Seminarvortrag

Clifford-Moduln

Benedikt Plitt und Michael Weiermann

21. & 28. April, 3. Mai 2004

Wir definieren Clifford-Algebren und die Gruppen Pin und Spin. Anschließend führen wir Clifford-Moduln ein, untersuchen ihre Struktur und definieren mit ihrer Hilfe die Algebra A_*. Mit der Differenzbündel-Konstruktion präsentieren wir einen alternativen Zugang zur relativen K-Theorie. Zu guter Letzt erklären wir noch Clifford-Bündel und Spin-Strukturen und beweisen ein Analogon zum Thom-Isomorphismus.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Dieser Vortrag orientiert sich im Wesentlichen an dem Artikel von Atiyah, Bott und Shapiro [ABS64], in dem die KO-Theorie von reellen Vektorbündeln mit Hilfe von Clifford-Algebren und Spinoren untersucht wird. Wir beginnen in Abschnitt 1 mit der Einführung der grundlegenden Objekte, nämlich Clifford-

Algebren und Spin-Gruppen. Weiterhin berechnen wir dort die reellen und komplexen Clifford-Algebren.

In Abschnitt 2 definieren wir Clifford-Moduln und geben eine Verknüpfung an, durch welche die Menge der Clifford-Moduln über einer Clifford-Algebra zu einem Ring wird. Außerdem erklären wir die Algebra der reellen und die der komplexen Clifford-Moduln.

Der Abschnitt 3 stellt mit der Differenzbündelkonstruktion und verallgemeinerten Euler-Charakteristiken einen alternativen Zugang zur relativen K-Theorie vor, die der ursprünglichen Definition von Grothendieck für K-Theorie in [Gro71] ähnelt.

Wir betrachten außerdem noch in Abschnitt 4 den Thom-Komplex eines Vektorraumbündels, in Abschnitt 5 die Spin-Orientierung auf der reellen K-Theorie und schließlich in Abschnitt 6 noch geometrische Anwendungen. Über diese drei Abschnitte wird Michael Weiermann referieren, daher sind sie in dieser Ausarbeitung sehr stark verkürzt. Eine ausführliche Ausarbeitung wird Michael Weiermann zur Verfügung stellen.

1 Clifford-Algebren und Spin-Gruppen

In diesem Abschnitt werden die nötigen Objekte, nämlich Clifford-Algebren und -Gruppen und die Gruppen Pin und Spin, sowie einige Abbildungen zwischen ihnen eingeführt. Außerdem werden die grundlegenden Eigenschaften festgehalten. Einige zusätzliche und ausführlichere Informationen findet man in [Hus94, Kap. 12].

1.1 Allgemeine Clifford-Algebren

Definition 1. Sei K ein Körper und E ein K-Vektorraum. Die *Tensoralgebra* über E ist die graduierte Algebra

$$T(E) = \sum_{i=0}^{\infty} T^i E = \sum_{i=0}^{\infty} E^{\otimes i} = K \oplus E \oplus (E \otimes E) \oplus \cdots$$

mit der Verknüpfung

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \bigotimes_{j=1}^{i} x_{ij} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \bigotimes_{l=1}^{k} y_{kl} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} (-1)^{ij} a_i b_j \bigotimes_{l=1}^{i} x_{il} \otimes \bigotimes_{l=1}^{j} y_{jl}.$$

Ist $Q \colon E \to K$ eine quadratische Form, so sei $I(Q)$ das zweiseitige Ideal

$$I(Q) = (\{x \otimes x - Q(x) \cdot 1 | x \in T(E)\})$$

in $T(E)$. Wir definieren die *Clifford-Algebra* von Q als

$$C(Q) = T(E)/I(Q)$$

mit der kanonischen Inklusionsabbildung (siehe Proposition 2.1)

$$i_Q \colon E \hookrightarrow T(E) \twoheadrightarrow C(Q).$$

Proposition 2. *Clifford-Algebren haben folgende Eigenschaften.*

(1) Die Abbildung $i_Q \colon E \to C(Q)$ ist injektiv.

(2) Ist A eine unitale K-Algebra und $\phi \colon E \to A$ eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft

$$\forall x \in E \colon \phi(x)^2 = Q(x) \cdot 1,$$

so existiert genau ein Algebrenhomomorphismus $\widetilde{\phi} \colon C(Q) \to B$, so dass $\widetilde{\phi} \circ i_Q = \phi$ gilt. Die Algebra $C(Q)$ ist also die universelle Algebra bezüglich solcher Homomorphismen (beachte auch [Hus94, Satz 12.4.2]). Die Abbildung $\widetilde{\phi}$ heißt Erweiterung *von ϕ.*

(3) Mit Hilfe der kanonischen Projektion $\pi \colon T(E) \to C(Q)$ erhält man eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Graduierung auf $C(Q)$ durch

$$C^0(Q) = \pi\left(\sum_{i=0}^{\infty} T^{2i}(E)\right), \qquad C^1(Q) = \pi\left(\sum_{i=0}^{\infty} T^{2i+1}(E)\right).$$

(4) Sei $F^qT(E) = \sum_{i \le q} T^iE$ die Filtrierung von $T(E)$. Sie induziert eine Filtrierung auf $C(Q)$, so dass die entstehende graduierte Algebra isomorph zur äußeren Algebra ΛE ist. Also gilt $\dim_K C(Q) = 2^{\dim E}$ und für eine Basis $\{e_i\}_{1 \le i \le n}$ von E bildet $1 \in K$ zusammen mit den Produkten der Form

$$e_{i_1} \cdot e_{i_2} \cdot \dots \cdot e_{i_k}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k$$

eine Basis von $C(Q)$.

Definition 3. Mit $\widehat{\otimes}$ sei das graduierte Tensorprodukt von graduierten Algebren bezeichnet, d. i. für zwei graduierte Algebren A und B die graduierte Algebra, die durch

$$(A \widehat{\otimes} B)^k = \sum_{i+j=k} A^i \otimes B^j$$

gegeben ist.

Die Graduierung auf $C(Q)$ ist „natürlich“ in folgendem Sinne.

Proposition 4. *Sei $E = E_1 \oplus E_2$ eine orthogonale Zerlegung von E bezüglich Q. Bezeichnet Q_1 die Einschränkung von Q auf E_1 und Q_2 diejenige auf E_2, so gibt es einen Isomorphismus*

$$\psi \colon C(Q) \xrightarrow{\cong} C(Q_1) \widehat{\otimes}_K C(Q_2)$$

von graduierten K-Algebren.

Beweis. Siehe [Hus94, Satz 12.4.7]. □

Definition 5.

(1) Die *Transposition* auf $C(Q)$ sei die Erweiterung des Antiautomorphismusses von $T(E)$, der durch

$$T^k(E) \to T^k(E), \qquad x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_k \mapsto x_k \otimes \cdots \otimes x_2 \otimes x_1$$

gegeben ist. Das Transponierte von $x \in C(Q)$ sei mit x^t bezeichnet.

(2) Der *kanonische Automorphismus* α von $C(Q)$ sei die Erweiterung der Abbildung

$$E \to C(Q), \qquad x \mapsto -i_Q(x).$$

(3) Mit *Querung* sei der durch $x \mapsto \bar{x} := \alpha(x^t)$ gegebene Antiautomorphismus von $C(Q)$ bezeichnet.

Bemerkung 6.

