Seminarvortrag

Algebraische K-Theorie von Von-Neumann-Algebren

Algebraic K-Theory of von Neumann Algebras

Benedikt Plitt

28. Juli 2004

The algebraic K-groups K_0 and K_1 of a von Neumann algebra are computed in terms of its center. Also, the so-called weak K-group K_1^w is examined and its use concerning Reidemeister-von Neumann torsion as well as its relation to the Whitehead group are shortly explained. Finally, some conjectures are stated.

Einleitung

In diesem Vortrag soll die Berechnung der algebraischen K-Gruppen K_0 und K_1 einer Von-Neumann-Algebra bestimmt werden. Für K_0 folgt die Darstellung [Lüc02, Sec. 9.2.1], die Bestimmung von K_1 ist wesentlich aufwändiger und wird in [LR93] durchgeführt. Hier werden nur die Ergebnisse angegeben und einige wichtige Details aus den Beweisen präsentiert.

Des Weiteren werden die schwachen K-Gruppen eingeführt und berechnet. Diese sind relevant als Wertebereich der Reidemeister-Von-Neumann-Torsion, einer Invarianten für gewisse Operationen von diskreten Gruppen auf riemannschen Mannigfaltigkeiten. Sie wurde in [LR91] eingeführt. In diesem Vortrag wird auch ein Zusammenhang zur Whitehead-Gruppe hergestellt.

Als Ausblick werden am Ende noch Vermutungen über K_1 für nicht notwendigerweise abzählbar zerlegbare Von-Neumann-Algebren und einen Zusammenhang zur topologischen K-Theorie präsentiert.

1 Vorbereitungen

Definition 1. Sei A ein Ring und $B \in M_n(A)$ eine Matrix. Es bezeichne $R_B \colon A^n \to A^n$ die Abbildung, die durch die Multiplikation mit B von rechts definiert ist. Es heiße B *ri*, falls R_B injektiv ist.

Definition 2 (Logarithmus auf S^1). Man betrachte $S^1 \subset \mathbb{C}$. Der Hauptzweig $\log \colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{C}$ definiert eine Funktionenklasse $\log \in L^\infty(S^1)$. Diese Klasse sei ebenfalls mit *Logarithmus* bezeichnet.

Lemma 3 (Spektren Unitärer und Positiver). *Sei A eine Von-Neumann-Algebra und $u \in A$ unitär. Dann gilt $\sigma(u) \subset S^1$. Ist $p \in A$ positiv, so gilt $\sigma(p) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$.*

Definition 4. Eine Von-Neumann-Algebra A heißt *abzählbar zerlegbar*, wenn jede Familie von paarweise orthogonalen nichtverschwindenden Unterprojektionen von id_A abzählbar ist.

2 Die Gruppe K_0

Das wichtigste Werkzeug zur Bestimmung von K_0 einer endlichen Von-Neumann-Algebra ist die zentrumswertige Dimension, welche eine universelle Dimensionsfunktion ist. Bei unendlichen Von-Neumann-Algebren wird benutzt, dass jede echt unendliche Projektion auf einen Modul projiziert, der in K-Theorie verschwindet.

Definition 5 (zentrumswertige Dimension). Sei A eine endliche Von-Neumann-Algebra mit zentrumswertiger Spur τ und P ein endlich erzeugter A-Modul. Für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ sei ferner $M \in M_n(A)$, $M = (m_{i,j})_{i,j}$, eine idempotente Matrix mit $\operatorname{im} R_M \cong P$. Die *zentrumswertige Dimension* von P ist definiert als

$$\Delta(P) := \sum_{i=1}^{n} \tau(a_{i,i}) \in \mathcal{Z}(A)_{sa} = \{a \in \mathcal{Z}(A) | a = a^*\}.$$

Bemerkung 6. Die Matrix M kann selbstadjungiert gewählt werden, wird dann also zu einer Projektion in der Von-Neumann-Algebra $M_n(A)$ (s. [Lüc02, Th. 6.24]). Da eine (selbstadjungierte) Projektion stets postiv ist und die zentrumswertige Spur eine positive Abbildung ist, ist der Wert der zentrumswertigen Dimension stets positiv und damit insbesondere selbstadjungiert. Für die zentrumswertige Spur von $M_n(A)$ gilt dann (mit $\mathcal{Z}(M_n(A)) \cong \mathcal{Z}(A)$, s. [SZ79, Sec. 3.16])

$$n \cdot \tau_{M_n(A)}(M) = \Delta(P).$$

Die Wohldefiniertheit von Δ folgt aus [Lüc02, 6.4].

