Seminarvortrag

Von-Neumann-Algebren

Eine kurze Einführung

Benedikt Plitt

21. Juli 2004

Es werden die wichtigsten Tatsachen über Von-Neumann-Algebren zusammengestellt und einige speziellere Ergebnisse präsentiert, die für den Folgevortrag „algebraische K-Theorie von Von-Neumann-Algebren“ benötigt werden.

Einleitung

Von-Neumann-Algebren wurden ursprünglich von F. J. Murray und J. v. Neumann in ihrer Artikelreihe „On Rings of Operators“ [MN36, MN37, Neu40, MN43] eingehend untersucht. Dort wurde nur der Spezialfall von Faktoren betrachtet, aber auch gezeigt, dass jede Von-Neumann-Algebra faktorisiert werden kann. Die älteste Definition ist die einer unitalen schwach abgeschlossenen *-Unteralgebra von $B(H)$ [Neu30, Def. II.1.1], später wurde jedoch mittels des Doppelkommutantensatzes bewiesen, dass sich Von-Neumann-Algebren auch rein algebraisch definieren lassen (siehe dazu z. B. [Neu43, Th. III]).

Eine hauptsächliche Motivation stammte damals aus der Quantentheorie, darauf wird hier jedoch nicht weiter eingegangen. Es entstanden später auch innermathematische Anwendungen; eine davon soll im Folgevortrag behandelt werden. Details über Von-Neumann-Algebren findet man z. B. in den Standardwerken [SZ79], [Dix81], [KR97a, KR97b] und [Tak02, Tak03a, Tak03b].

Eine für den folgenden Vortrag wesentliche Eigenschaft von Von-Neumann-Algebra ist die Existenz der zentrumswertigen Spur, die Projektionen bis auf Äquivalenz eindeutig charakterisiert.

1 Von-Neumann-Algebren

Es bezeichne $B(H)$ die Algebra der stetigen linearen Endomorphismen eines Hilbertraumes H (mit der Komposition).

Die folgende Definition einer Von-Neumann-Algebra ist nicht die ursprüngliche, hat aber den Vorteil, dass sie rein algebraisch ist und die Topologie auf $B(H)$ nicht benutzt. Viele Sätze über Von-Neumann-Algebren lassen sich rein algebraisch beweisen.

Definition 1 (Kommutante, Zentrum). Sei R ein Ring und $M \subset R$. Die *Kommutante* von M in R ist der Unterring

$$M' := \{a \in R | \forall x \in M\colon ax = xa\}$$

von R, der genau die Elemente enthält, die mit allen Elementen von M vertauschen. Das *Zentrum* von R ist der Ring aller Elemente von R, die mit allen anderen vertauschen, d. h. der Ring

$$\mathcal{Z}(R) := R' = \{a \in R | \forall b \in R\colon ab = ba\}.$$

Definition 2 (Von-Neumann-Algebren). Sei H ein Hilbertraum. Eine *-Unteralgebra A von $B(H)$ mit $A = A''$ heißt *Von-Neumann-Algebra*.

Beispiel 3. Die Matrix-Algebra $M_n(\mathbb{C})$ ist eine Von-Neumann-Algebra, ebenso $M_n(A)$ für eine abelsche Von-Neumann-Algebra A. Für ein Borel-Maß μ auf einem lokalkompakten Raum X ist

$$L^\infty(X) := \{f\colon X \to \mathbb{C} \text{ mb.} | \exists C \in \mathbb{R}\colon |f(x)| \leq C \text{ außerh. e. } \mu\text{-Nullmenge}\}/\sim$$

eine abelsche Von-Neumann-Algebra.

Definition 4 (Faktoren). Eine Von-Neumann-Algebra A heißt *Faktor*, wenn ihr Zentrum trivial ist, d. h. wenn

$$\mathcal{Z}(A) \cong \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_A$$

gilt.

