Diplomandenseminar Sommersemester 2004: Spin-Gruppen, K-Theorie und der J-Homomorphismus: Die Schranken J' und J''

Markus Förster

30. Juni 2004

J.F. Adams: ON THE GROUPS $J(X)$ - II
(*Received 4 September 1963*)
Topology Vol. 3, pp. 137-171. Pergamon Press, 1965. Printed in Great Britain

§3, §5 ab Proposition 5.7, §6

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

1. Falls $\Lambda = \mathbb{R}$ und ξ ein $Spin(8n)$-Bündel bzw. $\Lambda = \mathbb{C}$ und ξ ein $U(n)$-Bündel über B ist, hatten wir *kannibalistische Klassen*

$$\rho_\Lambda^k(\xi) = (\phi_K^{-1} \circ \Psi^k \circ \phi_K)(1) \quad \in K^*(B)$$

definiert, außerdem weitere Klassen $sh = bh_{\mathbb{R}}$ und $bh = bh_{\mathbb{C}}$.

2. Die untere Schranke $J'(X)$ soll von der Form

$$J'(X) = \frac{K_{\mathbb{R}}(X)}{V(X)} \qquad \text{mit} \quad T(X) \subset V(X)$$

sein. Zur Definition der Untergruppe $V(X)$ brauchen wir die kannibalistischen Klassen ρ^k.

3. Die obere Schranke $J''(X)$ soll von der Form

$$J'(X) = \frac{K_{\mathbb{R}}(X)}{W(X)} \qquad \text{mit} \quad W(X) \subset T(X)$$

sein.

1 Charakteristische Klassen (Fortsetzung)

1.1 ρ_Λ^k für $U(n)$- und $Spin(8n)$-Bündel

In Joachim's Vortrag hatten zuletzt folgendes

Korollar 1.1 *Seien ξ_1, ξ_2 unitäre Bündel über B für den Fall $\Lambda = \mathbb{C}$, oder $Spin(8n)$-Bündel für den Fall $\Lambda = \mathbb{R}$, wobei $n \in \mathbb{N}$. Sind die zu ξ_1, ξ_2 assoziierten Sphären-Bündel faserhomotopieäquivalent, dann gibt es ein Element $x_\Lambda \in \tilde{K}_\Lambda(B)$ derart, dass*

$$\begin{aligned} bh_\Lambda(\xi_2) &= bh_\Lambda(\xi_1) \cdot ch_\Lambda(1 + x_\Lambda) \\ \rho_\Lambda^l(\xi_2) &= \rho_\Lambda^l(\xi_1) \cdot \frac{\Psi_\Lambda^l(1 + x_\Lambda)}{1 + x_\Lambda} \qquad \textit{(unabhängig von } l\textit{)} \end{aligned}$$

Wir geben nun die Proposition an, aus dem Korollar 1.1 folgt. Sei dazu ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} (\bar{E}_1, E_1) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p_1"] & (\bar{E}_2, E_2) \arrow[d, "p_2"] \\ B_1 \arrow[r, "f"] & B_2 \end{tikzcd}$$

gegeben, wobei nicht vorausgesetzt ist, dass es von einer Bündelabbildung induziert wird. Seien $\phi_{H,i}, \phi_{K,i}$ die Thom-Isomorphismen in den verallgemeinerten Kohomologietheorien H bzw. K für ξ_i, $i = 1, 2$. Definiere Elemente

$$\begin{aligned} k &:= (\phi_{K,1}^{-1} \circ g^* \circ \phi_{K,2})(1) \quad &\in K^*(B_1) \\ h &:= (\phi_{H,1}^{-1} \circ g^* \circ \phi_{H,2})(1) \quad &\in H^*(B_1) \end{aligned}$$

Proposition 1.2

$$h \cdot f^*(c(T, \xi_2)) = c(T, \xi_1) \cdot T(k).$$

Beweis: Sei $1 \in K^*(B_2)$. Dann gilt

$$\Big((\phi_{H,1}^{-1} g^* \phi_{H,2})(\phi_{H,2}^{-1} T \phi_{K,2})\Big)(1) \overset{\substack{T \text{ natürlich, d.h.} \\ T \circ g^* = g^* \circ T}}{=} \Big((\phi_{H,1}^{-1} T \phi_{K,1})(\phi_{K,1}^{-1} g^* \phi_{K,2})\Big)(1)$$

$$\overset{\substack{\text{Def. } k \\ \text{Def. } c(T, x_2)}}{\Rightarrow} \quad (\phi_{H,1}^{-1} g^* \phi_{H,2}) \underbrace{(c(T, \xi_2))}_{=1 \cdot c(T, \xi_2)} = (\phi_{H,1}^{-1} T \phi_{K,1})(k)$$

$$\overset{\substack{\text{Lemma,} \\ \text{Korollar}}}{\Rightarrow} \quad \underbrace{(\phi_{H,1}^{-1} g^* \phi_{H,2})(1)}_{=h} \cdot f^*(c(T, \xi_2)) = c(T, \xi_1) \cdot T(k)$$

Beweis des Korollars:

1. Wenn die zu ξ_1, ξ_2 assoziierten Sphärenbündel faserhomotopieäquivalent sind, gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} (\bar{E}_1, E_1) \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "p_1"'] & & (\bar{E}_2, E_2) \arrow[dl, "p_2"] \\ & B & \end{tikzcd} ,$$

wobei g faserweise den Grad ± 1 hat und $f = id : B \to B$. Bestimmen wir nun die virtuelle Dimension des Elementes

$$k = (\phi_{K,1}^{-1} g^* \phi_{K,2})(1) \quad \in K^*(B)$$

über jeder Zusammenhangskomponente von B durch Einschränkung auf eine einzelne Faser (dies sind Sphären), so ergibt sich diese zu ± 1 (entsprechend des Grades von g). Sei ε ein triviales virtuelles Bündel mit derselben virtuellen Dimension wie k auf jeder Zusammenhangskomponente von B. Dann hat $\varepsilon \cdot k$ virtuelle Dimension 1 und es gilt

$$\varepsilon \cdot k = 1 + x_\Lambda$$

für ein $x_\Lambda \in \tilde{K}_\Lambda(B)$ wegen $K_\Lambda(X) = \mathbb{Z} \oplus \tilde{K}_\Lambda(X)$ ($\tilde{K}_\Lambda(X)$ ist die Menge aller Elemente von virtueller Dimension 0).

2. Betrachte nun den Fall $\rho_\Lambda^l \overset{\text{Def.}}{=} (\phi_K^{-1} \Psi^k \phi_K)(1)$. Wegen $h = k$ ist das Ergebnis von Proposition 1.2

$$\begin{aligned} & & k \cdot \rho_\Lambda^l(\xi_2) &= \rho_\Lambda^l(\xi_1) \cdot \Psi_\Lambda^l(k) \\ & \overset{\substack{\text{Multiplikation} \\ \text{mit } \varepsilon = \Psi^1(\varepsilon)}}{\Rightarrow} & \varepsilon \cdot k \cdot \rho_\Lambda^l(\xi_2) &= \rho_\Lambda^l(\xi_1) \cdot \Psi^1(\varepsilon) \cdot \Psi_\Lambda^l(k) \\ & \overset{\substack{\text{Teil 1,} \\ \Psi \text{ Ringhom.}}}{\Rightarrow} & (1 + x_\Lambda) \cdot \rho_\Lambda^l(\xi_2) &= \rho_\Lambda^l(\xi_1) \cdot \Psi_\Lambda^l(1 + x_\Lambda) \end{aligned}$$

Da g^* faserweise den Grad ± 1 hat, gibt es zu g eine inverse Homotopieäquivalenz γ. Diese liefert ein zu k inverses Element $(\phi_{K,2}^{-1} \gamma^* \phi_{K,1})(1)$, d.h. auch $1 + x_\Lambda$ ist invertierbar. Wir erhalten die Behauptung

$$\rho_\Lambda^l(\xi_2) = \rho_\Lambda^l(\xi_1) \cdot \frac{\Psi_\Lambda^l(1 + x_\Lambda)}{1 + x_\Lambda}.$$

3. Der Fall für bh_Λ ist ähnlich. Es gilt $ch_\Lambda(\varepsilon) \cdot h = 1 \in H^0(B)$. Proposition 1.2 liefert in diesem Fall

$$h \cdot bh_\Lambda(\xi_2) = bh_\Lambda(\xi_1) \cdot ch_\Lambda(k) \quad \overset{\substack{\text{Multiplikation} \\ \text{mit } ch_\Lambda(\varepsilon)}}{\Rightarrow} \quad bh_\Lambda(\xi_2) = bh_\Lambda(\xi_1) \cdot ch_\Lambda(1 + x_\Lambda).$$

Soweit der Nachtrag zum letzten Vortrag. Jetzt wird ein Resultat präsentiert, mit dessen Hilfe wir die Klassen ρ_Λ^k berechnen können:

1.2 Erweiterung von ρ_Λ^k auf virtuelle Bündel

Bis jetzt haben wir ρ_Λ^k nur für bestimmte Klassen von Bündeln definiert. Wir wollen die Definition auf virtuelle Bündel erweitern.