(1) Es gilt

$$\alpha(x^t) = (\alpha(x))^t$$

(2) Die Graduierung von $C(Q)$ kann auch mit Hilfe von α definiert werden, und zwar folgendermaßen.

$$C^0(Q) = \{x \in C(Q) | \alpha(x) = x\}, \qquad C^1(Q) = \{x \in C(Q) | \alpha(x) = -x\}$$

1.2 Reelle Clifford-Algebren

Definition 7. Für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei $Q_k \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$Q_k(x_1, \ldots, x_k) = -\sum_{i=1}^{k} x_i^2.$$

Die Algebra C_k sei die Clifford-Algebra $C(Q_k)$ und es sei $C_0 = \mathbb{R}$. Wir identifizieren im Folgenden $\mathbb{R}^k$ bzw. $\mathbb{R}$ mit $i_{Q_k}(\mathbb{R}^k) \subset C_k$ bzw. $\mathbb{R} \cdot 1 \subset C_k$.

Proposition 8. *Die Algebra C_1 ist als $\mathbb{R}$-Algebra isomorph zu $\mathbb{C}$ und es gilt*

$$C_k \cong \underbrace{C_1 \widehat{\otimes} C_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} C_1}_{k \text{ Faktoren}}$$

Beweis. Wiederholte Anwendung von Proposition 4. □

Korollar 9. *Für $i = 1, \dots, k$ sei e_i das i-te Element der Standard-Basis von $\mathbb{R}^k \subset C_k$. Diese Elemente erfüllen die Relationen*

$$\forall i\colon e_i^2 = -1 \qquad \text{und} \qquad \forall i \neq j\colon e_i e_j + e_j e_i = 0 \tag{10}$$

und erzeugen C_k multiplikativ. Man kann C_k mit der universellen $\mathbb{R}$-Algebra, die von einer Eins 1 und den Symbolen e_i für $i = 1, \dots, k$ mit den Relationen (10) erzeugt wird, identifizieren.

Notation 11. Im Folgenden bezeichne $\mathbb{F}$ einen beliebigen der Schiefkörper $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$. Außerdem stehe $\mathbb{F}(n)$ für die Matrix-Algebra $M_{n\times n}(\mathbb{F})$.

Proposition 12. *Es existieren kanonische Isomorphismen*

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}(n) &\cong \mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{F},\\
\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(m) &\cong \mathbb{R}(mn),\\
\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &\cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C},\\
\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &\cong \mathbb{C}(2),\\
\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} &\cong \mathbb{R}(4).
\end{aligned}$$

Definition 13. Für $k \geq 1$ sei C'_k die universelle $\mathbb{R}$-Algebra, die von einem neutralen Element 1 und Symbolen e'_i $(i = 1, \dots, k)$ erzeugt wird und in der die Relationen

$$(e'_i)^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad \forall i \neq j\colon e'_i e'_j + e'_j e'_i = 0$$

gelten. (Diese Algebra kann man mit $C(-Q_k)$ identifizieren.)

Proposition 14. *Es gibt Isomorphismen*

$$C'_{k+2} \xrightarrow{\cong} C_k \otimes_{\mathbb{R}} C'_2 \qquad \text{und} \qquad C_{k+2} \xrightarrow{\cong} C'_k \otimes_{\mathbb{R}} C_2.$$

Beweis. Sei $\mathbb{R}'^k$ der von den e'_i in C'_k aufgespannt Unterraum. Weiterhin sei die lineare Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{R}'^{k+2} \to C_k \otimes C'_2, \qquad \psi(e'_i) = \begin{cases} e_{i-2} \otimes e'_1 e'_2 & 2 \leq i \leq k \\ 1 \otimes e'_i & 1 \leq i \leq 2 \end{cases}$$

gegeben. Sie erfüllt die universelle Eigenschaft und kann so zu einem Homomorphismus $\widetilde{\psi}\colon C'_{k+2} \to C_k \otimes C'_2$ fortgesetzt werden. Da dieser Basiselemente auf Basiselemente abbildet und beide Räume die gleiche Dimension haben, ist er bijektiv. Den zweiten Isomorphismus erhält man, indem man in der Argumentation die gestrichenen mit ungestrichenen Symbolen vertauscht. □

Bemerkung 15. Nach Proposition 9 ist klar, dass

$$C_1 \cong \mathbb{C} \qquad \text{und} \qquad C_2 \cong \mathbb{H}$$

gilt und aus Definition 13 folgt

$$C'_1 \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad C'_2 \cong \mathbb{R}(2),$$

so dass sich mit den Propositionen 12 und 14 die Tabelle 1 ergibt.

k	C_k	C'_k	$C_k \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = C'_k \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$
1	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$
2	$\mathbb{H}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$
3	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$
5	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$
6	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$
7	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$
8	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$

Tabelle 1: Die reellen und komplexen Clifford-Algebren

Bemerkung 16. Nach Proposition 14 erkennt man leicht, dass

$$C_4 \cong C'_4, \qquad C_{k+4} \cong C_k \otimes_{\mathbb{R}} C_4 \qquad \text{und} \qquad C_{k+8} \cong C_k \otimes_{\mathbb{R}} C_8$$

gelten. Da außerdem $C_8 \cong \mathbb{R}(16)$ gilt, gilt für $C_k \cong \mathbb{F}(n)$ die Gleichung $C_{k+8} \cong \mathbb{F}(16n)$; man spricht von der Periodizität mit Periode 8. Im komplexen Fall ist die Periode 2.

1.3 Spin-Gruppen

Definition 17. Die *Clifford-Gruppe* Γ_k sei die Untergruppe von $C_k^\times$, die aus allen Einheiten $x \in C_k^\times$ mit der Eigenschaft

$$\forall y \in \mathbb{R}^k \colon \alpha(x) y x^{-1} \in \mathbb{R}^k$$

besteht.

Proposition 18. *Die Abbildung α erhält ebenso wie die Transpositionsabbildung die Gruppe Γ_k; somit induziert α einen Automorphismus und die Transpositionsabbildung einen Antiautomorphismus auf Γ_k. Die Querung induziert also einen Antiautomorphismus auf Γ_k.*

Definition 19. Die *verschränkt-adjungierte Darstellung* von Γ_k ist der Homomorphismus $\rho \colon \Gamma_k \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^k)$, für den $\rho(x)$ die lineare Abbildung $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ mit $y \mapsto \alpha(x) y x^{-1}$ ist.

Proposition 20. *Es gilt*

$$\ker(\rho \colon \Gamma_k \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^k)) = \mathbb{R}^\times.$$

Definition 21. Sei $N \colon C_k \to C_k$ durch

$$N(x) = x \cdot \bar{x}$$

definiert.

Bemerkung 22. Für $x \in \mathbb{R}^k$ gilt $N(x) = \|x\|^2$.

Proposition 23. *Es gilt* $N(\Gamma_k) \subset \mathbb{R}^\times$.

Proposition 24. *Die Abbildung* $N\colon \Gamma_k \to \mathbb{R}^\times$ *ist ein Homomorphismus und es gilt* $N(\alpha x) = N(x)$.

Proposition 25. *Die Gruppe* $\rho(\Gamma_k)$ *ist eine Untergruppe der Gruppe der Isometrien von* $\mathbb{R}^k$.

Definition 26. Für $k \geq 1$ sei $\mathrm{Pin}(k)$ der Kern von $N\colon \Gamma_k \to \mathbb{R}^\times$.

Satz 27. *Die Sequenz*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Pin}(k) \xrightarrow{\rho|_{\mathrm{Pin}(k)}} O(k) \longrightarrow 1$$

ist exakt, wobei $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *von* $-1 \in \Gamma_k$ *erzeugt wird.*

Beweis. Sei e_1 der erste Standard-Basis-Vektor von $\mathbb{R}^k \subset C_k$. Es gilt $N(e_1) = -e_1 e_1 = 1$ und

$$\rho(e_1) \cdot e_i = \alpha(e_1) e_i e_1^{-1} = \begin{cases} -e_i, & \text{falls} \quad i = 1 \\ e_i, & \text{falls} \quad i \neq 1; \end{cases}$$

also ist $e_1 \in \mathrm{Pin}(k)$ und die Abbildung $\rho(e_1)$ ist die Spiegelung am zu e_1 orthogonalen Unterraum. Da sich dieses Argument auf jede Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^k$ anwenden läßt, folgt, dass die Einheitssphäre $\{x \in \mathbb{R}^k | N(x) = 1\}$ in $\mathrm{Pin}(k)$ liegt und somit alle Spiegelungen von $\mathbb{R}^k$ in $\rho(\mathrm{Pin}(k))$ enthalten sind. Diese Spiegelungen erzeugen $O(k)$ ([Koe97, Abschnitt B.5.5.4]) – ρ ist also surjektiv.