Beispiel 5. Die Algebra $M_n(\mathbb{C})$ ist ein Faktor. Ist A ein Faktor, so auch $M_n(A)$. Die Von-Neumann-Algebra $L^\infty(X)$ ist kein Faktor, sofern X mehr als eine nichtleere meßbare Menge enthält.

2 Projektionen

Im Folgenden werden einige Eigenschaften von Elementen einer Von-Neumann-Algebra unabhängig vom zugrundeliegenden Hilbertraum definiert. Der Begriff der positiven Elemente ist eine Verallgemeinerung desjenigen von positiven Matrizen, Projektionen entsprechen Projektionen auf abgeschlossene Teilräume.

Definition 6 (positive Elemente). Sei A eine Von-Neumann-Algebra. Ein Operator $x \in A$ heißt *positiv*, wenn es ein $y \in A$ mit $x = y^*y$ gibt; man schreibt $x \geq 0$. Außerdem schreibt man $x \geq y$, falls $x - y \geq 0$ gilt.

Definition 7 (Projektionen). Sei A eine Von-Neumann-Algebra. Ein Operator $p \in A$ heißt *Projektion*, wenn p idempotent und selbstadjungiert ist, also die Gleichung $p^2 = p^* = p$ gilt. Eine Projektion p heißt *zentral*, wenn $p \in \mathcal{Z}(A)$ gilt. Zwei Projektionen $p, q \in A$ heißen *äquivalent*, wenn es ein $u \in A$ mit $u^*u = p$ und $uu^* = q$ gibt; in diesem Fall schreibt man $p \sim q$.

Beispiel 8. In $M_2(\mathbb{C})$ ist z. B. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ eine Projektion. Sie ist z. B. äquivalent zu $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ oder $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Die einzigen zentralen Projektionen sind id und 0.

Definition 9. In einer Von-Neumann-Algebra A heißt eine Projektion p *abelsch*, wenn die Von-Neumann-Algebra pAp abelsch ist.

Definition 10 (Endlichkeit). Eine Projektion p in einer Von-Neumann-Algebra A heißt *unendlich*, wenn es eine Projektion $p_0 \in A$ mit $p \sim p_0 < p$ gibt; sonst heißt sie *endlich*. Gibt es keine nichtverschwindende endliche Projektion $q \in A$ mit $q \leq p$, so heißt p *rein unendlich*; ist für jede zentrale Projektion $c \in A$ mit $cp \neq 0$ die Projektion cp unendlich, so heißt p *echt unendlich*.

Lemma 11 (Halbierungslemma). *Sei A eine Von-Neumann-Algebra und $p \in A$ eine echt unendliche Projektion. Dann gibt es eine Projektion $q \in A$ mit $q \leq p$ und $q \sim p - q \sim p$.*

Beweis. Dieses Lemma wird z. B. in [KR97b, Lemma 6.3.3] bewiesen. $\square$

Definition 12 (zentraler Träger). Sei p eine Projektion in einer Von-Neumann-Algebra A. Der *zentrale Träger* $z(p)$ ist die kleinste zentrale Projektion in A mit $z(p) \geq p$.

3 Typen von Von-Neumann-Algebren

Definition 13. Eine Von-Neumann-Algebra heißt *endlich, unendlich, rein unendlich* bzw. *echt unendlich*, wenn ihre Identität die entsprechende Eigenschaft hat.

Definition 14 (Typklassifikation). Sei A eine Von-Neumann-Algebra.

(1) Sie heißt vom *Typ I*, wenn jede nichtverschwindende zentrale Projektion eine nichtverschwindende abelsche Projektion majorisiert.

(2) Sie heißt vom *Typ II*, wenn jede nichtverschwindende zentrale Projektion eine endliche nichtverschwindende Projektion majorisiert und es keine nichtverschwindende abelsche Projektion gibt.

(3) Sie heißt vom *Typ III*, wenn sie keine nichtverschwindende endliche Projektion enthält.

Definition 15 (Untertypen).