Notation 1.3 Sei $S \subset \mathbb{C}$ ein Unterring und X ein endlicher CW-Komplex sowie G eine kompakte zusammenhängende Lie-Gruppe und $\Lambda = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rcl} f, g & \leftrightsquigarrow & \text{Abbildungen von endlichen CW-Komplexen} \\ \xi, \eta & \leftrightsquigarrow & \text{Bündel über } X \\ \kappa, \lambda & \leftrightsquigarrow & \text{Elemente von } K_\Lambda(X)\text{, d.h. virtuelle Bündel über } X \\ \mu, \nu & \leftrightsquigarrow & \text{Elemente von } K_\Lambda(X) \otimes S\text{, d.h. tensorierte virtuelle Bündel} \\ \alpha, \beta & \leftrightsquigarrow & \text{Darstellungen} \\ \theta, \phi & \leftrightsquigarrow & \text{Elemente von } \mathcal{R}_\Lambda(G) = \mathcal{R}_\Lambda(G)\text{, d.h. virtuelle Darstellungen} \\ \psi, \rho & \leftrightsquigarrow & \text{Elemente von } \mathcal{R}_\Lambda(G) \otimes S\text{, d.h. tensorierte virtuelle Darstellungen} \\ \hat{\psi}, \hat{\rho} & \leftrightsquigarrow & \text{Elemente der Vervollständigung Comp}(\mathcal{R}_\Lambda(G) \otimes S) \end{array}$$

Bemerkung 1.4 Wir haben Verknüpfungen

$$\begin{array}{rcl} \beta \cdot \alpha & = & \text{Komposition von Darstellungen } \beta, \alpha \rightsquigarrow \text{Darstellung} \\ \alpha \cdot \xi & = & \text{durch Darstellung } \alpha \text{ von Bündel } \xi \text{ induziertes Bündel} \rightsquigarrow \text{Bündel} \\ \xi \cdot f & = & \text{durch Abbildung } f \text{ von Bündel } \xi \text{ induziertes Bündel} \rightsquigarrow \text{Bündel} \\ f \cdot g & = & \text{Komposition von Abbildungen} \rightsquigarrow \text{Abbildung} \end{array}$$

Genauer:

1. für Darstellungen $G \to GL(n,\Lambda)$ und $\beta : GL(n,\Lambda) \to GL(n',\Lambda')$ die Darstellung $\beta \cdot \alpha$ durch die Komposition $\beta \circ \alpha : G \to GL(n',\Lambda')$ erklärt ist;
2. Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine lokale Trivialisierung des gegebenen $GL(n,\Lambda)$-Bündels ξ, und sei $\pi : E \to X$ die Projektion. Definiere den Totalraum des von einer Darstellung $\alpha : GL(n,\Lambda) \to GL(n',\Lambda')$ induzierten Bündels $\alpha\cdot\gamma$ durch

$$E(\alpha\cdot\xi) = \frac{\biguplus_{i\in I} U_i \times (\Lambda')^{n'}}{(u,x) \sim (u, \alpha'_{ij}(x))},$$

wobei $u_i = u_j \in U_i \cap U_j$ und $\alpha'_{ij} = \alpha(A) \in GL(n',\Lambda')$ die Übergangsmatrix, welche durch Übergangsmatrix $A : \Lambda^n \to \Lambda^n$ des Bündels ξ für $u \in U_i \cap U_j$ induziert wird.
Alternativ betrachte das zu ξ assoziierte $GL(n,\Lambda)$-Prinzipalbündel $P \to X$, dessen typische Faser über $x \in X$ der Raum der Isomorphismen $\mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(\{x\})$ ist. Lokale Trivialisierungen von ξ induzieren lokale Trivialisierungen des assoziierten Prinzipalbündels und liefern damit eine Topologie auf der disjunkten Vereinigung der Fasern. Durch Komposition linearer Abbildungen operiert die Gruppe $GL(n,\mathbb{R})$ der Isomorphismen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ von rechts und durch

$$\{\text{Isomorphismen } \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(\{x\})\} \times \mathbb{R}^n \to p^{-1}(\{x\}), \quad (f,u) \mapsto f(u)$$

wird ein Isomorphismus $P \times_{GL(n,\mathbb{R})} \mathbb{R}^n \cong E$ von Vektorbündeln induziert. Für die Darstellung $\alpha : GL(n,\Lambda) \to GL(n',\Lambda')$ ist

$$P' := P \times_{GL(n,\Lambda)} GL(n',\Lambda') = P \times_\alpha GL(n',\Lambda') = (P \times GL(n',\Lambda'))_\sim, \quad \text{wobei } (pg,g') \sim (p,\alpha(g)g'),$$

ein $GL(n',\Lambda')$-Prinzipalbündel. Es operiert $GL(n',\Lambda')$ von rechts durch Komposititon und wir erhalten das induzierte Vektorbündel mit Totalraum $E' = P' \times_{GL(n',\Lambda')} (\Lambda')^{n'}$
3. $\xi \cdot f$ ist das durch $f : X' \to X$ induzierte Bündel $f^*\xi$ über X'.
4. $f \cdot g$ ist die normale Komposition $f \circ g : X \to X''$ für Abbildung $g : X \to X'$ und $f : X' \to X''$.

Durch lineare Fortsetzung über dem ersten Faktor dieser Verknüpfungen ergeben sich

$$\begin{aligned}
\phi\cdot\alpha &= \text{Komposition von vir. Darst. } \phi \text{ und Darst. } \alpha \rightsquigarrow \text{virt. Darst.}\\
\theta\cdot\xi &= \text{durch virt. Darst. } \phi \text{ von Bündel } \xi \text{ induziertes virt. Bündel} \rightsquigarrow \text{virt. Bündel}\\
\kappa\cdot f &= \text{durch Abb. } f \text{ von virt. Bündel } \kappa \text{ induziertes virt. Bündel} \rightsquigarrow \text{virt. Bündel}
\end{aligned}$$

Beispiel 1.5 (Satz von Bott) *Sei ξ ein $U(n)$-Bündel. Dann wird $\rho^k_{\mathbb{C}}(\xi)$ von ξ durch die virtuelle Darstellung induziert, deren Charakter*

$$\prod_{1\le r\le n} \frac{z_r^k - 1}{z_r - 1} = \prod_{1\le r\le n} (z_r^{k-1} + z_r^{k-2} + \ldots + z_r + 1)$$

ist. Ist ξ dagegen ein $Spin(8n)$-Bündel, dann ist $\rho^k_{\mathbb{R}}(\xi)$ von ξ durch die reelle virtuelle Darstellung induziert, deren Charakter

$$\prod_{1\le r\le 4n} \frac{z_r^{\frac{1}{2}k} - z_r^{-\frac{1}{2}k}}{z_r^{\frac{1}{2}} - z_r^{-\frac{1}{2}}} = \prod_{1\le r\le 4n} \left(z_r^{\frac{1}{2}(k-1)} + z_r^{\frac{1}{2}(k-3)} + \ldots + z_r^{-\frac{1}{2}(k-1)}\right)$$

ist.

Beweisidee: Splitting-Principle und Beweis für Linienbündel (im komplexen Fall).

Bemerkung 1.6

1. Der *Charakter* einer Darstellung $\alpha : G \to GL(n,\Lambda)$ ist die Λ-wertige Komposition

$$\chi_\alpha : G \xrightarrow{\alpha} GL(n,\Lambda) \xrightarrow{\text{Spur}} \Lambda\ .$$

2. Sei $T = S^1 \times \ldots \times S^1$ Der (bis auf Konjugation eindeutige) maximale Torus der kompakten Lie-Gruppe $U(n)$ ist gegeben durch

$$T = S^1 \times \ldots \times S^1 = \{\text{Diagonalmatrizen in } U(n)\}.$$

Die Inklusion $i : T \hookrightarrow U(n)$ induziert (wie in K-Theorie und Kohomologie) einen Monomorphismus $i^* : \mathcal{R}_\Lambda(U(n)) \to \mathcal{R}_\Lambda(T)$ der entsprechenden Darstellungsringe. Nun ist jede komplexe Darstellung (und jede virtuelle Darstellung) bis auf Isomorphie eindeutig durch ihren Charakter festgelegt. Ist z_i der Charakter, welcher durch die Projektion $p_i : T \to S^1$ auf den i-ten Faktor gegeben ist, so kann man Bild(i^*) mit den symmetrischen Polynomen in den z_i identifizieren.

Die kanonische Einbettung $U(4n) \hookrightarrow SO(8n)$ liefert einen maximalen Torus T in $SO(8n)$. Die Inklusion $T \hookrightarrow SO(8n)$ lässt sich zu einer Abbildung $i : T \to Spin(8n)$ liften, welcher einen Monomorphismus $i^* : \mathcal{R}_\Lambda(Spin(8n)) \to \mathcal{R}_\Lambda(T)$ induziert und dessen Bild die symmetrischen Polynome in $4n$ Variablen z_i sind, dessen Exponenten in den z_i alle von der Gestalt

$$(\frac{1}{2} \cdot \text{gerade}) \qquad \text{oder} \qquad (\frac{1}{2} \cdot \text{ungerade})$$

sind. Für $SO(8n)$ gilt die analoge Aussage ohne den Faktor $\frac{1}{2}$, welcher von der 2-blätrigen universellen Überlagerung $Spin(8n) \to SO(8n)$ kommt (dies gilt wegen $8n \geq 3$ für $k \in \mathbb{N}$).

3. Beispiel 1.5 wird garantieren, dass wir tatsächlich eine Erweiterung der Definition der ρ^k erhalten, d.h. wird ein virtuelles Bündel κ durch eine Bündel ξ repräsentiert, so gilt $\rho^k_\Lambda \cdot \kappa = \rho_\Lambda(\xi)$.