Lemma 7. *Seien P und Q endlich erzeugte projektive A-Moduln. Dann gilt*

$$\Delta(P \oplus Q) = \Delta(P) + \Delta(Q).$$

Beweis. Seien M_P bzw. M_Q Matrizen über A, so dass die Bilder von R_{M_P} bzw. R_{M_Q} isomorph zu P bzw. Q sind. Dann gilt mit $M = \begin{pmatrix} M_P & 0 \\ 0 & M_Q \end{pmatrix}$, dass das Bild von R_M isomorph zu $P \oplus Q$ ist. Mit der Additivität der zentrumswertigen Spur folgt die Behauptung. □

Satz 8 (K_0 für endliche Von-Neumann-Algebren). *Sei A eine endliche Von-Neumann-Algebra. Dann induziert die zentrumswertige Dimension einen Monomorphismus*

$$\Delta \colon K_0(A) \hookrightarrow \mathcal{Z}(A)_{sa},$$

der ein Isomorphismus ist, falls A vom Typ II_1 ist.

Beweis. Seien P und Q endlich erzeugte projektive A-Moduln. Dann gilt $[P] = [Q] \in K_0(A)$ genau dann, wenn P und Q stabil isomorph sind (s. [Mil71, p. 3]), es also einen endlich erzeugten projektiven A-Modul V mit $P \oplus V \cong Q \oplus V$ gibt. Nach Lemma 7 und der Eigenschaft, dass zwei Projektionen genau dann äquivalent sind, wenn ihre zentrumswertige Dimension übereinstimmt ([KR97, Th. 8.4.3 (vi)]), ist dies genau dann der Fall, wenn $\Delta(P) = \Delta(Q)$ gilt. Damit ist die Injektivität von Δ gezeigt.

Nach [KR97, Th. 8.4.4 (ii)] besteht das Bild der Dimensionsfunktion einer Von-Neumann-Algebra vom Typ II_1 genau aus den positiven Operatoren in der abgeschlossenen Einheitskugel ihres Zentrums. Mit Bemerkung 6 folgt, dass sämtliche positiven Operatoren von A im Bild von Δ liegen. Da die Grothendieck-Gruppe von $\mathcal{Z}(A)^+$ gerade aus den selbstadjungierten Elementen von $\mathcal{Z}(A)$ besteht (dies folgt z. B. aus [Ped95, Prop. 4.4.9]), ist die Surjektivität von Δ gezeigt. □

Bemerkung 9. Auch für Von-Neumann-Algebren vom Typ I_f läßt sich das Bild von Δ genau bestimmen, s. dazu z. B. [KR97, Th. 8.4.4 (i)].

Lemma 10. *Sei A eine Von-Neumann-Algebra und $p \in A$ eine echt unendliche Projektion. Dann gilt*

$$[\mathrm{im}(p)] = 0 \in K_0(A).$$

Beweis. Nach dem Halbierungslemma gibt es eine Projektion $q \in A$ mit $q \leq p$ und $q \sim p - q \sim p$. Da äquivalente Projektionen isomorphe Bilder haben, gilt $\mathrm{im}(p) \cong \mathrm{im}(p-q) \oplus \mathrm{im}(q)$, also in $K_0(A)$

$$\begin{aligned} & [\mathrm{im}(p)] = [\mathrm{im}(q)] + [\mathrm{im}(p-q)] = [\mathrm{im}(p)] + [\mathrm{im}(p)] \\ \Longrightarrow\ & [im(p)] = 0 \in K_0(A). \end{aligned}$$

