduiert mit direkter Summenzerlegung $S = S_+ \oplus S_-$, in diesem Fall sollen Metrik und Zusammenhang die Zerlegung respektieren; Clifford-Operation ist *ungerade*[7]

[1] M glatte Mannigfaltigkeit, E ein Vektorbündel über M, $\Gamma(E) = \{\text{Glatte Schnitte } s : M \to E\}$.

[2] $X.f$ Lie-Ableitung von f entlang X

[3] Der Wert von $\nabla_X Y$ an der Stelle $p \in M$ hängt nur von dem Wert von X an der Stelle $p \in M$ ab.

[4] V Vektorraum mit innerem Produkt $(\cdot, \cdot)$

[5] Universelle Eigenschaft der Clifford-Algebra: Ist $\varphi' : V \to A'$ eine weitere solche Abbildung, so existiert ein eindeutiger Algebrenhomomorphismus $f : A \to A'$ mit $f \circ \varphi = \varphi'$.

[6] M riemannsche Mannigfaltigkeit, d.h. es gibt stetige Abbildung $TM \times TM \to \mathbb{R}$, welche fasernweise ein inneres Produkt ist. Faserweise Konstruktion der Clifford-Algebra $C\ell(T_mM)$ liefert das *Clifford-Algebren-Bündel* $C\ell(TM)$.

[7] Clifford-Operation mit Tangentialvektor v bildet S_+ und S_- und S_- auf S_+ ab.

- *(Klassischer) Dirac-Operator* D auf Clifford-Bündel S ist Differentialoperator erster Ordnung auf $\Gamma^\infty(S)$ ist Komposition

$$\Gamma^\infty(S) \xrightarrow{\nabla} \Gamma^\infty(T^*M \otimes S) \xrightarrow{TM \cong T^*M} \Gamma^\infty(TM \otimes S) \xrightarrow{C\ell} \Gamma^\infty(S)\,.$$

Beachte $D : \Gamma^\infty(S_+) \to \Gamma^\infty(S_-)$ und umgekehrt. Bilden $e_i \in \Gamma^\infty(TM)$ eine lokale orthonormale Basis, so gilt $Ds = \sum_i e_i \nabla_i s$.[8] Es gilt die *Weitzenbock-Formel* $D^2 = \nabla^*\nabla + \mathrm{K}$, wobei K die *Clifford-Kontraktion* (ein Krümmungsoperator) ist und $\nabla^* : \Gamma^\infty(T^*M \otimes S) \to \Gamma^\infty(S)$ der *adjungierte Operator* zum Levi-Civita-Zusammenhang , welcher als Differentialoperator $\nabla : \Gamma^\infty(S) \to \Gamma^\infty(T^*M \otimes S)$ aufgefasst werden kann.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Wir erinnern uns an die Weitzenbock-Formel $D^2 = \nabla^*\nabla + \mathrm{K}$ für den (klassischen) Dirac-Operator D. Im Folgenden werden *verallgemeinerte Dirac-Operatoren* betrachtet, welche der Gleichung

$$D^2 = \nabla^*\nabla + B$$

genügen, wobei B ein Operator erster Ordnung auf dem Clifford-Bündel S über der Mannigfaltigkeit M ist.[9] Wir wollen analytische Aussagen (z.B. Spektralsatz, Funktionalkalkül) für den Dirac-Operator herleiten. Die fundamentalen Objekte für uns sind (nicht notwendig glatte) Schnitte des Clifford-Bündels S, auf die wir den Dirac-Operator anwenden wollen. Dazu werden wir ein quantitatives Maß für die Differenzierbarkeit dieser Objekte bereitstellen, die sogenannten *Sobolev-Räume* W^k. Dies sind vollständige Vektorräume, die Ungleichung für ihre Normen $\|\cdot\|_k$ liefern Aussagen über die *schwache Lösbarkeit* von Differentialgleichungen des Dirac-Operators und letztendlich einen *Spektralsatz* und einen *Funktionalkalkül* für den Dirac-Operator.

[8] $\nabla_i = \nabla_{\partial_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \Gamma_i$ und $\Gamma_i \in \Gamma^\infty(\mathrm{End}(S))$.

[9] Der *Dolbeaut-Operator* auf einer nicht-Kähler-Mannigfaltigkeit $\sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)$ ist von dieser Form.

1 Sobolevräume

1.1 Sobolev-Räume auf dem Torus

Sei[10] $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-wertige (Lebesgue-)integrierbare Funktion. Die *Fourier-Reihe* von f ist die formale Reihe

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \underbrace{\left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(\xi) e^{-i\langle \nu, \xi \rangle} d\xi \right)}_{=:\hat{f}(\nu) = a_\nu} e^{i\langle \nu, x\rangle} \text{[11]}$$

Der Hilbert-Raum $L^2(\mathbb{T}^n)$[12] besitzt die Funktionen $e_\nu : x \mapsto e^{i\langle \nu, x\rangle}/(2\pi)^{\frac{n}{2}}$ als Orthonormalbasis. Wir zitieren einige Resultate aus der Funktionalanalysis:

Satz 1.1 (Gleichung von Parseval) *Sei $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{T}} |f|^2 = (2\pi)^n \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}(\nu)|^2$$

Satz 1.2 (Inversionstheoreme) *1. Für $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ konvergiert die Fourier-Reihe von f in der* Frêchet-Norm

$$\|f\|_F := \sup_{\mathbb{T}^n} \sum_{|\alpha| \le k} |D^\alpha f|^2$$

gegen f. Für die Fourier-Koeffizienten $\hat{f}(\nu)$ *gilt: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es eine Konstante C_k mit der Eigenschaft*

$$|\hat{f}(\nu)| \le C_k \cdot (1 + |\nu|)^{-k},$$

d.h. die Fourier-Koeffizienten sind rapide fallend.

2. Für $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ konvergiert die Fourier-Reihe von f in der L^2-Norm gegen f.

Definition 1.3 *Sei $k \in \mathbb{N}$. Durch*

$$\langle f, g \rangle_k := (2\pi)^n \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\nu) \overline{\hat{g}(\nu)} (1 + |\nu|^2)^k$$

ist ein inneres Produkt auf $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ definiert. Die induzierte Norm heißt k-te Sobolev-Norm. *Der k-te* Sobolev-Raum W^k *ist definiert als die Vervollständigung von $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ bezüglich dieser Norm.*

Diese Definition ist sinnvoll, da die Fourier-Koeffizienten rapide fallend sind. Insbesondere erkennt man mit Hilfe von Satz 1.1, dass W^0 und L^2 isometrisch isomorph sind.