4. Die Folge der ρ^k (vgl. Def. 1.8) wird *exponentiell sein* und für

$$\varepsilon = \text{triviales Bündel der Dimension } 2n \text{ über } \mathbb{R}$$

wird $\rho^k(\varepsilon) = k^n$ gelten, so dass wir $\rho^k(-\varepsilon) = k^{-n}$ erhalten. Also sind wir gezwungen Nenner einzuführen, um $\rho^k(\kappa)$ für virtuelle Bündel κ zu definieren, d.h es wird $\rho^k(\kappa) \in K_\Lambda(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ gelten.

Allgemeiner erhalten wir für den Ring S durch S-lineare Fortsetzung über dem ersten Faktor

$$\begin{array}{lclcll}
\rho \cdot \alpha & \overset{\text{Œ}}{=} & (\phi \otimes s) \cdot \alpha & \overset{\text{Def.}}{=} & (\phi \cdot \alpha) \otimes s \rightsquigarrow \text{tens. virt. Darstellung} & \in \mathcal{R}_\Lambda(G) \otimes S \\
\psi \cdot \xi & \overset{\text{Œ}}{=} & (\theta \otimes s) \cdot \xi & \overset{\text{Def.}}{=} & (\theta \cdot \xi) \otimes s \rightsquigarrow \text{tens. virt. Bündel} & \in K_\Lambda(X) \otimes S \\
\mu \cdot f & \overset{\text{Œ}}{=} & (\kappa \otimes s) \cdot f & \overset{\text{Def.}}{=} & (\kappa \cdot f) \otimes s \rightsquigarrow \text{tens. virt. Bündel} & \in K_\Lambda(X) \otimes S
\end{array}$$

Wollen wir die Veknüpfung $\rho^k \cdot \theta$ für eine virtuelle Darstellung θ definieren, so müssen wir die die Vervollständigung des (tensorierten) Darstellungsrings einführen. Betrachte dazu das Ideal I in $\mathcal{R}_\Lambda(G) \otimes S$, welches aus Elementen von virtueller Dimension 0 besteht, d.h. diejenigen (tensorierten) virtuellen Darstellungen, deren Charakter auf der Identität von G verschwindet. Definiere

$$\operatorname{Comp}(\mathcal{R}_\Lambda(G) \otimes S) = \lim_{\infty \leftarrow m} \frac{\mathcal{R}_\Lambda(G) \otimes S}{I^m}$$

und analog $\operatorname{Comp}(K_\Lambda(X) \otimes S)$.

Erinnerung: Seien I, J Ideale in einem Ring R, dann ist das Produkt $I \cdot J$ definiert durch

$$I \cdot J := \left\{ \sum_{k=1}^{<\infty} a_k b_k \mid a_k \in I, b_k \in J \right\}.$$

Wir erhalten nun weitere Verknüpfungen

$$\begin{array}{lcl}
\hat{\rho} \cdot \alpha & \rightsquigarrow & \text{Element in } \operatorname{Comp}(\mathcal{R}_\Lambda(G) \otimes S) \\
\hat{\psi} \cdot \xi & \rightsquigarrow & \text{Element in } \operatorname{Comp}(K_\Lambda(X) \otimes S) \quad = \quad K_\Lambda(X) \otimes S,
\end{array}$$

denn Komposition mit einem Faktor von rechts erhält virtuelle Dimensionen und Tensorprodukte. Die letzte Gleichung gilt, weil für einen endlichen CW-Komplex X der Dimension q die Menge $(\tilde{K}(X))^{q+1}$ und damit I^{q+1} trivial ist, d.h. $(K_\Lambda(X) \otimes S)/I^m = K_\Lambda(X) \otimes S$ für alle $m \geq q+1$. Wir bemerken noch, dass alle Verknüfungen assoziativ sind.

Bemerkung 1.7 Sei $(G(n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine der Folgen von Gruppen

$$(G(n))_{n \in \mathbb{N}} \in \{(U(dn))_{n \in \mathbb{N}}, (SO(dn))_{n \in \mathbb{N}}, (Spin(dn))_{n \in \mathbb{N}}\}$$

für eine feste Zahl $d \in \mathbb{N}$. Seien

$$\pi_1 : G(n) \times G(m) \to G(n) \quad \text{und} \quad \pi_2 : G(n) \times G(m) \to G(m)$$

die Projektionen von $G(n) \times G(m)$ auf die beiden Faktoren, wir erhalten die *universelle Whitney-Summen-Abbildung*

$$\pi_1 \oplus \pi_2 : G(n) \times G(m) \to G(n+m), \quad (N, M) \mapsto \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix},$$

wobei für den Fall $G(n) = Spin(dn)$ die Abbildung $\pi_1 \oplus \pi_2$ als Liftung der entsprechenden Abbildung für $SO(dn)$ definiert wird. Beachte, dass π_1, π_2 und $\pi_1 \oplus \pi_2$ Darstellungen sind.

Definition 1.8 *Sei $\rho_n \in \mathcal{R}_\Lambda(G(n)) \otimes S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Folge $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

$$\text{exponentiell} \qquad \textit{falls} \quad \rho_{n+m} \cdot (\pi_1 \oplus \pi_2) = (\rho_n \cdot \pi_1) \otimes (\rho_m \cdot \pi_2) \quad \in \mathcal{R}_\Lambda(G(n) \times G(m)) \otimes S.$$

Analog definiert man eine exponentielle Folge $(\hat\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls $\hat\rho_n \in \mathrm{Comp}(\mathcal{R}_\Lambda(G(n)) \otimes S)$.

Lemma 1.9 *Sei $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine exponentielle Folge und $\alpha : H \to G(n)$, $\beta : H \to G(m)$ beliebige Darstellungen. Dann gilt*

$$\rho_{n+m} \cdot (\alpha \oplus \beta) = (\rho_n \cdot \alpha) \otimes (\rho_m \cdot \beta).$$

Sind weiterhin ξ, η zwei Bündel mit Strukturgruppen $G(n)$ bzw. $G(m)$, so folgt

$$\rho_{n+m} \cdot (\xi \oplus \eta) = (\rho_n \cdot \xi) \otimes (\rho_m \cdot \eta).$$

Es gilt die analoge Aussage für eine exponentielle Folge $(\hat\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Comp}(\mathcal{R}_\Lambda(G(n)) \otimes S)$.

Beweis: Wir zeigen nur die zweite Behauptung: Betrachte das kartesische Produkt $\xi \times \eta$ mit Strukturgruppe $G(n) \times G(m)$. Dann gilt

$$(\pi_1 \oplus \pi_2) \cdot (\xi \times \eta) = \xi \oplus \eta, \qquad \pi_1 \cdot (\xi \times \eta) = \xi \qquad \text{und} \qquad \pi_2 \cdot (\xi \times \eta) = \eta.$$

Weil $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ exponentiell ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} \rho_{n+m} \cdot (\xi \oplus \eta) &= \rho_{n+m} \cdot (\pi_1 \oplus \pi_2) \cdot (\xi \times \eta) &= ((\rho_n \cdot \pi_1) \otimes (\rho_m \cdot \pi_2))\,(\xi \times \eta) \\ &= (\rho_n \cdot \pi_1 \cdot (\xi \times \eta)) \otimes (\rho_m \cdot \pi_2 \cdot (\xi \times \eta)) &= (\rho_n \cdot \xi) \otimes (\rho_m \cdot \eta), \end{aligned}$$

Der Beweis der ersten Behauptung verläuft ähnlich.

Notation 1.10 Ist $(G(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \{(SO(dn))_{n\in\mathbb{N}}, (Spin(dn))_{n\in\mathbb{N}}\}$, so schreiben wir

$$K_{SO(d)} \qquad \text{bzw.} \qquad K_{Spin(d)}$$

für die entsprechenden Grothendieck-Gruppen K_G. Dabei ist $K_G(X)$ analog zu $K_\Lambda(X)$ definiert, nur lassen wir hier ausschließlich Bündel mit Strukturgruppen $G(n)$ zu. $\mathcal{R}_G(H) = \mathcal{R}_G(H)$ wird mit Darstellungen $\alpha : H \to G(n)$ der Gruppe H definiert. Für $d = 1$ schreiben wir K_{SO} für $K_{SO(d)}$. Die Gruppe K_{SO} lässt sich injektiv in $K_\mathbb{R}$ einbetten als die Untergruppe der Klassen κ, für welche die erste Stiefel-Whitney-Klasse $w_1(\kappa) = 0$ ist. Unter der Zerlegung

$$K_\mathbb{R}(X) = \mathbb{Z} \oplus \tilde K_\mathbb{R}(X) \qquad \Rightarrow \qquad K_{SO(d)}(X) = d\mathbb{Z} \oplus \tilde K_{SO}(X)$$

Lemma 1.11 *Sei $K \in \{K_\Lambda(X), \mathcal{R}_\Lambda(G)\}$, allgemein kann K ein beliebiger augmentierter Ring sein. Dann gilt*

1. *Ein Element in $\mathrm{Comp}(K \otimes S)$, dessen virtuelle Dimension in S invertierbar ist, ist selbst invertierbar in $\mathrm{Comp}(K \otimes S)$.*

2. *Sei $\hat c \in \mathrm{Comp}(K \otimes S)$ ein Elemente, dessen virtuelle Dimension eine Quadratwurzel in s besitzt, so dass $2s$ in S invertierbar ist. Dann besitzt $\hat c$ eine Quadratwurzel in $\mathrm{Comp}(K \otimes S)$, die bis auf das Vorzeichen eindeutig ist.*

Beweis: Wir beweisen nur Teil 2), der erste Teil wird ähnlich bewiesen.