□

Satz 11 (K_0 für unendliche Von-Neumann-Algebren). *Sei A eine echt unendliche Von-Neumann-Algebra. Dann verschwindet $K_0(A)$.*

Beweis. Sei P ein endlich erzeugter projektiver A-Modul und $p \in M_n(A)$ eine Projektion mit $\mathrm{im}(p) \cong P$. Es bezeichne $1_{n+1} \in M_{n+1}(A)$ die Einheitsmatrix. Es gilt $\mathcal{Z}(M_{n+1}(A)) = \mathcal{Z}(A) \cdot 1_{n+1}$. Jede zentrale Projektion $c \in M_{n+1}(A)$ mit $c(p \oplus 1_A) \neq 0$ läßt sich also als $q \cdot 1_{n+1}$ mit einer nichtverschwindenden zentralen Projektion q auf A darstellen. Da A echt unendlich ist, ist q eine unendliche Projektion, also auch c ([KR97, Th. 6.3.8]); somit ist $p \oplus 1_A$ eine echt unendliche Projektion, insbesondere gilt nach Lemma 10: $[\mathrm{im}(p \oplus 1_A)] = 0 \in K_0(M_n(A))$.

Das Inverse des Morita-Isomorphismus (s. [Ros94, Th. 1.2.4]) $\mu \colon K_0(A) \longrightarrow K_0(M_{n+1}(A))$ bildet eine Klasse $[Q]$ auf die Klasse $[A^{n+1} \otimes_{M_{n+1}(A)} Q]$ ab. Somit gilt $\mu^{-1}([\mathrm{im}(p \oplus 1_A)]) = [\mathrm{im}(p) \oplus \mathrm{im}(1_A)] = [P] + [A]$. Nach Lemma 10 verschwinden echt unendliche Projektionen in K_0 und es gilt

$$[P] = \mu^{-1}([\mathrm{im}(p \oplus 1_A)]) - [A] = 0 - 0 = 0 \in K_0(A).$$

□

Korollar 12. *Für die K_0-Gruppe einer Von-Neumann-Algebra A gilt nach dem Satz über die Typzerlegung*

$$K_0(A) \cong K_0(A_{I_f}) \oplus \mathcal{Z}(A_{II_1})_{sa}.$$

3 Determinanten

Definition 13 (normalisierte Determinante). Sei A eine Von-Neumann-Algebra vom Typ I_n. Für $f \in \mathcal{Z}(A)$ sei $\eta_n(f) = up^{\frac{1}{n}} \in \mathcal{Z}(A)$, wobei $f = up$ die Polarzerlegung von f mit unitärem u und positivem p sei. Sei $\det \colon M_k(A) = M_{kn}(\mathcal{Z}(A)) \to \mathcal{Z}(A)$ die gewöhnliche Determinante. Definiere $\det_n = \eta_n \circ \det$.

Sei B eine Von-Neumann-Algebra vom Typ I_f. Dann ist die *normalisierte Determinante*

$$\det_{\mathrm{norm}} \colon M_k(B) \longrightarrow \mathcal{Z}(B)$$

durch das Produkt der einzelnen $\det_n$ auf den Komponenten vom Typ I_n definiert.

Definition 14 (Fuglede-Kadison-Determinante ([FK52])). Sei A eine Von-Neumann-Algebra vom Typ II_1. Man setze die zentrumswertige Spur $\tau \colon A \to \mathcal{Z}(A)$ auf $M_n(A)$ fort und definiere die *Fuglede-Kadison-Determinante*

$$det_{fk} \colon Gl_n(A) \to \mathcal{Z}(A)^{\times,+}$$

durch

$$det_{fk}(M) = \exp\left(\frac{1}{2}\tau(\log(M^*M))\right).$$

4 Die Gruppen K_1 und K_1^w

4.1 Die Gruppe K_1

Wichtig für die Bestimmung von K_1 für endliche Von-Neumann-Algebren sind die Determinanten aus dem vorigen Abschnitt. Sie induzieren jeweils Isomorphismen auf Teile des Zentrums der Algebra. Im unendlichen Fall werden nur die abzählbar zerlegbaren Von-Neumann-Algebren behandelt. In ihnen kann man zeigen, dass ein Automorphismus eines Moduls nur auf einem unendlich kleinen Teil von der Identität verschieden ist und damit in K_1 verschwindet.