Wegen

$$\ker \rho|_{\mathrm{Pin}(k)} = \ker \rho \cap \ker N = \{\lambda 1 \in C_k | N(\lambda 1) = 1, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

gilt außerdem $\lambda^2 = 1$, also $\lambda = \pm 1$, d. h. $\ker \rho|_{\mathrm{Pin}(k)} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. □

Definition 28. Für $k \geq 1$ sei $\mathrm{Spin}(k)$ die Untergruppe von $\mathrm{Pin}(k)$, die unter ρ auf $SO(k)$ abgebildet wird.

Proposition 29. *Ist*

$$\mathrm{Pin}(k)^0 = \mathrm{Pin}(k) \cap C_k^0 \qquad \textit{und} \qquad \mathrm{Pin}(k)^1 = \mathrm{Pin}(k) \cap C_k^1,$$

so gilt

$$\mathrm{Pin}(k) = \mathrm{Pin}(k)^0 \cup \mathrm{Pin}(k)^1 \qquad \textit{und} \qquad \mathrm{Spin}(k) = \mathrm{Pin}(k)^0.$$

Korollar 30. *Die Gruppe* $\mathrm{Spin}(k)$ *ist für* $k \geq 2$ *zusammenhängend und für* $k \geq 3$ *einfach zusammenhängend.*

Definition 31. Die *komplexe Clifford-Gruppe* Γ_k^c sei die Untergruppe der invertierbaren Elemente $x \in C_k \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, für die

$$\forall y \in \mathbb{R}^k \colon \alpha(x) y x^{-1} \in \mathbb{R}^k$$

gilt.

Bemerkung 32. Die Propositionen 18 bis 25 besitzen komplexe Analoga.

Satz 33. *Sei $U(1)$ die Untergruppe von $C_k \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, die von den Elementen der Form $1 \otimes z$ mit $|z| = 1$ erzeugt wird, und sei für $k \geq 1$ die Gruppe $\mathrm{Pin}^c(k)$ der Kern der Abbildung $N^c \colon \Gamma_k^c \to \mathbb{C}^\times$. Die Sequenz*

$$1 \longrightarrow U(1) \longrightarrow \mathrm{Pin}^c(k) \longrightarrow O(k) \longrightarrow 1 \tag{34}$$

ist exakt.

Korollar 35. *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus*

$$\mathrm{Pin}(k) \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} U(1) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Pin}^c(k).$$

Dabei operiert $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ als $\{\pm 1\}$ auf $\mathrm{Pin}(k)$ und $U(1)$.

Beweis. Durch die Inklusionen $\mathrm{Pin}(k) \hookrightarrow C_k$ und $U(1) \hookrightarrow \mathbb{C}$ wird eine Inklusion

$$\mathrm{Pin}(k) \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} U(1) \hookrightarrow C_k \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

induziert, die durch einen Homomorphismus

$$\psi \colon \mathrm{Pin}(k) \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} U(1) \hookrightarrow \mathrm{Pin}^c(k)$$

faktorisiert. Weiterhin ist die Sequenz

$$1 \longrightarrow U(1) \longrightarrow \mathrm{Pin}(k) \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} U(1) \longrightarrow \mathrm{Pin}(k)/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1 \tag{36}$$

offensichtlicherweise exakt und ψ induziert einen Homomorphismus zwischen exakten Sequenzen (34) und (36). Nach dem 5er-Lemma in Verbindung mit Satz 27 ist ψ ein Isomorphismus. □

Definition 37. Die Gruppe $\mathrm{Spin}^c(k)$ sei das Urbild von $SO(k)$ unter

$$\rho^c \colon \mathrm{Pin}^c(k) \to O(k).$$

Bemerkung 38. Nach Korollar 35 gilt

$$\mathrm{Spin}^c(k) \cong \mathrm{Spin} \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} U(1).$$

Bemerkung 39. Während der natürliche Homomorphismus

$$j\colon U(k) \to SO(2k)$$

sich nicht auf Spin$(2k)$ liften läßt, kann man den Homomorphismus

$$l\colon U(k) \to SO(2k) \times U(1), \qquad l(T) = j(T) \times \det T$$

zu $\widetilde{l}\colon U(k) \to \mathrm{Spin}^c(2k)$ liften.

Ist $T \in U(k)$ bezüglich einer Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^k$ von der Form

$$\begin{pmatrix} \exp it_1 & & & \\ & \exp it_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp it_k \end{pmatrix},$$

so gilt bezüglich der entsprechenden Basis $\{e_i\}$ von $\mathbb{R}^{2k}$ die Formel

$$\widetilde{l}(T) = \prod_{j=1}^{k} \left(\cos \frac{t_j}{2} + \sin \frac{t_j}{2} \cdot e_{2j-1} e_{2j} \right) \times \exp \frac{i \sum t_j}{2}.$$

2 Clifford-Moduln

Wir definieren und untersuchen Clifford-Moduln und konstruieren die Algebren A_* und A_*^c, die im zweiten Teil des Vortrags wesentlich werden. Außerdem bestimmen wir die konkrete Struktur dieser Algebren.

Definition 40. Sei $M(C_k)$ die von den irreduziblen (d. h. von nichttrivialen Untermoduln freien) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierten C_k-Moduln erzeugte freie abelsche Gruppe und $N(C_k^0)$ die von den ungraduierten C_k^0-Moduln erzeugte freie abelsche Gruppe. Die entsprechenden Gruppen für die komplexifizierten Algebren seien mit $M^c(C_k)$ bzw. mit $N^c(C_k^0)$ bezeichnet.

Proposition 41. *Der Funktor $R\colon M \mapsto M^0$, der einem graduiertem C_k-Modul $M = M^0 \oplus M^1$ den C_k^0-Modul M^0 zuordnet, induziert für jedes k einen Isomorphismus*

$$M(C_k) \xrightarrow{\cong} N(C_k^0).$$

Analog gilt im komplexen Fall

$$M^c(C_k) \cong N^c(C_k^0).$$

Proposition 42. *Sei $\phi\colon \mathbb{R}^k \to C_{k+1}^0$ durch*

$$\phi(e_i) = e_i e_{k+1} \qquad \text{für} \quad i = 1, \ldots, k$$

definiert. Die Erweiterung von ϕ ist ein Isomorphismus

$$C_k \xrightarrow{\cong} C_{k+1}^0.$$

Definition 43. Sei $i\colon C_k \to C_{k+1}$ die Erweiterung der kanonischen Inklusion $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k+1}$ und $i^*\colon M(C_{k+1}) \to M(C_k)$ der von ihr induzierte Homomorphismus sowie $A_k = \operatorname{coker} i^*$. Entsprechend sei $A_k^c = M^c(C_k)/i^*(M^c(C_{k+1}))$. Für einen irreduziblen graduierten Modul M über C_k bzw. $C_k \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sei a_k bzw. a_k^c die reelle bzw. komplexe Dimension von M^0. Diese Daten sind in Tabelle 2 aufgelistet.

k	C_k	$M(C_k)$	A_k	a_k	$M^c(C_k)$	A_k^c	a_k^c
1	$\mathbb{C}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	1	$\mathbb{Z}$	0	1
2	$\mathbb{H}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	1
3	$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$	$\mathbb{Z}$	0	4	$\mathbb{Z}$	0	2
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	4	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	2
5	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{Z}$	0	8	$\mathbb{Z}$	0	4
6	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{Z}$	0	8	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	4
7	$\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{Z}$	0	8	$\mathbb{Z}$	0	8
8	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	8	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	8

$$M_{k+8} \cong M_k \qquad A_{k+8} \cong A_k \qquad a_{k+8} = 16a_k$$
$$M^c_{k+2} \cong M^c_k \qquad A^c_{k+2} \cong A^c_k \qquad a^c_{k+2} = 2a^c_k$$

Tabelle 2: Die Gruppen $M^{(c)}(C_k)$ und $A_k^{(c)}$ sowie die Dimensionen $a_k^{(c)}$.