2. Es gilt

$$\lim_{\infty \leftarrow m} \frac{K \otimes S}{I^m} = \left\{ (c_1, c_2, \dots) \in \frac{K \otimes S}{I} \times \frac{K \otimes S}{I^2} \times \dots \mid p_{m+1}(c_{m+1}) = c_m \right\},$$

wobei $p_{m+1} : \frac{K\otimes S}{I^{m+1}} \to \frac{K\otimes S}{I^m}$ die Quotientenabbildung ist (beachte $I^{m+1} \subset I^m \Rightarrow \frac{K\otimes S}{I^m} \subset \frac{K\otimes S}{I^{m+1}}$). Sei also $\hat c$ gegeben und sei c_m die Komponente von $\hat c$ in $\frac{K\otimes S}{I^m}$. Es genügt, für jedes m ein $i_m \in I/I^m$ zu finden mit

$$(s + i_m)^2 = c_m, \quad \in \quad \frac{K \otimes S}{I^m} \cong \frac{(\mathbb{Z} \oplus \tilde K) \otimes S}{I^m} \cong \frac{(\mathbb{Z} \otimes S)}{I^m} \oplus \frac{I}{I^m} \overset{?}{\cong} S \oplus \frac{I}{I^m}.$$

Wir beweisen diese Aussage durch Induktion nach m. Für $m = 1$ ist $c_1 \in \frac{\mathbb{Z}\otimes S}{I} \oplus \frac{I}{I}$ gerade die virtuelle Dimension und besitzt somit nach Voraussetzung die Quadratwurzel $s \in S$, so dass mit $0 \in \frac{I}{I} = \{0\}$ die Gleichung erfüllt ist. Nehmen wir also an, dass ein solches Element existiert und (bis auf Vorzeichen) eindeutig ist für ein beliebiges, aber fest gewähltes $m \in \mathbb{N}$. Wähle ein Element $s + j_m \in \frac{K \otimes S}{I^{m+1}}$ mit $p_{m+1}(s + j_m) = s + i_m \in \frac{K \otimes S}{I^m}$. Dann folgt

$$(s + j_m)^2 = c_m - \varepsilon_m, \quad \text{wobei } \varepsilon_m \in \frac{I^m}{I^{m+1}}.$$

Wenn nun $\frac{K \otimes S}{I^{m+1}}$ überhaupt eine Quadratwurzel $s + i_{m+1}$ von c_{m+1} enthält, so muss diese von der Gestalt $s + j_m + \delta_m$ sein, und da nach Induktionsannahme die Quadratwurzel $s + i_m$ eindeutig ist, ergibt sich aus

$$(p_{m+1}(s + j_m + \delta_m))^2 = p_{m+1}((s + j_m + \delta_m)^2) = p_{m+1}(c_{m+1}) = c_m = (s + i_m)^2 \quad \Rightarrow \quad \delta_m \in \frac{I^m}{I^{m+1}}$$

Setzen wir als $\delta_m \in \frac{I^m}{I^{m+1}}$ voraus, so ist die Gleichung

$$(s + j_m + \delta_m)^2 = c_{m+1} \quad \text{in } \frac{K \otimes S}{I^{m+1}} \text{ äquivalent zu } \quad 2s\delta_m = \varepsilon_m \quad \text{in } \frac{I^m}{I^{m+1}},$$

und letztere Gleichung lässt sich nach Voraussetzung eindeutig nach δ_m auflösen. Wir haben also gezeigt, dass für jedes m eine (bis auf Vorzeichen) eindeutige Quadratwurzel in $\frac{K \otimes S}{I^m}$ der virtuellen Dimension s hat, also gilt dasselbe für $\hat{c}$.

1. Der erste Teil kann analog bewiesen werden.

Lemma 1.12 *Sei $\hat{\rho} = (\hat{\rho}_n)$ eine exponentielle Folge in $\mathrm{Comp}(\mathcal{R}_\Lambda(G(n)) \otimes S)$ und die virtuelle Dimension von $\hat{\rho}_1$ sei invertierbar in S. Sei $\theta \in \mathcal{R}_G(H)$ und $\kappa \in K_G(X)$. Dann können Verknüpfungen*

$$\hat{\rho} \cdot \theta \quad \in \mathrm{Comp}(\mathcal{R}_\Lambda(H) \otimes S) \qquad \textit{und} \qquad \hat{\rho} \cdot \kappa \quad \in \mathrm{Comp}(\mathcal{R}_\Lambda(X) \otimes S) = K_\Lambda(X) \otimes S$$

mit folgenden Eigenschaften definiert werden:

1. *$\hat{\rho}$ ist exponentiell (d.h. $\hat{\rho} \cdot (\theta + \phi) = (\hat{\rho} \cdot \alpha) \cdot (\hat{\rho} \cdot \beta))$, vgl. Lemma 1.9)*
2. *Ersetzen wir $\hat{\rho}$ durch α bzw. κ durch ξ, so ergeben sich die zuvor definierten Veknüpfungen.*

Beweis: Sei s die virtuelle Dimension von $\hat{\rho}_1$. Dann ist s^n die virtuelle Dimension von $\hat{\rho}_n$, denn

$$\hat{\rho}_n \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \pi_i \right) \overset{\hat{\rho} \text{ exponentiell}}{=} \bigotimes_{i=1}^{n} \rho_1(\pi_i).$$

Es ist s^n in S invertierbar, weil nach Voraussetzung s in S invertierbar ist. Lemma 1.10.(1) beweist, dass jedes der Elemente $\hat{\rho} \cdot \alpha$ bzw. $\hat{\rho} \cdot \xi$ invertierbar ist, weil ihre virtuelle Dimension invertierbar ist. Wir definieren $(\hat{\rho}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als expoenentielle Folge auf auf der freien abelschen Gruppe F, welche von den Isomorphieklassen von Bündeln ξ bzw. Darstellungen α erzeugt wird. Es ist nur noch zu zeigen, dass $(\hat{\rho}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf den Quotienten $\mathcal{R}_G(H)$ bzw. $K_G(X)$ wohldefiniert ist, dies folgt jedoch mit Lemma 1.9 aus der Tatsache, dass $(\hat{\rho}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ exponentiell ist.

Bemerkung 1.13 Wir führen die letzte verallgemeinerte Verknüpfung ein. Sei $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine additive Sequenz (d.h. sie respektiert direkte Summe, analog zu exponentiellen Sequenzen) von virtuellen Darstellungen mit $\theta_n \in \mathcal{R}_\Lambda(G(n))$. Durch S-Linearität über dem zweiten Faktor können wir

$$(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}} \cdot \mu \quad \in K_\Lambda(X) \otimes S \qquad \text{bzw.} \qquad (\theta_n)_{n \in \mathbb{N}} \cdot \rho \quad \in \mathcal{R}_\Lambda(G(n)) \otimes S$$

definieren. Ist außerdem θ multiplikativ (in der offensichtlichen Weise) und bildet Elemente von virtuellem Grad 0 auf Elemente von virtuellem Grad 0 ab, so können wir

$$(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}} \cdot \hat{\rho} \quad \in \mathrm{Comp}(\mathcal{R}_\Lambda(G(n)) \otimes S)$$

erklären. Diese Situation tritt zum Beispiel auf, falls $\theta_k = \Psi^k$ die Adams-Operation ist. Die entsprechende Assoziativgesetze sind weiterhin für alle Kompositionen gültig.

1.3 Exponentielle Sequenzen: Beispiel

Definition 1.14 *Für $k \in \mathbb{N}$ sei $Q_k = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{k}\right]$ die additive Gruppe von Brüchen der Form $\frac{p}{k^q}$, wobei $p, q \in \mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}$.*

Beispiel 1.15 Sei $\rho_n^k \in \mathcal{R}_{\mathbb{C}}(U(n)) = \mathcal{R}_{\mathbb{C}}(U(n))$ mit Charakter

$$\prod_{1\leq r\leq n} \frac{z_r^k - 1}{z_r - 1}$$

Die Folge ist exponentiell, wie man anhand der Charaktere überprüft. Die virtuelle Dimension von ρ_1^k ist k, denn

$$\frac{z_1^k - 1}{z_1 - 1} = z_1^{k-1} + z_1^{k-2} + \ldots + z_1 + 1$$

hat an der Stelle $z_1 = 1$ den Wert k. Für $k = 0$ gilt $\rho_n^k = 0$, andernfalls ist k invertierbar in $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$. Für $\kappa \in K_{\mathbb{C}}(X)$ können wir also mit Lemma 1.13 $(\rho_n^k)_{n\in\mathbb{N}} \cdot \kappa$ als Element von $K_{\mathbb{C}}(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ definieren. Wenn κ von einem $U(n)$-Bündel ξ repräsentiert wird, so gilt $\rho^k \cdot \kappa = \rho_{\mathbb{C}}^k(\xi)$.

Joachim hat in seinem Vortrag die Klassen $\rho_{\mathbb{R}}^k(\xi)$ definiert für den Fall, dass ξ ein $Spin(8n)$-Bündel über einem endlichen CW-Komplex X ist. Es wäre daher plausibel, $\rho^k(\kappa)$ für virtuelle Bündel $\kappa \in K_{Spin(8)}(X)$ zu definieren. Tatsächlich definiert Adams die Klassen $\rho^k(\kappa)$ für $\kappa \in K_{SO(2)}(X)$, d.h. κ ist eine Linearkombination von $SO(2n)$-Bündeln, $n \in \mathbb{N}$. Er unterscheidet dabei zwei Fälle: *„k ungerade"* und *„k gerade"*.