Satz 15 (K_1 für Von-Neumann-Algebren vom Typ $\mathbf{I}_f$). *Die normalisierte Determinante induziert für eine Von-Neumann-Algebra A vom Typ I_f einen Isomorphismus*

$$\det{}_{\text{norm}}\colon K_1(A) \longrightarrow \mathcal{Z}(A)^\times.$$

Beweis. Es gibt einen lokalkompakten Raum X mit einem Borelmaß μ, für den $L^\infty(X) \cong Z(A)$ gilt. Sei $T \in M_n(L^\infty(X))$ mit $\det_{\text{norm}}(T) = 1$. Nach [LR93, Lemma 2.2] kann man annehmen, dass T diagonal und entweder positiv oder unitär ist. Seien $t_1, t_2, \ldots, t_n$ die Diagonaleinträge und sei

$$A = \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_1 t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \prod_{j=1}^n t_j \end{pmatrix}.$$

Sei U die Matrix, die den Rechtsshift darstellt; A und U sind unitär mit $T = AUA^{-1}U^*$. Ist T positiv, so kann man ebenfalls eine invertierbare Matrix A und eine unitäre Matrix U mit $T = AUA^{-1}U^*$ finden (s. [LR93, Prop. 2.4]).

In jedem Fall erfüllt A außerdem die Bedingungen $\|A\| \leq \|T\|$ und $\|A^{-1}\| \leq \|T^{-1}\|$. Diese Bedingungen garantieren, dass A auch ein Element in einem unendlichen Produkt von Von-Neumann-Algebren sein kann. Damit gilt

$$T = [A, U].$$

Man kann zeigen, dass sich jedes beliebige T als Produkt von zwei Kommutatoren schreiben lässt. □

Lemma 16. *Sei A eine abzählbar zerlegbare Von-Neumann-Algebra ohne einen Anteil vom Typ I und M eine maximal abelsche Unteralgebra. Dann gibt es eine Projektion $P \in M$ mit $P \sim 1 - P$.*

Beweis. Dieses Lemma folgt aus [KR92, 6.9.28]. □

Lemma 17. *Sei A eine abzählbar zerlegbare Von-Neumann-Algebra, die entweder vom Typ II_1 oder rein unendlich ist und $T \in A$.*

(1) *Ist T normal, so gibt es eine Projektion $P \in A$ mit $PT = TP$ und $P \sim 1 - P$ sowie Elemente $T_1, T_2 \in A$ mit $T = T_1T_2$ und*

$$T_1 = PT_1P + (1 - P), \quad T_2 = (1 - P)T_2(1 - P) + P.$$

Ist T positiv, unitär, invertierbar, oder ri, so gilt dasselbe für T_1 und T_2.

(2) *Ist T positiv und invertierbar mit $\det_{fk}(T) = 1$, so gibt es invertierbare positive $T_1, T_2 \in A$, invertierbare $a, b \in A$ und eine Projektion $P \in A$, die mit T kommutiert und $P \sim 1 - P$ erfüllt, so dass*

$$\begin{aligned} T &= T_1T_2ABA^{-1}B^{-1} \\ T_1 &= PT_1P + (1 - P) \\ T_2 &= (1 - P)T_2(1 - P) + P \\ \det{}_{fk}(T_1) = \det{}_{fk}(T_2) &= 1 \end{aligned}$$

Beweis. Den Beweis findet man in [LR93, Lemma. 3.5]. □

Satz 18 (K_1 für Von-Neumann-Algebren vom Typ II$_1$). *Sei A eine Von-Neumann-Algebra vom Typ II$_1$. Dann induziert die Fuglede-Kadison-Determinante einen Isomorphismus*

$$\det{}_{fk} \colon K_1(A) \longrightarrow \mathcal{Z}(A)^{\times,+}.$$

Beweis. Der vollständige, recht lange und teilweise sehr technische, Beweis findet sich in [LR93, Sec. 3]. Dort wird gezeigt, dass jedes positive und invertierbare T mit $\det_{fk}(T) = 1$ das Produkt von neun Kommutatoren ist. □