Bemerkung 44. Die meisten Einträge von Tabelle 2 ergeben sich direkt aus Tabelle 1, denn die Algebren $\mathbb{F}(n)$ sind einfach, haben also nur eine Klasse irreduzibler Moduln, die durch die Operation von $\mathbb{F}(n)$ auf $\mathbb{F}^n$ gegeben ist. Lediglich die Gruppen A_{4n} und A^c_{4n} müssen noch untersucht werden.

Bemerkung 45. Für einen graduierten Modul $M = M^0 \oplus M^1$ ist $M^* := M^1 \oplus M^0$ ebenfalls ein graduierter Modul. Dadurch werden Operationen auf $M(C_k)$ und $M^c(C_k)$ definiert, die auch mit * bezeichnet seien.

Proposition 46. *Sind x und y die Klassen der beiden verschiedenen irreduziblen graduierten Moduln in $M(C_{4n})$, so gilt*

$$x^* = y \qquad \textit{und} \qquad y^* = x.$$

Lemma 47. *Sei $y \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ und sei $A(y)$ der durch y induzierte innere Automorphismus von C_k (d. h. $A(y)\cdot w = ywy^{-1}$). Ebenso bezeichne $A(y)$ den dadurch induzierten inneren Automorphismus von $M(C_k)$. Bezeichnet $A^0(y)$ sowohl die Einschränkung von $A(y)$ auf C_k^0 als auch den durch sie induzierten*

Automorphismus von $N(C_k^0)$, so gilt für $x \in M(C_k)$

$$\begin{aligned} A(y) \cdot x &= x^* \\ A^0(y) \cdot R(x) &= R(x^*) \\ A^0(e_k)\phi(w) &= \phi(\alpha(w)), \end{aligned}$$

wobei $R\colon M(C_k) \mapsto N(C_k^0)$ den Funktor aus Proposition 41 und $\phi\colon C_{k-1} \to C_k$ die Abbildung aus Proposition 42 bezeichnet und α der kanonische Automorphismus von C_k ist.

Korollar 48. *Es gilt $A_{4n} \cong \mathbb{Z}$ und $A_{2n}^c \cong \mathbb{Z}$.*

2.1 Grassmann-Algebren

Definition 49. Die *komplexe Grassmann-Algebra* sei die graduierte $\mathbb{C}$-Algebra

$$\Lambda(\mathbb{C}^k) = \sum_{j=0}^{k} \Lambda^j(\mathbb{C}^k),$$

wobei $\Lambda^j(\mathbb{C}^k)$ die j-te äußere Potenz von $\mathbb{C}^k$ sei. Für $v \in \mathbb{C}^k$ sei d_v der Vektorraum-Endomorphismus von $\Lambda(\mathbb{C}^k)$ mit

$$d_v(w) = v \wedge w.$$

Das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^k$ induziert ein Skalarprodukt auf $\Lambda(\mathbb{C}^k)$. Sei δ_v die zu d_v bezüglich dieses Skalarprodukts adjungierte Abbildung. Außerdem sei die Paarung

$$s\colon \mathbb{C}^k \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda(\mathbb{C}^k) \to \Lambda(\mathbb{C}^k), \qquad v \otimes w \mapsto d_v(w) - \delta_v(w)$$

gegeben.

Bemerkung 50. In $\Lambda(C^k)$ gilt die Gleichung

$$(d_v - \delta_v)^2 w = -\left\|v\right\|^2 w.$$

Definition 51. Sei $k = 4n$ und sei $\omega = e_1 \cdots e_{4n}$. Das Zentrum von C_k^0 wird von 1 und ω erzeugt und die Projektionen auf die beiden Ideale von C_k^0 sind durch $(1 \mp \omega)/2$ gegeben.

Ist M ein irreduzibler graduierter C_k-Modul, so operiert ω auf M^0 als $\varepsilon = \pm 1$. Ein graduierter C_k-Modul heiße *ε-Modul*, wenn ω als ε auf M^0 operiert.

Bemerkung 52.

(1) Ist M ein ε-Modul, so ist M^* ein $-\varepsilon$-Modul.

(2) Ist M ein ε-Modul und M' ein ε'-Modul, so ist $M \widehat{\otimes} M'$ ein $\varepsilon\varepsilon'$-Modul.

Bemerkung 53. Durch s wird $\Lambda(\mathbb{C}^k)$ zu einem $C_{2k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$-Modul mit einer natürlichen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Graduierung

$$\Lambda^0 = \sum_{r=0}^{\infty} \Lambda^{2r}(\mathbb{C}^k), \qquad \Lambda^1 = \sum_{r=0}^{\infty} \Lambda^{2r+1}(\mathbb{C}^k),$$

die mit s verträglich ist. Also ist $\Lambda(\mathbb{C}^k)$ ein irreduzibler $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierter Modul, und zwar (aus Dimensionsgründen) über $C_{2k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Da des Weiteren für $u = iv$ die Gleichung

$$(d_v - \delta_v)(d_u - \delta_u)(1_{\Lambda^0(\mathbb{C}^k)}) = -i \left\|v\right\|^2 (1_{\Lambda^0(\mathbb{C}^k)})$$

gilt, ist $\Lambda(\mathbb{C}^k)$ ein $(-i)^k$-Modul.

Definition 54. Der graduierte $C_{2k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$-Modul $\Lambda(C^k)$ definiere die Klasse

$$(-1)^k(\mu^c)^k \in A_k^c.$$

Bemerkung 55. Mit Hilfe der Formel für $\widetilde{l}\colon U(k) \to \mathrm{Spin}^c(2k)$ aus Bemerkung 39 sieht man leicht, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} U(k) \arrow[r, "\widetilde{l}"] \arrow[d, "i"] & \mathrm{Spin}^c(2k) \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathrm{End}(\mathbb{C}^k) \arrow[r, "\Lambda"] & \mathrm{End}(\Lambda(\mathbb{C}^k)) \end{tikzcd}$$

kommutiert, in dem i die Inklusion ist, Λ der funktorielle Homomorphismus ist und σ von s induziert wird.

2.2 Produkte von Clifford-Moduln

Bemerkung 56. Sei M ein graduierter C_k-Modul und N ein graduierter C_l-Modul. Ihr graduiertes Tensorprodukt $M\widehat{\otimes}N$ ist ein graduierter $C_k\widehat{\otimes}C_l$-Modul vermöge

$$(M\widehat{\otimes}N)^0 = M^0\widehat{\otimes}N^0 \oplus M^1\widehat{\otimes}N^1, \qquad (M\widehat{\otimes}N)^1 = M^0\widehat{\otimes}N^1 \oplus M^1\widehat{\otimes}N^0,$$

worauf $C_k\widehat{\otimes}C_l$ mittels

$$(x \otimes y) \cdot (m \otimes n) = (-1)^{qi}(x \cdot m) \otimes (y \cdot n), \qquad (y \in C_l^q,\ m \in M^i,\ q, i = 0, 1)$$

operiert.