Beispiel 1.16 Sei k ungerade. Betrachte die Formel

$$\prod_{1\leq r\leq n} \frac{z^{\frac{1}{2}k} - z^{-\frac{1}{2}k}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}} = \prod_{1\leq r\leq n} \left(z_r^{\frac{1}{2}(k-1)} + z_r^{\frac{1}{2}(k-3)} + \ldots + z_r^{-\frac{1}{2}(k-1)}\right)$$

Dies ist ein Polynom, in dem die z_r als ganzzahlige Potenzen auftreten. Es stellt sich heraus, dass es invariant unter der Weyl-Gruppe von $SO(2n)$ ist und somit der Charakter einer virtuellen Darstellung ρ_n^k von $SO(2n)$ sein muss. Weiterhin ist diese Darstellung sogar reell. Wir erhalten daher eine Folge $(\rho_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen virtuellen Darstellungen

$$\rho_n^k \quad \in \mathcal{R}_{\mathbb{R}}(SO(2n)) = \mathcal{R}_{\mathbb{R}}(SO(2n))$$

mit den angebenen Charakteren. Man rechnet wieder nach, dass die Folge exponentiell ist und die virtuelle Dimension von ρ_1^k gleich k. Wie zuvor kann man für $\kappa \in K_{SO(2)}(X)$ das Elemente $\rho^k \cdot \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ in $K_{\mathbb{R}}(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ definieren. Wird κ von einem $Spin(8n)$-Bündel repräsentiert, so gilt $\rho^k \cdot \kappa = \rho_{\mathbb{R}}^k(\xi)$.

Beispiel 1.17 Sei k gerade. Adams konstruiert eine Folge von Elementen

$$\rho_n^k \quad \in \mathrm{Comp}(\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(SO(2n)) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}])$$

in der Vervollständigung des Darstellungsrings folgendermaßen. Er betrachtet zunächst die virtuelle Darstellung θ_n^k von $Spin(2n)$, deren Charakter durch

$$\prod_{1\leq r\leq n} \frac{z^{\frac{1}{2}k} - z^{-\frac{1}{2}k}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}}$$

gegeben ist und stellt fest, dass

$$\theta_n^k \in \mathcal{R}_{\mathbb{R}}(Spin(2n)) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}] = \mathcal{R}_{\mathbb{R}}(Spin(2n)) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}].$$

Der Charakter dieser Elemente ist wohldefiniert und ist eine endliche Laurentreihe in den z_r mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$. Außerdem lassen sich die Elemente anhand ihres Charakters unterscheiden, und es lässt sich somit wie in den vorangegangenen Beispielen überprüfen, dass θ_n^k exponentiell ist. Betrachte nun die Abbildung

$$id \oplus id : SO(2n) \to SO(4n), \quad M \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}.$$

Diese liftet zu einem eindeutigen Homomorphismus

$$\tau : SO(2n) \to Spin(4n)$$

und wir definieren

$$\rho_n^k = \sqrt{\theta_{2n}^k \cdot \tau} \quad \in \mathrm{Comp}(\mathcal{R}_{\mathbb{R}}(SO(2n)) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]) = \mathcal{R}_{\mathbb{R}}(SO(2n)).$$

Die Wurzeln existieren wegeb Lemma 1.12.(2) und wir wählen das Vorzeichen so, dass die virtuelle Dimension von ρ_n^k gleich k^n ist. Da die Folge der θ_n^k exponentiell ist und die Wurzeln eindeutig sind, ist auch die Folge der ρ_n^k exponentiell. Die virtuelle Dimension von ρ_1^k ist wieder k und dasselbe Verfahren wie zuvor liefert für $\kappa \in K_{SO(2)}(X)$ Elemente $\rho^k \cdot \kappa \in K_{\mathbb{R}}(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$. Wird κ durch ein $Spin(8n)$-Bündel ξ repräsentiert, so gilt $\rho^k \cdot \kappa = \rho_{\mathbb{R}}^k(\xi)$.

1.4 Berechnung der Operationen $\rho_{\mathbb{R}}^k$ auf $\tilde{K}_{SO}(\mathbb{R}P^n)$, $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^n)$ für $n \equiv 1, 2$ mod 8 und $n \geq 2$ sowie $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{4n})$

Bemerkung 1.18 Sei ξ das kanonische Linienbündel über $\mathbb{R}P^n$. Dann gilt $\xi^2 = 1$ und $\lambda = \xi - 1$ ist ein Erzeuger von $K_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P^n)$. Letztere Gruppe ist zyklisch von der Ordnung 2^f (vgl. Adams: *Vectorfields on Spheres*), wobei f die Anzahl der ganze Zahlen s mit $0 < s \leq n$ ist, für die $s \equiv 0, 1, 2$ oder 4 mod 8 gilt. Insbesondere gilt $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P^n) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}] = 0$, wenn k gerade ist (da $\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$), so dass der einzige interessante Fall *„k ungerade"* bleibt.
Die Operation ρ^k ist auf $K_{SO(2)}(X)$ definiert (vgl. Beispiele 1.17 und 1.18), so dass ρ^k auf allen Vielfachen von 2λ in $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P^n)$ erklärt ist. Der Wert $2l\lambda$ wird in der multiplikativen Gruppe

$$1 + \tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P^n) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}] \cong 1 + \tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P^n)$$

der Elemente von virtueller Ordnung 1 liegen.
Um die Struktur dieser Gruppe transparenter zu machen, definieren wir $\mathbb{Z}/2^{f+1} =: J_{2^{f+1}}$ als den Restklassenring modulo 2^{f+1}, und $G_{2^{f+1}}$ als die multiplikative Gruppe der ungeraden Restklassen modulo 2^{f+1}. Dann gilt $J_{2^{f+1}} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}] \cong J_{2^{f+1}}$ für ungerade k (da k teilerfremd zur Gruppenordnung 2^{f+1} der zyklischen Gruppen $J_{2^{f+1}}$ und somit $\frac{1}{k}$ bereits eine Einheit in $J_{2^{f+1}}$ ist); und wir können einen Ringhomomorphismus

$$\alpha : K_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P^n) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}] \to J_{2^{f+1}} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$$

durch $\alpha(\xi) = -1$ (bzw. äquivalent $\alpha(\lambda) = -2$) erklären. Diese Abbildung α induziert einen Isomorphismus

$$1 + \tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P^n) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}] \cong G_{2^{f+1}}.$$

Die Untergruppe $1 + \tilde{K}_{SO}(\mathbb{R}P^n) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ (definiert als orientierte Bündel) wird von α auf die Gruppe der Restklassen abgebildet, welche kongruent zu 1 mod 4 sind.

Satz 1.19 *Die Operationen ρ^k auf $\tilde{K}_{SO}(\mathbb{R}P^n)$ sind gegeben durch*

$$\rho^k(2l\lambda) = 1 + \frac{k^l - \varepsilon^l}{2k^l}\lambda, \qquad \textit{wobei} \quad \varepsilon = \begin{cases} 1 & \textit{falls } k \equiv 1 \bmod 4 \\ -1 & \textit{falls } k \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}.$$

Äquivalent sind sie gegeben durch

$$\alpha(\rho^k(2l\lambda) = \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^l.$$

Beweis: Sei $i : O(1) \to SO(2l), \pm 1 \mapsto \pm 1$. Dann gilt $2l\xi = i\xi$. Wir berechnen die Darstellung $\rho_l^k i$ von $O(1)$, wobei ρ_l^k wie in Beispiel 1.17 ist. Der Wert des Charakters von ρ_l^k an der Stelle 1 ist k^l. Ersetzen wir $z_1 = -1$, so gilt

$$z_r^{\frac{1}{2}(k-1)} + z_r^{\frac{1}{2}(k-3)} + \ldots + z_r^{-\frac{1}{2}(k-1)} \quad = \quad \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \equiv 1 \bmod 4 \\ -1 & \text{falls } k \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}.$$

Also ist der Wert des Charakters an der Stelle -1 genau ε^l. Sei λ^1 die Identitätsdarstellung von $O(1)$, dann ergibt sich

$$\rho_l^k i = a + b\lambda^1 \qquad \text{wobei} \begin{cases} a + b = k^l & \text{(wegen Wert } k^l \text{ an der Stelle 1)} \\ a - b = \varepsilon^l & \text{(wegen Wert } \varepsilon^l \text{ an der Stelle } -1) \end{cases}.$$

Daraus folgt

$$\rho_l^k(2l\varepsilon) = \rho_l^k i\xi = a + b\xi \quad \Rightarrow \quad \alpha(\rho_l^k(2l\xi)) = a - b = \varepsilon^l \quad (\text{wegen } \alpha(\xi) = -1) \quad \overset{\lambda=\xi-1}{\Rightarrow} \quad \alpha(\rho_l^k(2l\lambda)) = \frac{\varepsilon^l}{k^l}$$

Dieselbe Methode liefert den ersten Teil der Aussage.