Lemma 19. *Sei A eine Von-Neumann-Algebra und $T \in A$ invertierbar. Gibt es eine Folge paarweise orthogonaler Projektionen $P_1, P_2, \ldots$ mit*

$$\forall n \colon P_n \sim P_{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1, \quad T = P_1TP_1 + (1 - P_1),$$

so gilt $[T] = 0 \in K_1(A)$.

Satz 20 (K_1 für unendliche Von-Neumann-Algebren). *Sei A eine abzählbar zerlegbare echt unendliche Von-Neumann-Algebra. Dann gilt*

$$K_1(A) = 0.$$

Beweis. Sei $[T] \in K_1(A)$. Nach Lemma 17 kann T als invertierbar angenommen werden. Ferner gibt es eine Projektion P mit $P \sim 1 - P$ und

$$T = PTP + (1 - P).$$

Da $1 - P$ echt unendlich ist, gibt es nach dem Halbierungslemma für $P_1 := P$ eine Folge von Projektionen mit

$$\forall n \colon P_n \sim P_{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1, \quad T = P_1TP_1 + (1 - P_1).$$

Mit Lemma 19 folgt die Behauptung. □

4.2 Die schwache K-Gruppe K_1^w

Die schwachen K-Gruppen werden wie die gewöhnlichen definiert, mit dem einzigen Unterschied, dass in der Definition Automorphismen durch injektive Endomorphismen ersetzt werden. Diese entsprechen bei Moduln über Von-Neumann-Algebren gerade den schwachen Isomorphismen.

Diese Gruppen wurden in [LR91] benutzt, um die Reidemeister-Von-Neumann-Torsion einzuführen, deren Werte dort liegen. Dies ist eine verfeinerte Invariante für kokompakte echt unstetige Operationen von diskreten Gruppen als Isometrien einer riemannschen Mannigfaltigkeit, die das Alexander-Polynom und die äquivariante Reidemeister-Torsion umfasst.

Definition 21 (schwache K-Gruppen). Sei A eine Von-Neumann-Algebra. Die *schwache K-Gruppe* $K_1(A)$ ist definiert als die Gruppe der Konjugationsklassen von injektiven Endomorphismen von endlich erzeugten freien R-Moduln, die folgenden Relationen genügen.

- Es ist $[f] + [h] = [g]$ genau dann, wenn es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & W \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "i"] & V \arrow[r, "p"] & W \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

  mit exakten Zeilen gibt.

- Es gilt $[gf] = [f] + [g]$ für alle $f, g \colon U \to U$.

- Es gilt $[\mathrm{id}_U] = 0$.

Satz 22 (K_1^w für Von-Neumann-Algebren). *Sei A eine Von-Neumann-Algebra.*

(1) Ist A vom Typ I_f, so induziert die normalisierte Determinante einen Isomorphismus

$$\det_{\mathrm{norm}} \colon K_1^w(A) \longrightarrow \mathcal{Z}(A)^w = \mathcal{G}(\{a \in \mathcal{Z}(A) | a \ ri\}).$$

(2) Ist A vom Typ II_1, so gilt

$$K_1^w(A) = 0.$$

(3) Ist A abzählbar zerlegbar und echt unendlich, so gilt ebenfalls

$$K_1^w(A) = 0.$$

Beweis.

(1) Dies geht analog zum Beweis von Satz 15. Details findet man in [LR93, Sec. 2].

(2) Dies geht ähnlich wie der Beweis für K_1. Ein Unterschied ist, dass man mit injektiven Abbildungen keine Kommutatoren bilden kann, was zu einer Umformulierung vieler Gleichungen führt. Ferner ist der positive Teil der Polarzerlegung eines injektiven Operators injektiv und kann daher bereits als Produkt von Kommutatoren geschrieben werden (s. [LR93, Prop. 3.9 (3)]).