Proposition 1.4 *Der Raum $C^k(\mathbb{T}^n)$ der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen ist ein Unterraum von $W^k(\mathbb{T}^n)$ und die Inklusion ist stetig.*

BEWEIS: Sei $f \in C^k(\mathbb{T}^n)$. Da die zugehörige Fourier-Reihe gegen f konvergiert, ergibt sich

$$f(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\nu) e^{i\langle \nu, x\rangle} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\nu) e^{i \sum_{j=1}^n \nu_j x_j}.$$

Nun liefert k-maliges Differenzieren nach x_j (wir dürfen Summation und Differentiation vertauschen)

$$\frac{\partial^k}{\partial x_j^k} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\nu) e^{i\langle \nu, x\rangle} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\nu) \frac{\partial^k}{\partial x_j^k} \left(e^{i \sum_{j=1}^n \nu_j x_j} \right) = (i\nu_j)^k \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\nu) e^{i\langle \nu, x\rangle} \right),$$

[10] $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$ ist *n-dimensionaler Torus*

[11] Ist $n = 1$ und f ein *trigonometrisches Polynom*, d.h.

$$f(x) = a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)),$$

so stimmt die Fourier-Reihen von f mit f selbst überein.

[12] Definiere $L^2(\mathbb{T}^n) := \left\{ f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} \text{ mit } := \int_{\mathbb{T}} |f|^2 < \infty \right\}$ mit innerem Produkt $\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \overline{g(x)} dx$.

d.h. mit $f_j(x) := \frac{\partial^k}{\partial x_j^k} f(x)$ folgt

$$\left(\frac{1}{i\nu_j}\right)^k \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \hat{f}_j(\nu) e^{i\langle \nu, x\rangle} = \left(\frac{1}{i\nu_j}\right)^k f_j(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\nu) e^{i\langle \nu, x\rangle} \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(\nu) = \left(\frac{1}{i\nu_j}\right)^k \hat{f}_j(\nu).$$

Alle Funktionen f_j sind stetig und daher quadratisch integrierbar, d.h. die Reihe $\sum_\nu |\hat{f}_j(\nu)|^2$ ist nach Satz 1.1 endlich. Daher ist auch die Reihe über die Folge

$$\nu \mapsto \left|\hat{f}(\nu)(1+|\nu|)^k\right|^2 = \left|\hat{f}_j(\nu)\left(\frac{1+|\nu|}{i\nu}\right)^k\right|^2$$

endlich. Wegen $1+|\nu|^2 \leq (1+|\nu|)^2$ folgt $f \in W^k$. Die Stetigkeit kann direkt überprüft werden. □

Proposition 1.5 *Die Sobolev-k-Norm und die* gleichmäßige C^k-Norm

$$\|f\|_{C^k} := \sum_{|\alpha|\leq k} \int_{\mathbb{T}^n} |D^\alpha f(\xi)|^2 d\xi$$

auf $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *sind äquivalent.*

Beweis: Wir haben im letzten Beweis $|\nu_j|^k|\hat{f}(\nu)| = |\hat{f}_j(\nu)|$ bewiesen, allgemeiner erhalten wir $|\nu|^\alpha|\hat{f}(\nu)| = |\widehat{D^\alpha f}(\nu)|$ in der entsprechenden Multiindexnotation. Mit Satz 1.1 ergibt sich weiter

$$\|f\|_{C^k} \overset{\text{Satz 1.1}}{=} \sum_{|\alpha|\leq k} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{D^\alpha f}(\nu)|^2 = \sum_{|\alpha|\leq k} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} |\nu|^{2\alpha} |\hat{f}(\nu)|^2.$$

Nun gibt es Konstanten c_1 und c_2 mit $c_1(1+|\nu|^2)^k \leq 1+|\nu|^2+\ldots+|\nu|^{2k} \leq c_2(1+|\nu|^2)^k$ (binomischer Lehrsatz), und folglich Konstanten C_1 und C_2 mit $C_1\|f\|_k \leq \|f\|_{C^k} \leq C_2\|f\|_k$, was die Behauptung impliziert. □

Satz 1.6 (Einbettungssatz von Sobolev) *Für jede natürliche Zahl* $p > \frac{n}{2}$ *gibt es eine stetige Inklusion von* $W^{k+p}(\mathbb{T}^n)$ *in* $C^k(\mathbb{T}^n)$*.*

Beweis: Sei $f \in W^{k+p}$, d.h.

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(\nu)|^2 (1+|\nu|^2)^{k+p} < \infty.$$

Nun ergibt sich mit $\hat{g}(\nu) := (1+|\nu|^2)^{-\frac{k}{2}-p}$, dass

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(\nu)|(1+|\nu|^2)^{\frac{k}{2}}\right)^2 &= \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(\nu)|\hat{g}(\nu)(1+|\nu|^2)^{k+p}\right)^2 \\
&= \left(\langle f, g\rangle_{k+p}\right)^2 \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|f\|_{k+p}^2 \cdot \|g\|_{j+p}^2 \\
&= \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}|^2(1+|\nu|^2)^{k+p}\right) \cdot \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \left((1+|\nu|^2)^{-\frac{k}{2}-p}\right)^2 (1+|\nu|^2)^{k+p}\right) \\
&= \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}|^2(1+|\nu|^2)^{k+p}\right) \cdot \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} (1+|\nu|^2)^{-p}\right)
\end{aligned}$$

Aber auch der zweite Faktor ist endlich wegen der Voraussetzung $p > \frac{n}{2}$, d.h. mit $|\nu|^k \leq (1+|\nu|^2)^{\frac{k}{2}}$ folgt

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} |\nu|^k |\hat{f}(\nu)| < \infty,$$

so dass die Fourier-Reihen der ersten k Ableitungen von f gleichmäßig absolut konvergieren, denn $|\widehat{D^k f}(\nu)| = |\nu|^k|\hat{f}(\nu)|$ (vgl. Beweis von Proposition 1.5). □

Satz 1.7 (Rellich) *Für $k_1 < k_2$ ist die Inklusion $W^{k_2} \hookrightarrow W^{k_1}$ ein kompakter linearer Operator.*

Beweis: Sei $k_1 < k_2$. Wegen $(1+|\nu|^2)^{k_1} \leq (1+|\nu|^2)^{k_2}$ folgt $\|f\|_{k_1} \leq \|f\|_{k_2}$, d.h. es gibt eine stetige Inklusion $W^{k_2}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow W^{k_1}(\mathbb{T}^n)$, d.h. inbesondere ist die Inklusion ein beschränkter Operator.
Es ist zu zeigen, dass diese Inklusion *kompakt* ist, d.h. der Abschluss $\overline{B}$ der Einheitskugel $B \subset W^{k_2}$ muss eine kompakte Teilmenge von W^{k_1} sein.

1. Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ glatt mit kompaktem Träger. Dann gilt $\widehat{f\varphi} = \hat{\varphi} * \hat{f}$ und $\widehat{\varphi * f} = \hat{\varphi}\hat{f}$ [13] für jede integrierbare Funktion f auf $\mathbb{R}^n$. Nehmen wir weiter an, dass $\operatorname{supp}(f) \subset B^n \subset \mathbb{R}^n$ und $\varphi|_{B^n} \equiv 1$. Dann gilt $f = \varphi f$ und daher $\hat{f} = \hat{\varphi} * \hat{f}$. Ableiten liefert
$$D^\alpha \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha \hat{\varphi})(\xi - \eta)\hat{f}(\eta)d\eta$$
und die Ungleichung von Cauchy-Schwarz impliziert
$$|D^\alpha \hat{f}(\xi)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\eta|^2)^{-k}|D^\alpha\hat{\varphi}|^2(\xi-\eta) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\eta|^2)^k |\hat{f}(\eta)|^2 d\eta. \leq K_\alpha(\xi)\|f\|_k^2,$$
wobei K_α die stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n$ ist, welche durch das erste Integral definiert wird.
2. Anwenden der letzten Ungleichung in 1) auf unsere Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ergibt, dass die Folge der $D^\alpha \hat{f}_j$ für jedes α gleichmäßig beschränkt ist auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Insbesondere ist die Folge der Funktionen $(\hat{f}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *(gleichmäßig) gleichstetig*[14] auf $\mathbb{R}^n$. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli[15] gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge, der Einfachheit halber sei dies die Folge $(\hat{f}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ selbst. Wähle nun ein festes $r > 0$ und spalte das Intergal
$$\|f_i - f_j\|_{k_1}^2 = \int_{|\xi|>r} (1+|\xi|)^{2k_1}|\hat{f}_i(\xi) - \hat{f}_j(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi|\leq r} (1+|\xi|)^{2k_1}|\hat{f}_i(\xi) - \hat{f}_j(\xi)|^2 d\xi.$$
Für $|\xi| > r$ gilt
$$(1+|\xi|)^{2k_1} \leq (1+r)^{-2(k_2-k_1)}(1+|\xi|)^{2k_2},$$
und daher
$$\int_{|\xi|>r} (1+|\xi|)^{2k_1}|\hat{f}_i(\xi) - \hat{f}_j(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{\|f_i - f_j\|_{k_2}^2}{(1+r)^{2(k_2-k_1)}} \leq \frac{2C}{r^{2(k_2-k_1)}}$$
Für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ können wir das erste Intergral also mit hinreichend groß gewähltem r für alle i und j durch $\frac{\varepsilon}{2}$ nach oben abschätzen. Da $\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| \leq r\}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist, ist das zweite Integral nach oben beschränkt durch ein konstantes Vielfaches von
$$\sup_{|\xi|\leq r} \left|\hat{f}_j(\xi) - \hat{f}_k(\xi)\right|^2.$$
Wegen der vorangestellten Diskussion gibt es eine natürliche Zahl J, so dass das zweite Integral für alle $j, k \geq J$ nach oben durch $\frac{\varepsilon}{2}$ abgeschätzt werden kann. Also ist $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in W^{k_1} und damit konvergent.

Daraus folgt die Aussage für $\mathbb{T}^n$. Wir haben also gezeigt, dass jede Folge in $B \subset W^{k_2}$ in der $\|\cdot\|_{k_1}$-Norm konvergiert, d.h. $B \subset W^{k_1}$ ist eine kompakte Teilmenge. □

1.2 Sobolev-Räume für Mannigfaltigkeiten

Aus Behauptung 1.5 erhalten wir

Korollar 1.8 *1. Multiplikation mit einer glatten Funktion induziert einen beschränkten Operator $W^k \to W^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$.*

2. Lineare Differentialoperatoren der Ordnung l sind beschränkte Operatoren $W^k \to W^{k-l}$.

[13] $(\varphi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)f(y)dy$ heißt *Faltung* oder *Konvolution*

[14] **Definition**: Eine Familie $\mathcal{F}$ von Funktionen heißt *(gleichmäßig) gleichstetig*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\| < \delta$ stets $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ gilt.

[15] **Satz von Arzelà-Ascoli:** Sei X ein kompakter metrischer Raum. Jede in X gleichstetige Folge von Funktionen enthält eine in X gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Korollar 1.9 *Sei $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset K$ für eine kompakte Teilmenge K. Sei $U \subset \mathbb{T}^n$ eine offene Umgebung für K, und sei $\varphi : U \to \mathbb{T}^n$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt $f \circ \varphi \in W^k$ genau dann, wenn $f \in W^k$.*

Beweis: Es genügt, die L^2-Normen der Ableitungen von $f \circ \varphi$ durch die Normen der Ableitungen von f abzuschätzen. Wegen der Kompaktheit folgt mit Kettenregel und Jacobi-Matrix von φ die Aussage. □

Nun können wir Sobolev für Mannigfaltigkeiten erklären. Sei M eine glatte kompakte Mannigfaltigkeit und (U_j) eine Überdeckung von lokalen Koordinatenräumen, sowie (ψ_j^2) eine glatte Partition der Eins auf U_j. Sei φ_j ein Diffeomorphismus $U_j \to \mathbb{T}^n$.

Definition 1.10 *Das* Sobolev-k-Skalarprodukt *auf $C^\infty(M)$ ist gegeben durch*

$$\langle f, g \rangle_k := \sum_j \left\langle (\psi_j f) \circ \varphi_j^{-1}, (\psi_j g) \circ \varphi_j^{-1} \right\rangle_k ,$$

wobei sich die Sobolev-k-Skalarprodukt auf der rechten Seite der Gleichung auf $\mathbb{T}^n$ beziehen.