Bemerkung 1.20 Wir betrachten nun den Fall $X = S^n$ für $n \equiv 1, 2 \bmod 4$. In diesem Fall gilt

$$\tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^n) \cong \mathbb{Z}/2 \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^n) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}] = 0 \quad \text{falls } k \text{ gerade.}$$

Also bleibt „*k ungerade*" der einzig interessante Fall. Die Operation ρ^k ist auf $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^n)$ für $n \geq 2$ definiert (wir müssen garantieren, das jedes Element isomorph zu einem Spin-Bündel ist, d.h. die erste und zweite Stiefel-Whitney-Klasse müssen verschwinden. Für $n > 2$ verschwinden die relevanten Gruppen, für $n = 2$ scheint es auch zu gehen).

Satz 1.21 *Sei $n \equiv 1, 2$ mod 8 und $n \geq 2$. Dann sind die Operationen ρ^k auf $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^n)$ gegeben durch*

$$\rho^k(x) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } k \equiv 1, 7 \bmod 8 \\ 1 + x & \textit{falls } k \equiv 3, 5 \bmod 8 \end{cases}$$

Beweis: Betrachte eine Abbildung $g : \mathbb{R}P^n \to S^n$ vom Grad 1. Dann ist die Abbildung

$$g^* : \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^n) \to \tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P^n)$$

injektiv und wir können $\rho^k(x)$ mit Satz 1.20 durch die Natürlichkeit der Klassen ρ^k berechnen. Für $x = 0$ ist das Resultat trivial, sei also ohne Einschränkung $x \neq 0$. Dann gilt $g^*x = 2^{f-1}\lambda$, wobei 2^f die Ordnung des Erzeugers $\lambda = \xi - 1$ von $K_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P^n)$ ist. Es gilt

$$1 + \tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P^n) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}] \overset{k \text{ ungerade}}{\cong} 1 + \tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P^n) \overset{\text{via } \alpha}{\cong} G_{2^{f+1}}.$$

Lemma: *Sei $J_m = \mathbb{Z}/m$ der Restklassenring modulo m und G_m die multiplikative Einheitengruppe in J_m, d.h. die Menge aller Restklassen von ganzen Zahlen, welche teilerfremd zu m sind. Gilt $m = p^f$ und $f \geq 2$, dann ist G_m die direkte Summe der Untergruppe bestehend aus ± 1 und der Untergruppe von Restklassen, welche kongruent zu 1 mod 4 sind. Letztere Untergruppe ist zyklisch von der Ordnung 2^{f-2}.*

Also ist in diesem Fall $G_{2^{f+1}} \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2^{f-1}$. Die (multiplikative) Ordnung des Elementes $\frac{\varepsilon}{k}$ (vgl. Satz 1.20) teilt 2^{f-2}, wenn $k \equiv 1, 7 \bmod 8$; und sie teilt 2^{f-1}, wenn $k \equiv 3, 5 \bmod 8$. Also folgt

$$\alpha(\rho^k(2^{f-1}\lambda)) = \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{2^{f-2}} = \begin{cases} = 1 & \text{falls } k \equiv 1, 7 \bmod 8 \\ \neq 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Aber wenn $\rho^k(x) \neq 1$, muss $\rho^k(x) = 1 + x$ gelten. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Satz 1.22 *Sei $X = S^{4n}$ und $x \in \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{4n})$. Dann gilt*

$$\rho^k(x) = 1 + \frac{1}{2}(k^{2n} - 1)\alpha_{2n}x.$$

Bemerkung 1.23 Es gilt $\alpha_{2n} = \frac{(-1)^{2n-1}B_n}{2n}$, wobei B_n die n-te Bernoulli-Zahl ist. Weiterhin gilt für die Koeffizienten

$$\frac{1}{2}(k^{2n} - 1)\alpha_{2n} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{k}].$$

Beweis des Satzes 1.23: Da x in der reduzierten K-Theorie der $4n$-dimensionalen Sphäre liegt, ist x eine Linearkombination von *Spin*-Bündeln, weiterhin können wir ohne Einschränkung annehmen, dass dies $Spin(8m)$-Bündel sind (für verschiedene Werte von m), ansonsten addiere triviale Bündel von passender Dimension. Eine Proposition aus Joachim's Vortrag liefert für jedes Bündel

$$\underbrace{sh(x)}_{=bh_{\mathbb{R}}(x)} \cdot (ch_{\mathbb{C}}c(\rho^k(x))) \overset{\text{Prop.}}{=} k^{\dim x}\Psi_H^k sh(x) \overset{x\in\tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{4n})}{=} \Psi_H^k sh(x)$$

Außerdem erhält man aus einem Korollar desselben Vortrags

$$\log sh(x) \overset{\text{Kor.}}{=} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2}\alpha_{2s} ch_{2s} c(x), \qquad \text{wobei} \quad \log 1+x = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} x^s \text{ für } x \in \sum_{t=1}^{\infty} H^{2t}(S^{4n}; Q)$$

wobei c die Komplexifizierung bezeichnet. In diesem Fall sind bis auf den Fall $t = 2n$ alle relevanten Kohomologiegruppen trivial. Wegen $sh(x) \in K^*(S^{4n}; \mathbb{Q})$ tritt also nur für $s = n$ ein von Null verschiedener Term auf. Außerdem gilt immer die Relation $x^2 = 0$ und somit

$$\frac{1}{2}\alpha_{2n} ch_{2n} c(x) \overset{\text{Kor.}}{=} \log sh(x) \overset{x^2=0}{=} sh(x) - 1 \qquad \Rightarrow \qquad sh(x) = 1 + \frac{1}{2}\alpha_{2n} ch_{2n} c(x)$$

Daraus folgt wegen $\Psi_H^k(x) = k^s x$ für $x \in H^{2s}(X; \mathbb{Q})$, dass für $s = 4n$ sich die rechte Seite der Gleichung zu

$$\Psi_H^k(sh(x)) = 1 + \frac{1}{2}k^{2n}\alpha_{2n} ch_{2n} cx$$

berechnet. Daraus folgt

$$(1 + \frac{1}{2}\alpha_{2n} ch_{2n} c(x)) \cdot (ch_{\mathbb{C}} c(\rho^k(x))) = 1 + \frac{1}{2}k^{2n}\alpha_{2n} ch_{2n} cx$$

d.h. für $\rho^k(x) = 1 + \frac{1}{2}(k^{2n} - 1)\alpha_{2n} x$ erhalten wir

$$(1 + \frac{1}{2}\alpha_{2n} x) \cdot (1 + \frac{1}{2}(k^{2n} - 1)\alpha_{2n} x) \overset{x^2=0}{=} 1 + \frac{1}{2}\alpha_{2n} x + 1 + \frac{1}{2}(k^{2n} - 1)\alpha_{2n} x = 1 + \frac{1}{2}k^{2n}\alpha_{2n} x$$

und damit die Behauptung wegen der Eigenschaften des Charakters.

2 Die untere Schranke J'

2.1 Konstruktion

Wir erinnern uns, das $K_{SO(2)}(X)$ sich in $K_{\mathbb{R}}(X)$ einbetten lässt als Untergruppe der Elemente x, für die (i) erste Stiefel-Whitney-Klasse $w_1(x)$ verschwindet und (ii) die virtuelle Dimension von x gerade ist.

Definition 2.1

$$V(X) := \left\{ x \in K_{SO(2)}(X) \mid \exists y \in \tilde{K}_{\mathbb{R}}(X) \ : \ \rho^k(x) = \frac{\Psi^k(1+y)}{1+y} \in K_{\mathbb{R}}(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}] \ \forall \ k \neq 0 \right\}$$

Lemma 2.2 *$V(X)$ ist eine Untergruppe von $K_{\mathbb{R}}(X)$.*

Beweis: Sei $x \in V(X)$. Dann hat x virtuelle Dimension 0, denn: Betrachte ein triviales Bündel x der Dimension n. Dann gilt wegen der Eigenschaften der Adams-Operation $\rho^k(x) = k^n$. Aber für $y \in \tilde{K}_{\mathbb{R}}(X)$ ist $1 + y$ ein 1-dimensionales Bündel und bleibt unter der Adams-Operation ein 1-dimensionales Bündel, d.h. $\Psi^k(1+y)/(1+y)$ ist ein 1-dimensionales Bündel. Also kann $\rho^k(x) = k^n x = \Psi^k(1+y)/(1+y)$ nur für $n = 0$ erfüllt sein. Sei

$$1 + \tilde{K}_{\mathbb{R}}(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}] := \text{multiplikative Gruppe der Elemente von virtueller Dimension 1 in } K_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$$

Sei weiter

$$\Pi := \text{multiplikative Gruppe} \prod_{k\neq 0} (1 + \tilde{K}_{\mathbb{R}}(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}])$$

Wir definieren eine Funktion

$$\delta : \left(1 + \tilde{K}_{\mathbb{R}}(X)\right) \to \Pi, \quad (1+y) \mapsto \left(\frac{\Psi^k(1+y)}{1+y}\right)_{k\neq 0}.$$

Da Ψ^k multiplikativ für jedes k ist, ist δ ein Homommorphismus. Ebenso ist die Funktion

$$\rho : \tilde{K}_{SO}(X) \to \Pi, \quad x \mapsto (\rho^k(x))_{k\neq 0}$$

ein Homomorphismus und deshalb die Menge

$$V(X) = \rho^{-1}(\delta(1 + \tilde{K}_{\mathbb{R}}))$$

eine Unterguppe.