(1) Eine Von-Neumann-Algebra vom Typ I heißt vom *Typ* I_∞, wenn sie unendlich ist, und vom *Typ* I_f, wenn sie endlich ist. Eine Von-Neumann-Algebra vom Typ I_f heißt vom *Typ* I_n für ein $n \in \mathbb{N}$, wenn ihre Identität die Summe von n orthogonalen abelschen Projektionen ist, deren zentraler Träger die Identität ist.

(2) Eine Von-Neumann-Algebra vom Typ II heißt vom *Typ* II_∞, wenn sie unendlich ist, und vom *Typ* II_1, wenn sie endlich ist.

Beispiel 16. Die Algebra $M_n(\mathbb{C})$ ist ein Faktor vom Typ I_n; für einen lokalkompakten Raum X ist die abelsche Von-Neumann-Algebra $L^\infty(X)$ vom Typ I_1. Die Gruppen-Von-Neumann-Algebra einer endlich erzeugten nicht virtuell abelschen Gruppe ist vom Typ II. Die Existenz von Faktoren sämtlicher Typen wird z. B. in [Tak02, Th. V.7.13] gezeigt.

Satz 17 (Typzerlegung). *Sei A eine Von-Neumann-Algebra. Dann gibt es eindeutig bestimmte Von-Neumann-Algebren $A_{I_f}, A_{I_\infty}, A_{II_1}, A_{II_\infty}$ bzw. A_{III} vom Typ I_f, I_∞, II_1, II_∞ bzw. III, so daß*

$$A = A_{I_f} \times A_{I_\infty} \times A_{II_1} \times A_{II_\infty} \times A_{III}$$

gilt.

Beweis. Dieser Satz folgt unmittelbar aus [KR97b, Th. 6.5.2]. □

Satz 18.

(1) Sei A eine Von-Neumann-Algebra vom Typ I_f. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Von-Neumann-Algebra A_n vom Typ I_n, so dass

$$A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$$

gilt.

(2) Sei A eine Von-Neumann-Algebra vom Typ I_n. Dann gilt $A \cong M_n(\mathcal{Z}(A))$.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus [KR97b, Th. 6.5.2], die zweite ist in [KR97b, Th. 6.6.5] enthalten. □

4 Topologien

Definition 19 (Topologien auf $B(H)$). Sei H ein Hilbertraum.

(1) Die *starke* Operatortopologie auf $B(H)$ ist die Topologie, in der für jedes Netz $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ gilt:

$$T_\lambda \xrightarrow{\lambda} T \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in H\colon T_\lambda x \xrightarrow{\lambda} Tx$$

(2) Die *schwache* Operatortopologie auf $B(H)$ ist die Topologie, in der für jedes Netz $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ gilt:

$$T_\lambda \xrightarrow{\lambda} T \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x, y \in H\colon \langle T_\lambda x, y\rangle \xrightarrow{\lambda} \langle Tx, y\rangle$$

Satz 20 (Doppelkommutantensatz, von Neumann). *Sei H ein Hilbertraum. Für eine *-Unteralgebra A von $B(H)$ mit id $\in A$ gilt:*

$$\overline{A}^w = \overline{A}^s = A''.$$

Beweis. Ein Beweis findet sich z. B. in [KR97a, Th. 5.3.1]. □

5 Funktionalkalkül

Definition 21 (Spektrum). Sei B eine unitale $\mathbb{C}$-Algebra und $x \in B$. Das *Spektrum* von x ist die Menge

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} | x - \lambda \cdot \mathrm{id}_B \text{ nicht invertierbar}\} \subset \mathbb{C}.$$

Satz 22. *Sei A eine Von-Neumann-Algebra und $x \in A$ normal. Sei ferner $\mathcal{N}(x)$ die von x erzeugte (abelsche) Unter-Von-Neumann-Algebra. Dann gibt es einen Isomorphismus*

$$L^\infty(\sigma(x)) \to \mathcal{N}(x), \quad f \mapsto f(x).$$

Dieser Isomorphismus ist mit der Komposition verträglich.