Bemerkung 1.11

1. Die Definition hängt natürlich von der Wahl der Partition der Eins etc. ab. Die Korollare 1.8 und 1.9 zeigen jedoch, dass für jede andere Wahl die induzierte Norm durch eine äquivalente Norm ersetzt wird, d.h. diese Sobolev-k-Norm ist kanonisch bis auf Äquivalenz definiert. Wir definieren den *Sobolev-k-Raum $W^k(M)$* als Vervollständigung von $C^\infty(M)$ bezüglich der k-Norm. Dies ist ein topologischer Vektorraum, ausgestattet mit einer Klasse von inneren Produkte, welche alle äquivalente Normen induzieren. Bezüglich jeder dieser Norm ist $W^k(M)$ vollständig.

2. Ist E ein Vektorbündel über M, so kann man auf ähnliche Weise der Sobolev-Raum $W^k(E)$ von W^k-Schnitten von E definieren, indem man eine beliebige Trivialisierung von E wählt.

3. Der Satz von Rellich, Der Einbettungssatz von Sobolev und Proposition 1.4 bleiben auch für Sobolev-Räume von beliebigen Mannigfaltigkeiten gültig.

2 Analysis des Dirac-Operators

2.1 Verallgemeinerte Dirac-Operatoren und elliptische Abschätzung

Sei D der Dirac-Operator auf einem Clifford-Bündel S über der Mannigfaltigkeit M. Einen kritischen Punkt in der Analysis des Dirac-Operators spielt die Weitzenbock-Formel $D^2 = \nabla^*\nabla + \mathrm{K}$, wobei K ein gewisser Krümmungsoperator ist. Allgemeiner werden wir nun Operatoren erster Ordnung von $\Gamma(S)$ betrachten (natürlich S mit hermitischer Metrik und verträglichem Zusammenhang), welche die Gleichung

$$D^2 = \nabla^*\nabla + B$$

erfüllen, wobei B ein Differentialoperator erster Ordnung auf S ist. Solche Operatoren heißen *verallgemeinerte Dirac-Operatoren.* Ein wichtiges Beispiel ist der Operator $D + A$, wobei D der „alte" Dirac-Operator ist und A ein beliebiger Endomorphismus von S.
Da D ein Differentialoperator erster Ordnung ist, erhalten wir die Abschätzung

$$\|Ds\|_0 \leq C\|s\|_1$$

für eine geeignete Konstante C (vgl. Korollar 1.8). Die wesentliche Eigenschaft von verallgemeinerten Dirac-Operatoren ist folgende „approximative Umkehrung" dieser Abschätzung:

Satz 2.1 (Ungleichung von Garding) *Sei D ein verallgemeinerter Dirac-Operator auf einer kompakten Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine Konstante C derart, dass für jeden Schnitt $s \in \Gamma(S)$*

$$\|s\|_1 \leq C \cdot (\|s\|_0 + \|Ds\|_0).$$

Beweis: Wegen eines Partition-der-Eins-Arguments können wir uns auf den Fall beschränken, dass der Träger von s in einen lokalen Koordinatenraum liegt. Die definierende Gleichung $D^2 = \nabla^*\nabla + B$ zusammen mit dem L^2-Produkt mit s liefert

$$\|Ds\|_0^2 = \langle Ds, Ds\rangle_0 = \left\langle D^2 s, s\right\rangle_0 = \langle \nabla^*\nabla s + Bs, s\rangle_0 = \langle \nabla s, \nabla s\rangle_0 + \langle Bs, s\rangle_0 = \|\nabla s\|_0^2 + \langle Bs, s\rangle_0 .$$

Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und der Tatsache, dass B ein Operator erster Ordnung ist, ergibt sich

$$\|\nabla s\|_0 \leq C_1 \cdot (\underbrace{\|s\|_0\|s\|_1}_{\text{Abschätzung für } \langle Bs,s\rangle} + \|Ds\|_0^2)$$

für eine geeignete Konstante C_1. Nun schreiben wir ∇ in lokalen Koordinaten $\nabla_i s = \partial s/\partial x_i + \Gamma_i s$, wobei s als vektorwertige Funktion betrachtet werden und die *Christoffel-Symbol* Γ_i Endomorphismen des Clifford-Bündels S sind. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|\nabla s\|_0^2 &= \langle \nabla s, \nabla s\rangle_{L^2} \overset{\text{1-Form } \nabla s}{=} \\
&= \sum_{i,j} \left(\int_M g^{ij} \left(\frac{\partial s}{\partial x_i}, \frac{\partial s}{\partial x_j} \right) + 2 \int_M g^{ij} \mathrm{Re} \left(\frac{\partial s}{\partial x_i}, \Gamma_j s \right) + \int_M g^{ij} \left(\Gamma_i s, \Gamma_j s \right) \right) \\
&\geq C_2 \|s\|_1^2 - C_3 \|s\|_0 \|s\|_1,
\end{aligned}$$

so dass zusammen mit der letzten Ungleichung

$$\|Ds\|_0^2 \geq C_4 \|s\|_1^2 - C_5 \|s\|_0 \|s\|_1$$

für geeignete Konstanten C_2, C_3, C_4 und C_5 folgt. *Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $K > 0$, so dass $ab \leq \varepsilon a^2 + K b^2$ für alle $a, b > 0$ gilt.* Daraus folgt mit $a = \|s\|_1$, $b = \|s\|_0$ und $\varepsilon = \frac{1}{2} C_4$, dass $C_5 \|s\|_0 \|s\|_1 \leq \frac{1}{2} C_4 \|s\|_1^2 + C_6 \|s\|_0^2$ und weiter

$$\|Ds\|_0^2 \geq \frac{1}{2} C_4 \|s\|_1^2 - C_6 \|s\|_0^2,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Es gibt folgende Verallgemeinerung der Ungleichung von Garding, welche einen Zusammenhang zwischen der Sobolev-k-Norm von Ds und der Sobolev-$(k+1)$-Norm von s herstellt:

Proposition 2.2 (Elliptische Abschätzung) *Für beliebiges $k > 0$ gibt es eine Konstante C_k derart, dass für jeden Schnitt $s \in \Gamma(S)$ die folgende Abschätzung gilt:*

$$\|s\|_{k+1} \leq C_k \left(\|s\|_k + \|Ds\|_k \right)$$

Beweis: Der Fall $k = 0$ ist die Ungleichung von Garding. Wir führen den Beweis induktiv. Wegen eines Partition-der-Eins-Arguments dürfen wir wieder annehmen, dass sich der Träger von s in einem lokalen Koordinatenraum befindet. Sei ∂_i der Operator $\partial/\partial x_i$. Wegen der Aussage über die Äquivalenz der Normen gilt

$$\|s\|_{k+1} \leq A_1 \sum_i \|\partial_i s\|_k$$

für eine geeignete Konstante A_1. Die Induktionsvoraussetzung liefert nun

$$\|\partial_i s\|_k \leq C_{k-1} \left(\|\partial_i s\|_{k-1} + \|D \partial_i s\|_{k-1} \right).$$