Definition 2.3

$$J'(X) := \frac{K_{\mathbb{R}}(X)}{V(X)}$$

Satz 2.4 *$J'(X)$ is eine untere Schranke für $J(X)$ in folgendem Sinn: Es gilt $T(X) \subset V(X)$ und die Quotientenabbildung $K_{\mathbb{R}}(X) \to J'(X)$ faktorisiert durch einen Epimorphismus $J(X) \to J'(X)$, d.h. wir haben folgendes Diagramm:*

$$\begin{tikzcd}
K_{\mathbb{R}}(X) \arrow[r, "\text{Quotientenabbildung}"] \arrow[dr, "\text{Quotientenabbildung}"'] & J(X) \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\exists\ \text{Epimorphismus}"] & K_{\mathbb{R}}(X)/T(X) \\
& J'(X) \arrow[r, equal] & K_{\mathbb{R}}(X)/V(X)
\end{tikzcd}$$

Beweis: Wir erinnern uns an Marco's Vortrag und an die Definition von $T(X)$ als Untergruppe von $K_{\mathbb{R}}(X)$, welche von allen Elementen der Form $[\xi] - [\eta]$ erzeugt wird, wobei ξ und η orthogonale Bündel waren, deren zugehörige Sphärenbündel faserhomotopieäquivalent sind.
Sein X ein gegebener endlicher CW-Komplex. *Dann wird $T(X)$ von Elementen $[\xi'] - [\eta']$ erzeugt, wobei ξ' und η' orthogonale Bündel sind, deren assoziierte Sphärenbündel faserhomotopieäquivalent sind (soweit nichts neues) und η' ist trivial mit durch 8 teilbarer Dimension.* Seien nämlich ξ und η orthogonale Bündel über X, deren assoziierte Sphärenbündel faserhomotopieäquivalent sind. Dann gilt dasselbe für die Whitney-Summen $\xi \oplus \zeta$ und $\eta \oplus \zeta$ für ein beliebiges Bündel ζ und es gilt

$$[\xi \oplus \zeta] - [\eta \oplus \zeta] = [\xi] - [\eta].$$

Wir können weiterhin ζ immer derart wählen, dass $\eta \oplus \zeta$ ein triviales Bündel ist mit durch 8 teilbarer Dimension.
Seien nun ξ' und η' wie zuvor. Dann verschwinden die Stiefel-Whitney-Klassen von ξ', da Stiefel-Whitney-Klassen Faserhomotopieinvarianten sind, denn $\xi' \oplus \eta'$ ist trivial (da ξ' und η' orthogonal), ebenso η nach Konstruktion, d.h. die Stiefel-Whitney-Klassen verschwinden. Also gilt auch wegen

$$0 = w_k(\xi' \oplus \eta') \overset{\text{Prod.formel}}{=} \sum_{i+j=k} w_i(\xi') \underbrace{w_j(\eta')}_{=\delta_{j0}} = w_k(\xi') \qquad \text{für alle } k > 0.$$

Insbesondere können wir ξ' zu einem $Spin(8n)$-Bündel liften. Korollar 1.1 findet Anwendung und zeigt die Existenz eines $y \in \tilde{K}_{\mathbb{R}}(X)$ derart, dass

$$\rho^k(\xi') = \rho^k(\eta') \cdot \frac{\Psi^k(1+y)}{1+y}$$

für alle k, d.h.

$$\rho^k([\xi'] - [\eta']) = \frac{\Psi^k(1+y)}{1+y}$$

in $K_{\mathbb{R}}(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$, da die ρ^k exponentiell sind. Dies beweist $[\xi'] - [\eta'] \in V(X)$ und somit $T(X) \subset V(X)$.

2.2 Beispiele: $J'(\mathbb{R}P^n)$, $J'(S^n)$ für $n \equiv 1, 2$ mod 8 und $J'(S^{4n})$

Beispiel 2.5 *Sei $X = \mathbb{R}P^n$. Dann ist die Quotientabbildung*

$$K_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}Pn) \to J'(\mathbb{R}P^n)$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Die Gruppe $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P^n)$ ist von der Ordnung 2^f und daher verschwindet $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P^n) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ für gerade k. Es genügt daher ungerade k zu betrachten und in diesem Fall gilt

$$\tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P^n) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}] \cong \tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P^n)$$

Die Adams-Operation liefert für ungerade k und $y \in \tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P^n)$

$$\frac{\Psi^k(1+y)}{1+y} = 1.$$

Für jedes Element $v \in V(\mathbb{R}P^n)$ gilt daher (i) $\rho^k(v) = 1$ für alle ungeraden k, und (ii) verschwindet wegen $V(X) \subset K_{SO(2)}(X)$ die erste Stiefel-Whitney-Klasse $w_1(v)$ für jedes Element $v \in V(\mathbb{R}P^n)$.
Bedingung sichert (ii) sichert, dass v ein gerades Vielfaches $v = 2l\lambda$ des Erzeugers λ von $K_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P^n)$ ist (und disposes (?) aus dem niedrigdimensionalen Fall $n = 1$.) Nach Satz 1.22 hat für $k \equiv 3, 5$ mod 8 das Elemente $\rho^k(2\lambda)$ die Ordnung 2^{f-1} in der multiplikativen Gruppe $1 + \tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P^n)$. Daher impliziert die Bedingung (i) $\rho^k(2l\lambda) = 1$ für alle ungeraden k, dass l durch die Ordnung 2^{f-1} teilbar ist, d.h. $2l\lambda = 0$ in $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P^n)$.
Also folgt $V_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P^n) = 0$, denn jedes Element $x \in V(X)$ hat virtuelle Dimension 0, d.h. $V(X) \subset \tilde{K}_{\mathbb{R}}(X)$, und somit die Behauptung.

Beispiel 2.6 *Sei $X = S^n$ mit $n \equiv 1, 2 \mod 8$. Dann ist die Quotientenabbildung*

$$K_{\mathbb{R}}(S^n) \to J'(S^n)$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Wir betrachten wieder eine Abbildung $f : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{S}^n$ vom Grad 1, so dass die induzierte Abbildung

$$f^* : \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^n) \to \tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{RP}^n)$$

ein Monomorphismus ist. Betrachte das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
K_{\mathbb{R}}(S^n) \arrow[r, "K(f)"] \arrow[d, "q_{S^n}"'] & K_{\mathbb{R}}(\mathbb{RP}^n) \arrow[d, "q_{\mathbb{RP}^n}"] \\
J'(S^n) \arrow[r, "J'(f)"] & J'(\mathbb{RP}^n)
\end{tikzcd}$$

Da $K(f)$ ein Monomorphismus ist und $q_{\mathbb{RP}^n}$ ein Isomorphismus, muss auch q_{S^n} ein Monomorphismus und damit ein Isomorphismus sein.

Beispiel 2.7 *Sei $X = S^{4n}$ Dann ist $J'(S^{4n})$ zyklisch von der Ordnung $m(2n)$.*

Beweis: Sei $x \in V(S^{4n})$, d.h. es gilt

$$\rho^k(x) = \frac{\Psi^k(1+y)}{1+y}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Mit Satz 1.23 erhalten wir

$$1 + \frac{1}{2}(k^{2n} - 1)\alpha_{2n}x = 1 + (k^{2n} - 1)y \qquad (*)$$

für α_{2n} mit $\frac{1}{2}\alpha_{2n} = \frac{d(2n)}{m(2n)}$ wie in Joachim's Vortrag, wobei $d(2n)$ und $m(2n)$ teilerfremd sind. Gleichung $(*)$ ist in $1 + \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{4n}) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ gültig, in $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{4n})$ haben wir nach Definition von $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$

$$k^{f(k)}(k^{2n} - 1)\frac{d(2n)}{m(2n)}x = k^{f(k)}(k^{2n} - 1)y \qquad (**)$$

für einen geeigneten Exponenten $f(k)$. Ein weiterer Satz aus Joachim's Vortrag besagt, dass der größte gemeinsame Teiler der Zahlen $\{k^{f(k)}(k^{2n} - 1)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ein Teiler von $m(2n)$ ist. Also können wir mit einer Linearkombination der Gleichung $(**)$ zeigen, dass

$$d(2n)x = m(2n)y.$$

Also ist x durch $m(2n)$ teilbar in $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{4n})$.
Umgekehrt sei x durch $m(2n)$ Gleichung

$$d(2n)x = m(2n)y$$

nach y lösen und berechnen dann, dass

$$\rho^k(x) = \frac{\Psi^k(1+y)}{1+y}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt, d.h. $x \in V(S^{4n})$.

3 Die obere Schranke J''

3.1 Konstruktion

Definition 3.1 *Eine* Ψ-Gruppe *ist eine abelsche Gruppe Y zusammen mit gegebenen Endomorphismen $\Psi^k : Y \to Y$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Eine* Ψ-Homomorphismus *$f : Y_1 \to Y_2$ ist eine Gruppenhomomorphismus von Ψ-Gruppen Y_1, Y_2, welcher mit den Endomorphismen Ψ^k für alle $k \in \mathbb{Z}$ kommutiert, d.h.*

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Psi_1^k"'] & Y_2 \arrow[d, "\Psi_2^k"] \\
Y_1 \arrow[r, "f"] & Y_2
\end{tikzcd}$$

ist ein kommutatives Diagramm für alle $k \in \mathbb{Z}$. Eine Ψ-Untergruppe *ist eine Untergruppe U von Y, so dass die Inklusion $U \hookrightarrow Y$ eine Ψ-Abbildung ist. Eine* Ψ-Quotientengruppe *ist eine Quotientengruppe Y/U, so dass die Projektion $Y \twoheadrightarrow Y/U$ eine Ψ-Abbildung ist.*

Beispiel 3.2 Die Gruppen $K_\Lambda(X)$ sind Ψ-Gruppen mit der Adams-Operation Ψ^k

Definition 3.3 *Sei Y eine Ψ-Gruppe und $e : \mathbb{Z} \times Y \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion, die jedem Paar (k, y) eine nicht-negative ganze Zahl $e(k, y)$ zuordnet. Dann definiert man die Untergruppe*

$$Y_e := \left\langle k^{e(k,y)}(\Psi^k - 1)y \right\rangle = \left\{ \sum_{(k,y)\in\mathbb{Z}\times Y} a(k, y)k^{e(k,y)}(\Psi^k - 1)y \right\} \subset Y,$$

wobei die ganzzahligen Koeffizienten $a(k, y)$ fast immer 0 sind.