(3) Dies folgt aus [LR93, Th. 4.2].

□

Satz 23. *Sei G eine diskrete Gruppe und* $\mathrm{Wh}'(G) := \mathrm{Wh}(G)/\mathrm{Torsion}$. *Ist $H \subset G$ ein endlicher Normalteiler, so ist die von der Induktion induzierte Abbildung*

$$\mathrm{Wh}'(H)^G \longrightarrow \mathrm{Wh}'(G)$$

injektiv.

Beweis. Dies wird in [LR93, Th. 5.1] bewiesen. □

5 Einige Vermutungen

Die Gruppen K_1 und K_1^w wurden bisher nur für abzählbar zerlegbare Von-Neumann-Algebren bestimmt. Diese Bedingung wird nur in Lemma 16 benötigt. Daher liege folgende Vermutungen nahe.

Vermutung 24. *Sei A eine echt unendliche Von-Neumann-Algebra. Dann gilt*

$$K_1(A) = K_1^w(A) = 0.$$

Vermutung 25. *Sei A eine Von-Neumann-Algebra vom Typ II_1. Dann verschwindet $K_1^w(A)$ und die Fuglede-Kadison-Determinante induziert einen Isomorphismus $K_1(A) \cong \mathcal{Z}(A)^{\times,+}$.*

Ein Satz von Suslin und Wodzicki ([SW90]) besagt, dass für stabile C*-Algebren die algebraische K-Theorie mit der topologischen übereinstimmt. Darauf gründet die folgende Vermutung.

Vermutung 26 (A. Thom). *Sei N der fast-endlichdimensionale II_1-Faktor und A eine Von-Neumann-Algebra. Dann gilt*

$$K_*(A \bar{\otimes} N) \cong K^*(A \bar{\otimes} N).$$

Literatur

[FK52] FUGLEDE, Bent ; KADISON, Richard V.: Determinant theory in finite factors. In: *Annals of Mathematics* 55 (1952), Mai, Nr. 3, S. 520–530

[KR92] KADISON, Richard V. ; RINGROSE, John R.: *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras – Volume IV – Special Topics: Advanced Theory – An Exercise approach*. Boston : Birkhäuser, 1992

[KR97] KADISON, Richard V. ; RINGROSE, John R.: *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras – Volume II: Advanced Theory*. Providence, RI : American Mathematical Society, 1997 (Graduate Studies in Mathematics 16). – 2. Druck

[Lüc02] LÜCK, Wolfgang: *L^2-Invariants: Theory and Applications to Geometry and K-Theory*. Berlin : Springer-Verlag, 2002 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Folge 3 Band 44)

[LR91] LÜCK, Wolfgang ; ROTHENBERG, Mel: Reidemeister torsion and the K-theory of von Neumann algebras. In: *K-Theory* 5 (1991), Nr. 3, S. 213–264

[LR93] LÜCK, Wolfgang ; RØRDAM, Mikael: Algebraic K-Theory of von Neumann Algebras. In: *K-Theory* 7 (1993), Nr. 6, S. 517–536

[Mil71] MILNOR, John W.: *Introduction to Algebraic K-Theory*. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1971

[Ped95] PEDERSEN, Gert K.: *Analysis Now*. New York : Springer-Verlag, 1995 (Graduate Texts in Mathematics 118). – Korrigierter 2. Druck

[Ros94] ROSENBERG, Jonathan: *Algebraic K-Theory and Its Applications*. New York : Springer-Verlag, 1994 (Graduate Texts in Mathematics 147)

[SW90] SUSLIN, Andrei A. ; WODZICKI, Mariusz: Excision in algebraic K-theory and Karoubi's conjecture. In: *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 87 (1990), Dezember, Nr. 24, S. 9582–9584

[SZ79] STRĂTILĂ, Șerban ; ZSIDÓ, László: *Lectures on Von Neumann algebras*. Tunbridge Wells, Kent : Abacus Press, 1979