Aber ∂_i ist ein Differentialoperator erster Ordnung, d.h.

$$\|\partial s\|_{k-1} \leq A_2 \|s\|_k.$$

Ebenso ist die Lie-Klammer $[D, \partial_i]$ ein Operator erster Ordnung und es folgt mit der Δ-Ungleichung

$$\|D \partial_i s\|_{k-1} \leq \|\partial_i D s\|_{k-1} + \|[D, \partial_i] s\|_{k-1} \leq A_2 \|Ds\|_k + A_3 \|s\|_k.$$

Dies impliziert nun

$$\|s\|_{k+1} \leq n \cdot A_1 \cdot C_{k-1} \cdot \left(A_2 \|Ds\|_k + (A_2 + A_3) \|s\|_k \right)$$

und damit die Behauptung. □

2.2 Unbeschränkte Operatoren und ihre Graphen

Um den Dirac-Operator zu analysieren, fassen wir ihn als unbeschränkten Operator auf dem Hilbertraum $H = L^2(S)$ auf. Ein *unbeschränkter Operator* ist einfach ein lineare Abbildung von einem dichten Teilraum von H (dem *Definitionsbereich* $\mathrm{dom}(A)$ des Operators) nach H. Solche Operatoren müssen nicht stetig sein. Die grundlegende Idee in der Theorie unbeschränkter Operatoren ist jedoch, dass die Abgeschlossenheit des Graphen des Operators in $H \oplus H$ teilweise als Ersatz für Stetigkeit dient.

Definition 2.3 *Sei A ein unbeschränkter Operator. Der* Graph *von A ist der Unterraum*

$$G_A = \{(x, Ax) \mid x \in \mathrm{dom}(A)\}$$

von $H \oplus H$.

Lemma 2.4 *Der Abschluss $\overline{G}$ des Graphen G des Dirac-Operators D ist ebenfalls ein Graph.*

Beweis: Dies ist eine allgemeine Eigenschaft von Differentialoperatoren und basiert auf der Existenz des sogenannten *formalen adjungierten Operators* $D^\dagger$, der durch die Gleichung

$$\langle Ds_1, s_2 \rangle = \left\langle s_1, D^\dagger s_2 \right\rangle$$

(für alle glatten Schnitte s_1, s_2 von S) definiert ist. Für den klassischen Dirac-Operator wurde $D^\dagger = D$ bewiesen. Angenommen $\overline{G}$ ist kein Graph. Dann gibt es einen Punkt $(0, y) \in \overline{G}$ mit $y \neq 0$, d.h. es existiert eine Folge $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von glatten Schnitten von S mit $x_j \to 0$ und $Dx_j \to y$ in $L^2(S)$. Aber dann folgt für jeden glatten Schnitt s, dass

$$\langle Dx_j, s \rangle \to \langle y, s \rangle \qquad \text{und} \qquad \left\langle x_j, D^\dagger s \right\rangle \to 0$$

für $j \to \infty$. Wegen $\langle Dx_j, s \rangle = \langle x_j, D^* s \rangle$ muss aber $\langle y, s \rangle = 0$ für alle glatten Schnitte s gelten, d.h $y = 0$ und erhalten den gewünschten Widerspruch. □

2.3 Schwache Lösbarkeit von Differentialgleichungen

Seien nun x und y glatte Schnitte von S mit $Dx = y$. Dann gilt für alle glatten Schnitte $s \in \Gamma(S)$, dass

$$\left\langle x, D^\dagger s \right\rangle = \langle y, s \rangle .$$

Dies Gleichung ist auch für beliebige $x, y \in L^2(S)$ sinnvoll. Wenn sie erfüllt ist, sagt man, dass die Gleichung $Dx = y$ *schwach* erfüll ist. Ein solches Konzept kann für allgemeinere partielle Differentialgleichungen definiert werden, und für die meisten ist das Konzept der schwachen Lösbarkeit eine echte Verallgemeinerung. Für den Dirac-Operator jedoch stellt sich heraus, dass schwach Lösbarkeit dasselbe wie die gewöhnliche Lösbarkeit ist. Um dies zu beweisen, brauchen wir einige zusätzliche Konzepte:

Definition 2.5 *Ein beschränkter Operator A auf $L^2(S)$ heißt* Glättungsoperator*, wenn es einen glatten* Kern *$k(p, q)$ auf $M \times M$ gibt mit Werten $k(p, q) \in Hom(S_q, S_p)$ derart, dass*

$$As(p) = \int_M k(p, q) s(q).\ \mathrm{vol}(q).$$

Formal ist k ein glatter Schnitt von $S \boxtimes S^* := \pi_1^* S \otimes \pi_2^* S^*$, wobei π_1 und π_2 die kanonischen Projektionen von $M \times M$ auf M sind.

Differenziert man unter dem Integral, so erkennt man, dass der Wertebereich eines Glättungsoperators aus glatten Schnitten besteht.

Definition 2.6 *Ein* friedrichscher Mollifizierer *für S ist eine Familie $(F_\lambda)_{\lambda \in (0,1)}$ von selbstadjungierten Glättungsoperatoren auf $L^2(S)$ derart, dass*

1. $(F_\lambda)_{\lambda\in(0,1)}$ *ist eine beschränkte Familie von Operatoren auf* $L^2(S)$*, d.h.*

2. $([B,F_\lambda])_{\lambda\in(0,1)}$ *lässt sich zu einer beschränkten Familie von Operatoren auf* $L^2(S)$ *fortsetzen für jeden Differentialoperator erster Ordnung* B *auf* S*.*

3. $F_\lambda \to id$ *in der* schwachen Topologie *der Operatoren auf* $L^2(S)$*, d.h. für alle* $x, y \in L^2(S)$ *gilt* $\langle F_\lambda x, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ *für* $\lambda \to 0$.

Friedrichsche Mollfizierer existieren immer (vgl. Übungen), wir setzen die Existenz an dieser Stelle ohne Beweis voraus.