Weiterhin gibt es einen Isomorphismus $\phi_{k,l}\colon C_{k+l} \to C_k \otimes C_l$, der als die lineare Erweiterung der Abbildung

$$\phi_{k,l}(e_i) = \begin{cases} e_i \otimes 1 & 1 \leq i \leq k \\ 1 \otimes e_i & k < i \leq k + l \end{cases}$$

der Basiselemente definiert ist.

Die Operation $(M, N) \mapsto M\widehat{\otimes}N \mapsto \phi^*_{k,l}(M\widehat{\otimes}N)$ führt zu einer Paarung

$$M(C_k) \otimes_{\mathbb{Z}} M(C_l) \to M(C_{k+l}),$$

die $M^* = \sum_{k=0}^{\infty} M(C_k)$ zu einem $\mathbb{Z}$-graduierten Ring macht. Dieses (assoziative) Produkt sei mit $(u, v) \mapsto u \cdot v$ bezeichnet.

Proposition 57. *Für $u \in M(C_k)$ und $v \in M(C_l)$ sowie den Einschränkungs-Homomorphismus $i^* \colon M(C_k) \to M(C_{k-l})$ gelten folgende Formeln.*

$$(u \cdot v)^* = u \cdot v^*$$

$$u \cdot v = \begin{cases} v \cdot u, & \text{falls } kl \text{ gerade} \\ (v \cdot u)^*, & \text{falls } kl \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$u \cdot i^* v = i^*(u \cdot v) \qquad\qquad (k \geq 1)$$

Korollar 58. *Ist $\lambda \in M(C_8)$ die Klasse eines irreduziblen C_8-Moduls, so induziert Multiplikation mit λ einen Isomorphismus*

$$M(C_k) \xrightarrow{\cong} M(C_{k+8}).$$

Korollar 59. *Das Bild von $i^* \colon M_* \to M_*$ ist ein Ideal; somit erbt der Quotientenring*

$$A_* := \sum_{k=0}^{\infty} A_k$$

eine Ringstruktur von M_*.

Proposition 60. *Für $k \geq 0$ induziert Multiplikation mit λ einen Isomorphismus*

$$A_k \xrightarrow{\cong} A_{k+8}.$$

Satz 61. *Es ist A_* der von $1 \in A_0$, $\xi \in A_1$, $\mu \in A_4$ und $\lambda \in A_8$ erzeugte antikommutative graduierte Ring mit den Relationen $2\xi = 0$, $\xi^3 = 0$ und $\mu^2 = 4\lambda$.*

Beweis. Wegen $A_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gilt $2\xi = 0$. Da $a_1 = 1$ und $a_2 = 2$ gilt (Tab. 2), erzeugt ξ^2 die Gruppe A_2. Außerdem gilt wegen $A_3 = 0$, daß $\xi^3 = 0$ ist; es bleibt also lediglich μ^2 zu berechnen.

Sei also μ die Klasse eines irreduziblen C_4-Moduls M in A_k; M ist ein ε-Modul. Der Modul $M\widehat{\otimes}M$ ist daher ein 1-Modul in C_8 ($\varepsilon^2 = 1$). Ist $\lambda \in A_8$ die Klasse des irreduziblen 1-Moduls W über C_8, so gilt aus Dimensionsgründen $M\widehat{\otimes}M \cong 4W$, also $\mu^2 = 4\lambda$ (man beachte dabei $a_4 = 4$, $a_8 = 8$, sowie $(M\widehat{\otimes}M)^0 = M^0\widehat{\otimes}M^0 \oplus M^1\widehat{\otimes}M^1$). □

Bemerkung 62. Korollar 59 gilt auch in der komplexen Version, also ist auch A_*^c eine graduierte Algebra. In diesem Fall erzeugt schon der zu einem irreduziblen $C_2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$-Modul gehörige Erzeuger die Algebra A_*^c.

Satz 63. *Der Ring* A_*^c *ist isomorph zum Polynomring* $\mathbb{Z}[\mu^c]$ *mit* $\deg \mu^c = 2$.

Beweis. Für $k \geq 1$ sei $\omega = e_1 \cdots e_k \in C_k$. Für $k = 2l$ gilt $\omega^2 = (-1)^l$, d. h. für einen irreduziblen komplexen graduierten C_k-Modul M operiert ω als $\pm i^l$ auf M^0. Ist $\mu_l^c \in M^c(C_{2l})$ der durch einen irreduziblen $-i^l$-Modul gegebene Erzeuger, so gilt $\mu_l^c = (\mu^c)^l$ für $\mu^c = \mu_1^c$. □

Bemerkung 64. Der Komplexifizierungshomomorphismus $A_* \to A_*^c$, $\mu \mapsto 2(\mu^c)^2$ bildet λ auf $(\mu^c)^4$ ab.

3 Die Differenzbündel-Konstruktion und relative K-Theorie

Wir definieren die Gruppen $L_n(X, Y)$ und verallgemeinerte Euler-Charakteristiken. Mit deren Hilfe geben wir mit der Differenzbündel-Konstruktion eine Alternative zur Konstruktion der relativen K-Theorie an. Mehr über relative K-Theorie findet sich in [Kar78].

In diesem Abschnitt arbeiten wir in der Kategorie der endlichen CW-Komplexe bzw. der endlichen CW-Paare.

3.1 Die Gruppen $L_n(X, Y)$

Definition 65. Für $Y \subset X$ sei $\mathscr{C}_n(X, Y)$ die Menge der Sequenzen von Vektorraumbündeln

$$E = (\, 0 \longrightarrow E_n \xrightarrow{\sigma_n} E_{n-1} \xrightarrow{\sigma_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\sigma_1} E_0 \longrightarrow 0 \,)$$

über X, deren Homomorphismen σ_i über Y definiert sind und die über Y exakt sind. Ein *Isomorphismus* in $\mathscr{C}_n(X, Y)$ sei durch ein über Y kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & E_i \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[d] & E_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & E_i' \arrow[r, "\sigma_i'"] & E_{i-1}' \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

mit Isomorphismen über X als vertikalen Pfeilen gegeben. Eine *elementare Sequenz* in $\mathscr{C}_n(X, Y)$ sei von der Form

$$0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow E \xrightarrow{\mathrm{id}_E} E \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \,.$$

Die (direkte) *Summe* zweier Sequenzen sei auf die offensichtliche Weise definiert.

Definition 66. Es gelte $E \sim F$ genau dann, wenn elementare Sequenzen $P^i, Q^j \in \mathscr{C}_n$ existieren, so dass

$$E \oplus P^1 \oplus \cdots \oplus P^r \cong F \oplus Q^1 \oplus \cdots \oplus Q^s$$

gilt. Dies ist die Äquivalenzrelation, die durch stabile Isomorphie unter Addition von elementaren Sequenzen erzeugt wird. Die Menge der Äquivalenzklassen werde mit $L_n(X,Y)$ bezeichnet; sie wird durch $\oplus$ zu einer abelschen Halbgruppe. Für $Y = \emptyset$ schreibe man $L_n(X)$ statt $L_n(X,Y)$.

Definition 67. Eine Sequenz $E \in \mathscr{C}_n$ wird durch Hinzufügen von $E_{n+1} := 0$ zu einer Sequenz in $\mathscr{C}_{n+1}$. Somit ergeben sich Abbildungen

$$\mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_2 \longrightarrow \mathscr{C}_3 \longrightarrow \cdots,$$

$$L_1 \longrightarrow L_2 \longrightarrow L_3 \longrightarrow \cdots$$

vermöge derer wir

$$\mathscr{C} := \mathscr{C}_\infty := \varinjlim \mathscr{C}_n \qquad \text{und} \qquad L := L_\infty := \varinjlim L_n$$

definieren können.