Beweis. Siehe z. B. [KR97b, Th. 5.2.8]. □

6 Die Spur

Satz 23 (zentrumswertige Spur). *Sei A eine endliche Von-Neumann-Algebra. Dann gibt es genau eine Abbildung $\tau\colon A \to \mathcal{Z}(A)$ mit den folgenden beiden Eigenschaften.*

(1) Die Abbildung τ ist eine Spur, d. h. sie ist $\mathbb{C}$-linear und

$$\forall a \in A, a \geq 0\colon \tau(a) \geq 0 \qquad \forall a, b \in A\colon \tau(ab) = \tau(ba)$$

(2) Für alle $a \in \mathcal{Z}(A)$ gilt $\tau(a) = a$.

Beweis. Siehe z. B. [KR97b, Th. 8.2.8]. □

Lemma 24. *Seien p und q Projektionen in der endlichen Von-Neumann-Algebra A. Dann gilt*

$$p \sim q \quad \Leftrightarrow \quad \tau(p) = \tau(q).$$

Beweis. Siehe z. B. [KR97b, Th. 8.4.3 (vi)]. □

Literatur

[Dix81] Dixmier, Jacques: *Von Neumann Algebras*. 2. Auflage. Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1981 (North-Holland Mathematical Library 27)

[KR97a] Kadison, Richard V. ; Ringrose, John R.: *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras – Volume I: Elementary Theory*. Providence, RI : American Mathematical Society, 1997 (Graduate Studies in Mathematics 15). – 2. Druck

[KR97b] Kadison, Richard V. ; Ringrose, John R.: *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras – Volume II: Advanced Theory*. Providence, RI : American Mathematical Society, 1997 (Graduate Studies in Mathematics 16). – 2. Druck

[MN36] Murray, F. J. ; Neumann, John von: On Rings of Operators. In: *Annals of Mathematics* 37 (1936), Januar, Nr. 1, S. 116–229

[MN37] Murray, F. J. ; Neumann, John von: On Rings of Operators. II. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 41 (1937), S. 208–248

[MN43] Murray, F. J. ; Neumann, John von: On Rings of Operators. IV. In: *Annals of Mathematics* 44 (1943), Oktober, Nr. 4, S. 716–808

[Neu30] Neumann, John von: Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren. In: *Mathematische Annalen* 102 (1930), S. 370–427

[Neu40] Neumann, John von: On Rings of Operators. III. In: *Annals of Mathematics* 41 (1940), Januar, Nr. 1, S. 94–161

[Neu43] NEUMANN, John von: On some algebraical properties of operator rings. In: *Annals of Mathematics* 44 (1943), Oktober, Nr. 4, S. 709–715

[SZ79] STRĂTILĂ, Șerban ; ZSIDÓ, László: *Lectures on Von Neumann algebras*. Tunbridge Wells, Kent : Abacus Press, 1979

[Tak02] TAKESAKI, Masamichi ; CUNTZ, Joachim J. C. (Hrsg.) ; JONES, Vaughan F. R. (Hrsg.): *Theory of Operator Algebras I*. Berlin : Springer-Verlag, 2002 (Encyclopaedia of Mathematical Sciences 124)

[Tak03a] TAKESAKI, Masamichi ; CUNTZ, Joachim J. C. (Hrsg.) ; JONES, Vaughan F. R. (Hrsg.): *Theory of Operator Algebras II*. Berlin : Springer-Verlag, 2003 (Encyclopaedia of Mathematical Sciences 125)

[Tak03b] TAKESAKI, Masamichi ; CUNTZ, Joachim J. C. (Hrsg.) ; JONES, Vaughan F. R. (Hrsg.): *Theory of Operator Algebras III*. Berlin : Springer-Verlag, 2003 (Encyclopaedia of Mathematical Sciences 127)