Proposition 2.7 *Seien* $x, y \in L^2(S)$ *und* $Dx = y$ *schwach. Dann gilt* $x \in W^1(S) = \mathrm{dom}(\overline{D})$*, und* $\overline{D}x = y$*.*

Beweis: Sei (F_λ) ein friedrichscher Mollifizierer, und sei $x_\lambda := F_\lambda x$. Dann ist x_λ ein glatter Schnitt und für $s \in \Gamma(S)$ gilt

$$\begin{aligned}\langle Dx_\lambda, s\rangle &= \left\langle x_\lambda, D^\dagger s\right\rangle \overset{F_\lambda = F_\lambda^\dagger}{=} \left\langle x, F_\lambda D^\dagger s\right\rangle \\ &\overset{\text{Def. }[\cdot,\cdot]}{=} \left\langle x, D^\dagger F_\lambda s\right\rangle + \left\langle x, [F_\lambda, D^\dagger] s\right\rangle \overset{\text{Vor.}}{=} \langle y, F_\lambda s\rangle + \left\langle x, [F_\lambda, D^\dagger] s\right\rangle .\end{aligned}$$

Folglich gibt es eine Konstante C mit $|\langle Dx_\lambda, s\rangle| \le C \cdot \|s\|$ (gleichmäßig in λ). Da $\Gamma(S) \subset L^2(S)$ dicht ist, impliziert dies $\|Dx_\lambda\|_0 \le C$.
Wegen der Ungleichung von Garding bildet die Familie der x_λ eine beschränkte Teilmenge des Sobolev-Raums W^1, denn $\|x_\lambda\|_1 \le C(\|x_\lambda\|_0 + \|Dx_\lambda\|_0)$. Also gibt es eine Folge von Werten λ_j mit $\lambda_j \to 0$ derart, dass x_{λ_j} schwach gegen einen Grenzwert in W^1 konvergiert, denn der Einheitsball des Hilbertraums W^1 ist schwach kompakt. Der Satz von Rellich liefert nun, dass x_{λ_j} in der Normtopologie von $W^0 = L^2$ konvergiert. Auf Grund der Eigenschaft 3) der friedrichschen Mollifizierer muss dieser Grenzwert x sein. Das bedeutet jedoch $x \in W^1$ wie behauptet. □

Wir fassen also noch einmal unser Ergebnis zusammen, der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den klassischen Fall $D^\dagger = D$, d.h. der Operator D ist *symmetrisch* in der Sprache der unbeschränkten Operatortheorie. Die letzte Proposition zeigt, dass der Definitionsbereich des *Abschlusses* von D gleich dem Definitionsbereich des (im Hilbert-Raum) adjungierten Operators von D ist, und beide Definitionsbereich stimmen mit W^1 überein.

2.4 Spektralzerlegung des Dirac-Operators

Wir wollen nun eine Spektralzerlegung entwickeln. Die folgenden Resultate sind klassische Ergebnisse der unbeschränkten Operatortheorie, welche wir auf unsere Situation spezialisiert haben.

Proposition 2.8 *Der Kern von* D *(d.h. die Menge aller* $s \in W^1$ *mit* $Ds = 0$*) besteht aus glatten Schnitten.*

Beweis: Sei $s \in \ker(D)$. Wir werden induktiv $s \in W^k$ für alle k beweisen, so dass die Behauptung aus dem Einbettungssatz von Sobolev folgt. Angenommen, wir kennen bereits die Aussage $s \in W^{k-1}$. Sei (F_λ) ein friedrichscher Mollifizierer. Auf Grund der Eigenschaften der friedrichschen Mollifizierer und der Definition von Sobolevräumen kann man leicht überprüfen, dass die F_λ und die $[D, F_\lambda]$ beschränkte Familien von Operatoren auf W^{k-1} bilden. Die elliptische Abschätzung liefert nun

$$\|F_\lambda s\|_k \le C_k(\|F_\lambda s\|_{k-1} + \|DF_\lambda s\|_{k-1}) \overset{Ds=0}{=} C_k(\|F_\lambda s\|_{k-1} + \|[D, F_\lambda]s\|_{k-1}.$$

Also ist $\|F_\lambda s\|_k$ beschränkt. Da $F_\lambda s$ in L^2 gegen s konvergiert und eine geeignete Teilfolge schwach in W^k konvergiert, können wir $s \in W^k$ folgern. □

Es sei daran erinnert, dass G den Graphen des Dirac-Operators D bezeichnet. Im Folgenden werden wir immer $D = D^\dagger$ voraussetzen.

Lemma 2.9 *Sei $J : H \oplus H \to H \oplus H$ die Abbildung $(x, y) \mapsto (y, -x)$. Dann gibt es eine orthogonale direkte Summenzerlegung*
$$H \oplus H = \overline{G} + J\overline{G}.$$

Beweis: Sei $(x, y) \in G^{\perp}$ im orthogonalen Komplement des Graphen, d.h. für alle $s \in \Gamma(S)$ gilt

$$\langle (x, y), (s, Ds) \rangle = 0 \quad \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \quad \langle x, s \rangle + \langle y, Ds \rangle = 0.$$

Das bedeutet jedoch $Dy + x = 0$ schwach. Eine unserer Propositionen besagt in dieser Situation, dass $y \in W^1$ und daher $(y, -x) \in \overline{G}$ sowie weiter $(x, y) \in J\overline{G}$. □

Wir definieren jetzt einen Operator Q wie folgt: Für beliebiges $x \in L^2(S) = H$ sei $(Qx, \overline{D}Qx)$ die orthogonale Projektion von $(x, 0)$ auf $\overline{G}$ in $H \oplus H$. Dann gilt $Qx \in W^1$ und wegen $\|x\|^2 = \|Qx\|^2 + \|\overline{D}Qz\|^2$. Die Ungleichung von Garding zeigt, dass Q als Operator $L^2 \to W^1$ beschränkt ist. Der Satz von Rellich impliziert die Kompaktheit von Q als beschränkter Operator auf $L^2(S)$. Er ist außerdem selbstadjungiert, positiv, injektiv und hat Norm ≤ 1.
Das folgende Resultat zerlegt den Operator D in überschaubare (d.h. endlichdimensionale) Teile:

Satz 2.10 (Spektralsatz) *Es gibt eine direkte Summenzerlegung von H in eine abzählbare Summe von orthogonalen Unterräumen H_λ. Jedes H_λ ist ein endlichdimensionaler Vektorraum von glatten Schnitten, genauer: H_λ ist Eigenraum für D zum Eigegnwert λ. Die Eigenwerte λ bilden eine diskrete Teilmenge von $\mathbb{R}$.*