Bemerkung 68. Durch eine Äquivalenzrelation wie in Definition 66, die man auf Sequenzen beliebiger endlicher Länge erweitert, entsteht $\mathscr{C}$ aus L.

Lemma 69. *Seien E und F Vektorraumbündel über X und $f\colon E \hookrightarrow F$ ein Monomorphismus über $Y \subset X$. Gilt* $\dim F > \dim E + \dim X$, *so kann f bis auf Homotopie relativ Y eindeutig zu einem Monomorphismus über X fortgesetzt werden.*

Lemma 70. *Für $n \geq 1$ ist die Abbildung*

$$L_n(X,Y) \to L_{n+1}(X,Y)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $\overline{\mathscr{C}}_{n+1}$ die Teilmenge von $\mathscr{C}_{n+1}$, die aus allen Sequenzen E mit

$$\dim E_n > \dim E_{n+1} + \dim X \tag{71}$$

besteht. Für $n \geq 1$ kann jedes $E \in \mathscr{C}_{n+1}$ durch Addition einer elementaren Sequenz auf eine Form gebracht werden, in der es (71) erfüllt; d. h. die Abbildung $\overline{\mathscr{C}}_{n+1} \to L_{n+1}$ ist surjektiv. Für jede Sequenz $E \in \overline{\mathscr{C}}_{n+1}$ kann σ_{n+1} nach Lemma 69 zu einem Monomorphismus σ'_{n+1} über X fortgesetzt werden. Sei $E'_n = \operatorname{coker} \sigma'_{n+1}$ und P die elementare Sequenz mit $P_{n+1} = P_n = E_{n+1}$. Sei außerdem ρ'_n durch das über Y kommutative (über Y gilt $\ker \sigma_n = \operatorname{im} \sigma_{n+1}$) Diagramm

$$\begin{tikzcd} E_n \arrow[r, "\mathrm{pr}"] \arrow[dr, "\sigma_n"] & E'_n \arrow[d, "\rho'_n"] \\ & E_{n-1} \end{tikzcd}$$

definiert und

$$E' = (\, 0 \longrightarrow E'_n \xrightarrow{\rho'_n} E_{n-1} \xrightarrow{\sigma_{n-1}} E_{n-2} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\sigma_1} E_0 \longrightarrow 0 \,).$$

Ein Spalt der über X exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow E_{n+1} \xrightarrow{\sigma'_{n+1}} E_n \longrightarrow E'_n \longrightarrow 0$$

definiert einen Isomorphismus

$$P \oplus E' \xrightarrow{\cong} E$$

in $\mathscr{C}$, d. h. dass die Abbildung $L_n(X,Y) \to L_{n+1}(X,Y)$ surjektiv ist.

Ist σ''_{n+1} eine zweite Erweiterung von σ_{n+1} mit einer zugehörigen Sequenz E'', so gibt es nach Lemma 69 einen Isomorphismus $\phi\colon E'_n \xrightarrow{\cong} E''_n$, der den über Y gegebenen erweitert, d. h. dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} E'_n \arrow[r, "\rho'_n"] \arrow[d, "\phi"', "\cong"] & E_{n-1} \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ E''_n \arrow[r, "\rho''_n"] & E_{n-1} \end{tikzcd}$$

über Y kommutiert. Also gilt $E' \sim E''$ in $\mathscr{C}_n$, es gibt also eine wohldefinierte Abbildung $E \mapsto E'$ von den Isomorphieklassen in $\overline{\mathscr{C}}_{n+1}$ in die Isomorphieklassen in $\mathscr{C}_n$. Weiterhin gelten für elementare Sequenzen

$$Q = (\, 0 \longrightarrow Q_{n+1} \longrightarrow Q_n \longrightarrow 0 \,), \qquad R = (\, 0 \longrightarrow R_i \longrightarrow R_{i-1} \longrightarrow 0 \,), \quad (i \le n)$$

die Gleichungen

$$(E \oplus Q)' \cong E', \qquad (E \oplus R)' \cong E' \oplus R;$$

so dass die Klasse von E' in L_n nur von der Klasse von E in L_{n+1} abhängt. Wegen der Surjektivität von $\overline{\mathscr{C}}_{n+1} \to L_{n+1}$ induziert $E \to E'$ eine Abbildung $L_{n+1} \to L_n$. Aus deren Konstruktion läßt sich leicht erkennen, dass sie die beidseitige Inverse zur Abbildung $L_n \to L_{n+1}$ ist. $\square$

Proposition 72. *Für $1 \le n \le \infty$ sind die Homomorphismen*

$$L_1(X,Y) \to L_n(X,Y)$$

Isomorphismen.

3.2 Verallgemeinerte Euler-Charakteristiken

Definition 73. Eine *Euler-Charakteristik* für $\mathscr{C}_n$ ist ein natürlicher Homomorphismus (d. i. eine natürliche Transformation von Funktoren)

$$\chi\colon L_n(X,Y) \to K(X,Y),$$

der für $Y = \emptyset$ durch

$$\chi(E) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i E_i$$

gegeben ist.

Lemma 74. *Ist χ eine Euler-Charakteristik für $\mathscr{C}_1$, so ist*

$$\chi\colon L_1(X) \to K(X)$$

ein Isomorphismus.

Lemma 75. *Sei A ein Monoid und B eine Gruppe. Ist $\phi\colon A \to B$ ein Epimorphismus mit $\phi^{-1}(1) = 1$, so ist ϕ ein Isomorphismus.*

Lemma 76. *Ist χ eine Euler-Charakteristik für $\mathscr{C}_1$ und $Y = \{*\}$, so ist*

$$\chi\colon L_1(X,Y) \to K(X,Y)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. In dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L_1(X,Y) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\chi"] & L_1(X) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\chi"] & L_1(Y) \arrow[d, "\chi"] \\
0 \arrow[r] & K(X,Y) \arrow[r] & K(X) \arrow[r] & K(Y)
\end{tikzcd}$$

sei α die von der Identität $\mathscr{C}_n(X,Y) \to \mathscr{C}_n(X)$ induzierte und β die von der Einschränkung $\mathscr{C}_n(X) \to \mathscr{C}_n(Y)$ auf Y induzierte Abbildung. Nach Lemma 74 sind die beiden rechten vertikalen Abbildungen Isomorphismen. Da in dieser Situation die lange exakte K-Sequenz nach [AH60, Bem. zu Prop. 1.4] zerfällt, ist die untere Zeile exakt; es genügt nach dem 5er-Lemma und Lemma 75 also, die Exaktheit der oberen Zeile zu zeigen.

Offensichtlich gilt $\beta\alpha = 0$. Sei $E \in L_1(X)$ mit $\beta(E) = 0$. Da Y ein Punkt und $\chi\colon L_1(X,Y) \to K(X,Y)$ ein Isomorphismus ist, ist das äquivalent zu $\dim E_1|_Y = \dim E_0|_Y$, so dass $E_1|_Y \cong E_0|_Y$ gilt, was $E \in \operatorname{im} \alpha$ beweist.

Für

$$E = (\, 0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\ \sigma\ } E_0 \longrightarrow 0 \,) \in \mathscr{C}_1(X,Y)$$

sei $\alpha(E) = 0$ in $L_1(X)$. Es gilt $\chi\alpha(E) = 0$ in $K(X)$, also gibt es (wenn wir oBdA $\dim E_1 > \dim X$ annehmen) einen Isomorphismus $\tau\colon E_1 \to E_0$ über X, also gilt $\sigma\tau^{-1} \in \mathrm{Aut}(E_0|_Y)$. Weil Y ein Punkt ist, ist dieser Automorphismus zur Identität homotop (im reellen Fall ersetze man E_i durch $E_i \oplus 1$, σ durch $\sigma \oplus 1$ und τ durch $\tau \oplus (-1)$), kann also zu einem Automorphismus $\rho \in \mathrm{Aut}(E_0)$ fortgesetzt werden. Also ist $\rho\tau\colon E_1 \to E_0$ ein Isomorphismus, der σ erweitert, d. h. E repräsentiert $0 \in L_1(X, Y)$. □

Lemma 77. *Ist χ eine Euler-Charakteristik für $\mathscr{C}_1$, so ist χ eine Äquivalenz der Funktoren L_1 und K.*

Lemma 78. *Sind χ und χ' Euler-Charakteristiken für $\mathscr{C}_1$, so gilt $\chi = \chi'$.*

Lemma 79. *Es gibt eine bijektive Beziehung ($\chi_1 \leftrightarrow \chi_n$) zwischen Euler-Charakteristiken für $\mathscr{C}_1$ und $\mathscr{C}_n$, so dass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r] \arrow[d, "\chi_1"] & L_n \arrow[dl, "\chi_n"] \\ K & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Dies folgt aus Proposition 72 und Lemma 79. □

3.3 Differenzbündel und der Isomorphismus zur relativen K-Theorie

Bemerkung 80. Für ein Paar (X, Y) und $i = 1, 2$ sei $X_i = X \times \{i\}$ und $A = X_0 \cup_Y X_1$. Es gibt Retrakte $\pi_i\colon A \to X_i$, die Spalte $\pi_i^*\colon K(X_i) \to K(a)$ für die exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow K(A, X_i) \xrightarrow{\rho_i^*} K(A) \xrightarrow{j_i^*} K(X_i) \longrightarrow 0$$

liefern. Außerdem induzieren die Inklusionen $\phi_i\colon (X, Y) \to (A, X_{1-i})$ Isomorphismen $\phi_i^*\colon K(A, X_{1-i}) \to K(X, Y)$.

Definition 81 (Differenzbündel). Für

$$E = (\, 0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\sigma} E_0 \longrightarrow 0 \,) \in \mathscr{C}_1(X, Y)$$

konstruiere man das *Differenzbündel* F, indem man E_0 über X_0 und E_1 über X_1 entlang Y mittels σ identifiziere. (Die Isomorphieklasse von F hängt dann nur von derjenigen von E ab.) Für $F_i = \pi_i^*(E_i)$ gilt $F|_{X_i} \cong F_i$, also $F - F_i \in \ker j_i^*$. Das Element $d(E) \in K(X, Y)$ sei durch

$$\rho_1^*(\phi_0^*)^{-1} d(E) = F - F_1$$

definiert.

Bemerkung 82.

(1) Die Abbildung d ist additiv und für ein elementares Bündel E gilt $d(E) = 0$; also induziert d einen natürlichen Homomorphismus
$$d\colon L_1(X,Y) \to K(X,Y)$$

(2) Für $Y = \emptyset$ gilt $A = X_0 \amalg X_1$, $F = E_0 \times \{0\} \amalg E_1 \times \{1\}$ und $F_i = E_i \times \{0\} \amalg E_i \times \{1\}$, also $d(E) = E_0 - E_1$.

(3) Die Abbildung d ist eine verallgemeinerte Euler-Charakteristik.

Proposition 83. *Für $1 \leq n \leq \infty$ existiert ein eindeutiger natürlicher Isomorphismus*
$$\chi\colon L_n(X,Y) \to K(X,Y),$$
der für $Y = \emptyset$ durch
$$\chi(E) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i E_i$$
gegeben ist. (Sogar als Homomorphismus ist χ eindeutig.)

Definition 84. Der Isomorphismus χ aus Proposition 83 heiße die *Euler-Charakteristik*. Die Euler-Charakteristiken für verschiedene n können nach Lemma 79 identifiziert werden.

Zwei Elemente $E, F \in \mathscr{C}_n(X,Y)$ heißen *homotop*, wenn es ein Element $\mathcal{E} \in \mathscr{C}_n(X \times I, Y \times I)$ gibt, dessen Einschränkungen auf $X \times \{0\}$ und $X \times \{1\}$ gerade E und F sind.

Proposition 85. *Homotope Elemente in $\mathscr{C}_n(X,Y)$ definieren dasselbe Element in $L_n(X,Y)$.*

Bemerkung 86. Die zu $j\colon L_1(X,Y) \to L_n(X,Y)$ inverse Abbildung kann wie folgt konstruiert werden. Zu $E \in \mathscr{C}_n(X,Y)$ kann man nach Einführung von Metriken auf offensichtliche Weise die adjungierte Sequenz E^* definieren. In der Sequenz
$$F = \left(0 \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{\infty} E_{2i} \xrightarrow{\ \tau\ } \bigoplus_{i=0}^{\infty} E_{2i+1} \longrightarrow 0 \right)$$
sei τ durch
$$\tau(e_1, e_3, e_5, \dots) = (\sigma_1 e_1, \sigma_2^* e_1 + \sigma_3 e_3, \sigma_4^* e_3 + \sigma_5 e_5, \dots)$$
gegeben. Da die betrachteten Sequenzen über Y exakt sind, ergibt sich die Zerlegung
$$E_{2i} = \sigma_{2i+1}(E_{2i+1}) \oplus \sigma_{2i}^*(E_{2i-1}).$$
Aus diesem Grunde gilt $F \in \mathscr{C}_1(X,Y)$. Im Falle $E \in \mathscr{C}_1$ gilt offensichtlicherweise $E = F$. Weil alle Metriken auf E homotop sind, gilt nach Proposition 85, dass F ein (wohldefinierter) Repräsentant für $j^{-1}(E)$ ist. Ist $E \in \mathscr{C}_n$, so kann man mit Hilfe obiger Zerlegung leicht mittels Addition elementarer Sequenzen zeigen, daß E zu $j(F)$ äquivalent ist.

3.4 Das Produkt auf $L(X,Y)$

Lemma 87. *Sind $E_1,\dots,E_n$ Vektorraumbündel über X und ist*

$$0 \longrightarrow E_n \xrightarrow{\sigma_n} E_{n-1} \xrightarrow{\sigma_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\sigma_1} E_0 \longrightarrow 0$$

ein Komplex über $Y \subset X$, so können die Differentiale σ_i so fortgesetzt werden, dass ein Komplex über X entsteht.

Definition 88. Sei $\mathscr{D}_n(X,Y)$ die Menge der Komplexe der Länge n über X, die über Y exakt sind. Zwei solche Komplexe E,F heißen *homotop*, wenn es einen Komplex $\mathcal{E} \in \mathscr{D}_n(X\times I, Y\times I)$ gibt, dessen Einschränkungen auf $X\times\{0\}$ und $X\times\{1\}$ gerade E und F sind. Durch Einschränkung der Homomorphismen auf Y ergibt sich eine natürliche Abbildung

$$\Phi\colon \mathscr{D}_n(X,Y) \to \mathscr{C}_n(X,Y).$$

Lemma 89. *Die Abbildung $\Phi\colon \mathscr{D}_n \to \mathscr{C}_n$ induziert eine bijektive Abbildung von Homotopieklassen.*

Bemerkung 90. Für $E \in \mathscr{D}_n(X,Y)$ und $F \in \mathscr{D}_m(X',Y')$ gilt

$$E \otimes F \in \mathscr{D}_{n+m}(X\times X', X\times Y' \cup Y \times X')$$

und dieses Produkt ist additiv und mit Homotopien verträglich.