Beweis: Betrachte den kompakten selbstadjungierten Operator Q, welcher zuvor definiert wurde. Der Spektralsatz für solche Operatoren (Funktionalanalysis I) besagt, dass H in eine orthogonale Summe von endlichdimensionalen Eigenräumem für Q zerlegt werden kann, mit diskreten Eigennwerten, welche gegen 0 konvergieren. Da Q positiv und injektiv ist, sind die Eigenwert tatsächlich ausschließlich echt größer als 0.
Sei nun $x \in W^1$ ein Eigenvektor von Q mit Eigenwert $\rho > 0$. Dann gibt ein $y \in W^1$ mit

$$(x, 0) = (Qx, \overline{D}Qx) + (-\overline{D}y, y) = \rho(x, \overline{D}x) + (-\overline{D}y, y)$$

und folglich $(\rho - 1)x = \overline{D}y$ sowie $y = -\rho\overline{D}x$. Setzen wir $\kappa^2 := \frac{1-\rho}{\rho}$ und $z := \frac{-1}{\rho\kappa}y$, so ergibt sich

$$\overline{D}x = \kappa z \qquad \text{und} \qquad \overline{D}z = \kappa x,$$

so dass $x + z$ und $x - z$ Eigenvektoren von $\overline{D}$ mit Eigenwerten κ bzw. $-\kappa$ sein müssen. Also lässt sich H als direkte Summe (notwendig orthogonaler) Eigenräume für $\overline{D}$ schreiben, wobei jeder der beiden Eigenräume in endlichdimensionaler Unterraum von $W^1(S)$ ist.
Um zu beweisen, dass die Eigenvektoren glatt sind, beachte man, dass ein Eigenvektor für D (mit Eigenwert λ) stets im Kern des verallgemeinerten Dirac-Operators $D - \lambda id$ liegt, so dass die erste Proposition dieses Abschnitts den Beweis des Satzes vervollständigt. □

Beispiel 2.11 Falls D der Operator $i(d/dx)$ auf dem Kreis S^1 ist, so liefert dieser Satz die Fourier-Reihen-Zerlegung von $L^2(S^1)$.

3 Der Funktionalkalkül

Sei $\sigma(D)$ das *Spektrum* (= Menge der Eigenwerte) von D. Jeder Schnitt $s \in L^2(S)$ besitzt eine *Fourierentwicklung* als orthogonale direkte Summe

$$\sum_{\lambda \in \sigma(D)} s_\lambda,$$

wobei s_λ die Komponente von s im Eigenraum zum Eigenwert λ) von D ist. Es gilt $\|s_\lambda\| \leq \|s\|$ für alle λ.

Proposition 3.1 *Ein Schnitt $s \in L^2(S)$ ist genau dann glatt, wenn $\|s_\lambda\|_0 = \mathcal{O}(|\lambda|^{-k})$ für alle k gilt. (In diesem Fall sagt man, dass die Terme der Entwicklung* schnell fallend *sind.)*

Beweis: „$\Leftarrow$" Sei $s \in L^2(D)$ mit Fourier-Entwicklung $\sum_{\lambda\in\sigma(D)} s_\lambda$. Dann gilt

$$\|s\|_k = \|\sum_{\lambda\in\sigma(D)} s_\lambda\|_k = \sum_{\lambda\in\sigma(D)} \|s_\lambda\|_k \leq \sum_{\lambda\in\sigma(D)} C_k|\lambda|^{-k} < \infty,$$

d.h. $s \in W^k$ für jedes k, so dass mit dem Einbettungssatz von Sobolev die Behauptung folgt.
„$\Rightarrow$" Sei s glatt. Da s_λ ein Eigenvektor für den Dirac-Operator D zum Eigenwert λ ist, liefert die elliptische Abschätzung $\|s_\lambda\|_k \leq C_k|\lambda|^k\|s_\lambda\|_0$ für jede Sobolev-k-Norm, d.h.

$$\infty \overset{\substack{\text{Prop. 1.4:}\\ C^k\subset W^k}}{>} c_{\lambda,k} = \|s_\lambda\|_k \overset{\substack{\text{Satz von}\\ \text{Rellich}}}{\geq} \|s_\lambda\|_0 \overset{\substack{\text{elliptische}\\ \text{Abschätzung}}}{\geq} \frac{\|s_\lambda\|_k}{C_k|\lambda|^k} = \frac{c_{\lambda,k}}{C_k|\lambda|^k}$$

für jedes k. Das bedeutet jedoch $\|s_\lambda\|_0 \in \mathcal{O}(|\lambda|^{-k})$.

Korollar 3.2 *Die Bedingung über den schnellen Abfall impliziert somit, das die Fourier-Entwicklung in jedem Sobolev-Raum konvergiert.*

Definition 3.3 *Sei f eine beschränkte Funktion auf dem Spektrum $\sigma(D)$. Dann ist durch*

$$f(D)s := \sum_{\lambda\in\sigma(F)} f(\lambda)s_\lambda$$

ein beschränkter Operator $f(D)$ auf $L^2(S)$ definiert, wobei $s = \sum_{\lambda\in\sigma(D)} s_\lambda$; mit anderen Worten: $f(D)$ ist der diagonale *Operator, welcher durch Multiplikation mit $f(\lambda)$ auf dem Eigenraum zum Eigenwert λ von D operiert.*

Proposition 3.4 *Die Abbildung $f \mapsto f(D)$ ist ein unitaler Homomorphismus vom Ring der beschränkten Funktionen auf $\sigma(D)$ nach in den Ring $B(L^2(S))$ der beschränkten Operatoren auf dem Hilbert-Raum $L^2(S)$. Die Norm des Operators $f(D)$ ist nach oben beschränkt durch das Supremum von $|f|$. Falls D mit einem Operator A kommutiert, so gilt dasselbe für jedes $f(D)$. Weiterhin gilt $f(D) : \Gamma^\infty(S) \to \Gamma^\infty(S)$. Gilt $f(x) = xg(x)$, wobei f und g beschränkte Funktionen sind, so folgt $f(D) = Dg(D)$ als beschränkte Operatoren.*

Beweis: Die Homomorphismusaussage rechnet man sofort nach. Weiter gilt für alle $s \in L^2(S)$

$$\|f(D)s\|_0 = \|\sum_{\lambda\in\sigma(D)} f(\lambda)s_\lambda\|_0 \leq \sum_{\lambda\in\sigma(D)} \left(\sup_{\lambda\in\sigma(D)} |f(\lambda)|\right) \cdot \|s_\lambda\|_0 = \sup_{\lambda\in\sigma(D)} |f(\lambda)| \cdot \|s\|_0.$$