Proposition 91. *Das Tensorprodukt von Komplexen induziert ein natürliches Produkt*

$$L_n(X,Y)\otimes L_m(X',Y') \longrightarrow L_{n+m}(X\times X', X\times Y'\cup Y\times X')$$

und für die Euler-Charakteristik χ gilt

$$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b).$$

Bemerkung 92. Proposition 91 geht im Wesentlichen auf [Dou61, Prop. I.F] zurück.

Proposition 93. *Sei*

$$\begin{aligned} E &= (\,0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\sigma} E_0 \longrightarrow 0\,) \in \mathscr{D}_1(X,Y),\\ E' &= (\,0 \longrightarrow E_1' \xrightarrow{\sigma'} E_0' \longrightarrow 0\,) \in \mathscr{D}_1(X',Y') \end{aligned}$$

und sei in jedem Bündel eine Metrik gewählt. Ist

$$F = (\,0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\sigma} F_0 \longrightarrow 0\,) \in \mathscr{D}_1(X\times X', X\times Y'\cup Y\times X')$$

durch

$$\begin{aligned} F_1 &= E_0\otimes E_1' \oplus E_1 \otimes E_0'\\ F_2 &= E_0\otimes E_0' \oplus E_1\otimes E_1'\\ \tau &= \left(\begin{smallmatrix} 1\otimes\sigma' & \sigma\otimes 1\\ \sigma^*\otimes 1 & -1\otimes\sigma'^* \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}$$

gegeben, wobei σ^*,σ'^* die adjungierten Abbildungen von σ,σ' sind, so gilt

$$\chi(F) = \chi(E)\cdot\chi(E').$$

4 Der Thom-Komplex

Satz 94. *Die Abbildungen*

$$\alpha\colon A_* \to \sum_{k\geq 0} KO^{-k}(*) \quad \textit{und} \quad \alpha^c\colon A^c_* \to \sum_{k\geq 0} K^{-k}(*)$$

sind Ringisomorphismen.

Satz 95. *Ist V ein F-orientiertes Bündel über X mit Orientierungsklasse μ_V, so ist $\widetilde{F^\sharp}(X^V)$ ein freier $F^\sharp(X)$-Modul mit Erzeuger μ_V.*

Satz 96. *Ist V ein orientiertes reelles Vektorbündel der Dimension n über X, so gilt,*

(1) *wenn $n \equiv 0 \mod 2$ gilt und es ein Element $\mu_V \in \widetilde{K}(X^V)$ gibt, dessen Einschränkung für jedes $P \in X$ auf $\widetilde{K}(P^V)$ der Erzeuger ist, dann ist $\widetilde{K}^*(X^V)$ ein freier $K^*(X)$-Modul mit Erzeuger μ_V.*

(2) *wenn $n \equiv 0 \mod 8$ gilt und es ein Element $\mu_V \in \widetilde{KO}(X^V)$ gibt, dessen Einschränkung für jedes $P \in X$ auf $\widetilde{KO}(P^V)$ der Erzeuger ist, dann ist $\widetilde{KO}^*(X^V)$ ein freier $KO^*(X)$-Modul mit Erzeuger μ_V.*

Satz 97.

(1) *Ist P ein $\mathrm{Spin}(8k)$-Bündel $V = P \times_{\mathrm{Spin}(8k)} \mathbb{R}^{8k}$, so ist $\widetilde{KO}^*(X^V)$ ein freier $KO^*(X)$-Modul mit Erzeuger μ_V.*

(2) *Ist P ein $\mathrm{Spin}^c(2k)$-Bündel $V = P \times_{\mathrm{Spin}^c(2k)} \mathbb{C}^{2k}$, so ist $\widetilde{K}^*(X^V)$ ein freier $K^*(X)$-Modul mit Erzeuger μ^c_V.*

5 Die Spin-Orientierung auf der KO-Theorie

Satz 98. *Ist P^0 ein $\mathrm{Spin}(k)$-Prinzipalbündel, M ein graduierter C_k-Modul, $Q = P^0 \times_{\mathrm{Spin}(k)} \mathrm{Spin}(k+1)$, $V = P^0 \times_{\mathrm{Spin}(k)} \mathbb{R}^k$, $T^k = Q/\mathrm{Spin}(k)$, $E^0 = Q \times_{\mathrm{Spin}(k)} M^0$ und $p\colon KO(T^k) \to KO(B(V), S(V))$ die natürliche Projektion, so gilt*

$$\alpha_{P^0}(M) = p(E^0).$$

6 Geometrische Anwendungen

Proposition 99. *Ist X ein Punkt, so ist die Sequenz*

$$M(V) \xrightarrow{\quad i^* \quad} M(W) \xrightarrow{\chi(V,W)} KO(P(V), P(W)) \xrightarrow{\qquad} 0$$

exakt. Im komplexen Fall gilt die entsprechende Aussage.

Proposition 100. *Sei a_k die k-te Radon-Hurwitz-Zahl. Gilt $m = \lambda a_k$, so enthält das Tangentenbündel von $\mathbb{R}P^{m-1}$ (und somit auch das von S^{m-1}) ein $(k-1)$-dimensionales triviales Unterbündel.*

Bemerkung 101. Adams hat in [Ada62] gezeigt, dass der Umkehrschluss ebenfalls gilt.

Literatur

[ABS64] Atiyah, Michael F. ; Bott, Raoul ; Shapiro, Arnold: Clifford modules. In: *Topology* 3 Suppl. 1 (1964), S. 3–38

[Ada62] Adams, John F.: Vector fields on spheres. In: *Annals of Mathematics* 75 (1962), Mai, Nr. 3, S. 603–632

[AH60] Atiyah, Michael F. ; Hirzebruch, F.: Vector Bundles and Homogeneous Spaces. In: Allendorfer, Carl B. (Hrsg.): *Differential Geometry* University of Arizona, American Mathematical Society, Februar 1960 (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics III), S. 7–38

[Ati67] Atiyah, Michael F.: *K-Theory*. New York : W. A. Benjamin Inc., 1967

[Bot69] Bott, Raoul: *Lectures on $K(X)$*. New York : W. A. Benjamin Inc., 1969

[Dou61] Douady, Adrien: Cycles analytiques, d'après Atiyah et Hirzebruch. In: *Séminaire Bourbaki* Bd. 14: 1961/62, fascicule 1 – Exposés 223 à 228. 2., korrigierte Auflage. Paris, Dezember 1961, Kapitel 223

[Gro71] Grothendieck, Alexander: Classes de faisceaux et théorème de Riemann-Roch. In: Berthelot, P. (Hrsg.) ; Grothendieck, Alexander (Hrsg.) ; Illusie, L. (Hrsg.): *Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch (SGA 6)*. Berlin : Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics 225). – Nachdruck von Vorträgen aus dem Jahr 1957, S. 20–77

[GVF01] Gracia-Bondía, José M. ; Várilly, Joseph C. ; Figueroa, Héctor ; Amann, Herbert (Hrsg.): *Elements of Noncommutative Geometry*. Boston : Birkhäuser, 2001 (Birkhäuser Advanced Texts – Basler Lehrbücher)

[Hat03] Hatcher, Allen: Vector Bundles and K-Theory. Im Internet unter `http://www.math.cornell.edu/~hatcher`. Januar 2003. – Version 2.0

[Hus94] Husemoller, Dale: *Fibre bundles*. 3. Auflage. New York : Springer-Verlag, 1994 (Graduate Texts in Mathematics 20)

[Kar78] Karoubi, Max: *K-Theory – An Introduction*. Berlin : Springer-Verlag, 1978 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 226)

[Koe97] Koecher, Max: *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. 4. Auflage. Berlin : Springer-Verlag, 1997 (Grundwissen Mathematik)

[LM89] Lawson, jr., H. Blaine ; Michelsohn, Marie-Louise: *Spin Geometry*. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1989 (Princeton Mathematical Series 38)