Sei nun A ein Operator, welcher mit D kommutiert. Dann erhalten wir für alle $s \in L^2(S)$

$$(Af(D))s = \sum_{\lambda\in\sigma(D)} A(f(\lambda)s_\lambda) = \sum_{\lambda\in\sigma(D)} f(\lambda)As_\lambda = \sum_{\lambda\in\sigma(D)} f(\lambda)(As_\lambda) = f(D)(A(s)) = (f(D)A)s.$$

Für $s \in \Gamma^\infty(S)$ nach Proposition 3.1 $\|s_\lambda\|_0 \in \mathcal{O}(|\lambda|^{-k})$ für alle k. Ist f beschränkt, so impliziert dies $\|f(\lambda)s_\lambda\|_0 \in \mathcal{O}(|\lambda|^{-k})$ und somit $f(D)s \in \Gamma^\infty(S)$. Für beschränkte Funktionen f und g mit $f(x) = xg(x)$ erhalten wir für alle $s \in L^2(S)$

$$f(D)s = \sum_{\lambda\in\sigma(D)} f(\lambda)s_\lambda = \sum_{\lambda\in\sigma(D)} \lambda g(\lambda)s_\lambda = D\left(\sum_{\lambda\in\sigma(D)} g(\lambda)s_\lambda\right) = Dg(D)s$$

und damit die Behauptung. □

Proposition 3.5 *Falls f rapide fallend ist, so ist der assoziierte Operator $f(D)$ ein Glättungsoperator. Die Zuordnung, welchen f auf den glättenden Kern $f(D)$ schickt, erklärt eine stetige Abbildung vom Raum $\mathcal{R}(\mathbb{R})$ der schnell fallenden Funktionen auf $\mathbb{R}$ (ausgestattet mit der nnatürlichen Frêchet-Topologie) in den Raum der glättenden Kerne auf $M \times M$.*

Beweisidee: Das Argument in der letzten Proposition zeigt, dass wenn f selbst rapide fallend ist (d.h. $|f(\lambda)| = \mathcal{O}(|\lambda|^{-k})$ für jedes k), dann gilt $f(D) : L^2(S) \to \Gamma(S)$. Tatsächlich ist $f(D)$ in diesem Fall ein Glättungsoperator (d.h. er ist durch einen glatten Kern gegeben). Um dies einzusehen, beachte man, dass für $\lambda \in \sigma(D)$ der orthogonnale Projektionsoperator P_λ auf den Eigenraum zum Eigenwert λ von D glättend ist; allgemeiner gilt: Jede orthogonale Projektion, dessen Bild ein endlichdimensionaler Raum von glatten Funktionen ist, ist ein Glättungsoperator. Weiter ist es nicht schwer einzusehen (Übung), dass für jedes k es ein $\ell(k)$ derart gibt, dass die Sobolev-k-Norm (auf $M \times M$) des glatten Kerns von P_λ durch $C_k\lambda^{\ell(k)}$ beschränkt ist. Ist also f schnell fallend, so konvergiert die Reihe

$$f(D) = \sum_{\lambda \in \sigma(D)} f(\lambda) P_\lambda$$

in der schwachen Norm von glatten Kernen auf $M \times M$. □

Korollar 3.6 *Es folgt unmittelbar, dass es ein N gibt (welches nur von der Dimension von M abhängt),so dass für $f(\lambda) \in \mathcal{O}(|\lambda|^{-N})$ der Operator $f(D)$ einen stetigen Kern besitzt.*

4 Übungen

Übung 4.1 Sind die Elemente des Sobolevraums $W^{\frac{n}{2}}(\mathbb{T}^n)$ stetig? (Dies ist der Grenzfall im Einbettungssatz von Sobolev.) Betrachte die Funktion $(r, \theta) \mapsto \log(1 - \log(r))$ auf dem Einheitsball in $\mathbb{R}^2$.

Übung 4.2 Zeige die Existenz von friedrichschen Mollifizierern folgendernmaßen:

1. Wähle eine Funktion φ auf $\mathbb{R}^n$, welche positiv, glatt und radial symmetrisch ist sowie einen kompakten Träger besitzt und $\int \varphi = 1$ erfüllt; und sei $\varphi_\lambda(x) := \lambda^{-n}\varphi(x/\lambda)$. Definiere F_λ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ durch das Konvolutionsintegral
$$F_\lambda s(x) = \varphi_\lambda * s(x) = \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) s(y) dy.$$
Zeige, dass die Operatoren auf L^2 gleichmäßig beschränkt sind.
2. Zeige: Ist s stetig mit kompaktem Träger, so konvergiert $F_\lambda s \to s$ gleichmäßig für $\lambda \to 0$.
3. Folgere, dass für $s \in L^2$ gilt, dass $F_\lambda s \to s$ in L^2 für $\lambda \to 0$.
4. Sei $B := a(x)\partial/\partial x_1$. Zeige mit partieller Integration
$$[B, F_\lambda]s(x) = \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) \partial_1 a(y) s(y) dy + \frac{1}{\lambda^{n+1}} \int (a(x) - a(y)) \partial_1 \varphi\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) s(y) dy$$
und folgere, dass die Operatornorm von $[B, F_\lambda]$ gleichmäßig beschränkt ist.
5. Benutze die obige Konstruktion im lokalen Koordinatenraum, außerdem ein Partition-der-Eins-Argument, um friedrichsche Mollifizierer auf einer kompakten Mannigfaltigkeit zu konstruieren.

Übung 4.3 Sei K ein glättender Operator auf $L^2(S)$. Beweise, dass die L^2-Norm des glättenden Kerns von K beschränkt ist durch ein Vielfaches der Operatornorm von K als Operator $L^2(S) \to C^0(S)$. Beweise dann, dass für K= Projektion auf den Eigenraum zum Eigenwert λ von D die W^k-Norm seines Kerns beschränkt ist durch $C_k\lambda^\ell$ für ein geeignetes $\ell > k + \frac{n}{2}$.

Übung 4.4 Sei D ein Dirac-Operator. Zeige, dass die Operatoren $F_\lambda = \exp(-\lambda D^2)$, definiert durch den Funktionalkalkül, eine Familie von friedrichschen Mollifizierern bildet.

Übung 4.5 Beweise den **Alternativsatz von Fredholm** für einen Dirac-Operator D: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann hat entweder die Gleichung $Du + \lambda u = 0$ eine von 0 verschiedene Lösung oder für alle v gibt es eine eindeutige Lösung der Gleichung $Du + \lambda u = v$. (u und v seien Elemente in $\Gamma(S)$.)