Bemerkung 3.4 Für $e_1 \geq e_2$, d.h. $e_1(k, y) \geq e_2(k, y)$ für alle $(k, y) \in \mathbb{Z}\times Y$ folgt $Y_{e_1} \subset Y_{e_2}$, denn

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{(k,y)\in\mathbb{Z}\times Y} a(k, y)k^{e_1(k,y)}(\Psi^k - 1)y &&= \sum_{(k,y)\in\mathbb{Z}\times Y} a(k, y)k^{e_2(k,y)+\Delta(k,y)}(\Psi^k - 1)y \\ &= \sum_{(k,y)\in\mathbb{Z}\times Y} \underbrace{a(k, y)k^{\Delta(k,y)}}_{=:\tilde{a}(x,y)\in\mathbb{Z}} k^{e_2(k,y)}(\Psi^k - 1)y &&= \sum_{(k,y)\in\mathbb{Z}\times Y} \tilde{a}(k, y)k^{e_2(k,y)}(\Psi^k - 1)y, \end{aligned}$$

wobei wegen $e_1 \geq e_2$ die Differenz $\Delta(k, y) \geq 0$ ist.

Definition 3.5 *Die Gruppe $J''(Y)$ wird als der folgende Quotient definiert:*

$$J''(Y) := Y/\bigcap_e Y_e,$$

wobei e die Menge aller Funktionen $\mathbb{Z} \times Y \to \mathbb{N}_0$ durchläuft.

Bemerkung 3.6 Eine Ψ-Abbildung $f : Y_1 \to Y_2$ induziert eine Abbildung

$$f_* : J''(Y_1) \to J''(Y_2).$$

Denn unterscheiden sich $y_1 \in Y_1$ und $y_1' \in Y_1$ um ein Element aus $\bigcap_{e_1}(Y_1)_{e_1}$, so sollten sich $f(y_1) \in Y_2$ und $f(y_1') \in Y_2$ nur um ein Element aus $\bigcap_{e_2}(Y_2)_{e_2}$ unterscheiden.
Sei also $e_2 : \mathbb{Z} \times Y_2 \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion, dann liefert diese eine zugehörige Funktion

$$e_1 : \mathbb{Z} \times Y_1, \quad (k, y_1) \mapsto e_2(k, f(y_1))$$

Für das Bild der Untergruppe $(Y_1)_{e_1}$ unter f gilt $f((Y_1)_{e_1}) \subset (Y_2)_{e_2}$, denn mit $y_1 \in (Y_1)_{e_1}$ folgt

$$\begin{aligned} f(y_1) &\overset{\Psi_2^k\circ f = f\circ\Psi_1^k}{=} \sum_{(k,y_1)\in\mathbb{Z}\times Y_1} a(k, y_1)k^{e_1(k,y_1)}(\Psi_2^k - 1)(f(y)) \\ &\overset{\text{Konstruktion}}{=} \sum_{(k,y_1)\in\mathbb{Z}\times Y_1} a(k, y_1)k^{e_2(k,f(y_1))}(\Psi_2^k - 1)(f(y)) \quad \in \quad (Y_2)_{e_2} \end{aligned}$$

Also folgt

$$f(\bigcap_{e_1}(Y_1)_{e_1}) \subset \bigcap_{e_2}(Y_2)_{e_2}$$

und damit die Wohldefiniertheit der induzierten Abbildung.

Definition 3.7 *Für einen Raum X definiert man*

$$J''_\Lambda(X) := J''(K_\Lambda(X)) \qquad \textit{und für den Fall } \Lambda = \mathbb{R} \qquad J''(X) := J''_\mathbb{R}(X) = J''(K_\mathbb{R}(X)).$$

Definiere außerdem

$$W(X) := \bigcap_{e:\mathbb{Z}\times K_\mathbb{R}(X)\to\mathbb{N}_0} (K_\mathbb{R}(X))_e,$$

d.h. $J''(X) = K_\mathbb{R}(X)/W(X)$.

Bemerkung 3.8 In Marco's Vortrag wurde die Untergruppe $T(X) \subset K_\mathbb{R}(X)$ definiert, welche von allen Elementen der Form $[\xi] - [\eta]$ erzeugt wird, wobei ξ und η orthogonale Bündel über X sind und die assoziierten Sphärenbündel faserhomotopieäquivalent sind. Die Gruppe $J(X)$ wurde als der Quotient $K_\mathbb{R}(X)/T(X)$ erklärt.
Aus Marcus' Vortrag entnehmen wir die Gültigkeit der Adams-Vermutung:

Satz 3.9 (Adams) *Sei $k \in \mathbb{Z}$, X ein endlicher CW-Komplex und $y \in K_{\mathbb{R}}(X)$. Dann existiert ein $e(k, y) \in \mathbb{N}_0$, so dass*

$$k^{e(x,y)}(\Psi^k - 1)(y) = 0 \in J(X)$$

gilt, wobei $J : K_{\mathbb{R}}(X) \to J(X)$ die kanonische Projektion ist.

Proposition 3.10 *Sei X irgendein Raum, für den die Adams-Vermutung für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $y \in Y := K_{\mathbb{R}}(X)$ gültig ist. Dann ist $J''(X) = Y/\bigcap_e Y_e$ (wobei e alle Funktionen $e : \mathbb{Z} \times K_{\mathbb{R}}(X) \to \mathbb{N}_0$ durchläuft) eine obere Schranke für $J(X)$ in folgendem Sinn: Es gilt $W(X) \subset T(X)$, so dass die Quotientenabbildung $K_{\mathbb{R}}(X) \to J(X)$ durch einen Epimorphismus $J''(X) \to J(X)$ faktorisiert, d.h. das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
K_{\mathbb{R}}(X) \arrow[rr, "\text{Quotientenabbildung}"] \arrow[dr, "\text{Projektion}"'] & & J(X) \\
& J''(X) \arrow[ur, dashed, "\exists\ \text{Epimorphismus}"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis: Nach Definition gilt $J(X) = K_{\mathbb{R}}(X)/T(X)$, d.h. $T(X)$ ist der Kern der Quotientenabbildung $K_{\mathbb{R}} \to J(X)$. Die Adams-Vermutung liefert eine Abbildung $e : \mathbb{Z} \times K_{\mathbb{R}} \to \mathbb{N}_0, (k, y) \mapsto e(k, y)$ derart, dass $k^{e(k,y)}(\Psi^k - 1)(y)$ unter der Quotientenabbildung auf $0 \in J(X)$ abgebildet wird. Also gilt $Y_e \subset T(X)$ und somit $W(X) = \bigcap_e Y_e \subset T(X)$. Der Homomorphiesatz liefert die Behauptung, weil die Quotientenabbildung surjektiv ist.

3.2 Alternative Konstruktion (Y endlich erzeugt)

In diesen Abschnitt sei die abelsche Gruppe Y immer endlich erzeugt.

Proposition 3.11

$$\bigcap_{\{e:\mathbb{Z}\times Y\to\mathbb{N}_0\}} Y_e = \bigcap_{\{f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}_0\}} Y_f$$

und es folgt $J''(Y) = Y/\bigcap_f Y_f$.

Beweis: „$\subset$" Die Menge der von $y \in Y$ unabhängigen Funktionen $\{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0\}$ ist eine Teilmenge von $\{e : \mathbb{Z} \times Y \to \mathbb{N}_0\}$ enthalten. Dies liefert unmittelbar die erste Inklusion.
„$\supset$" Seien $y_1, \ldots, y_n$ Erzeuger von $y \in Y$. Für eine Funktion $e : \mathbb{Z} \times Y \to \mathbb{N}_0$ wird eine zugehörige Funktion

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0, \quad k \mapsto \max_{1\leq r\leq n} e(k, y_r)$$

definiert. Dann gilt $f(k) \geq e(k, y)$ für alle y und somit nach 3.4 $Y_f \subset Y_e$, also $\bigcap_f Y_f \subset \bigcap_e Y_e$.

Proposition 3.12 *1. Seien Y_1 und Y_2 endlich erzeugte Ψ-Gruppen. Dann gilt*

$$J''(Y_1 \oplus Y_2) = J''(Y_1) \oplus J''(Y_2).$$

2. Sei P ein Punkt. Dann gilt

$$J''(P) = \mathbb{Z}.$$

3. Sei X ein endlicher zusammenhängender CW-Komplex. Dann gilt

$$J''(X) = \mathbb{Z} \oplus \tilde{J}''(X), \qquad \textit{wobei } \tilde{J}''(X) := J''(\tilde{K}_{\mathbb{R}}(X)).$$

Beweis:

1. Es gilt $(Y_1 \oplus Y_2)_f = (Y_1)_f \oplus (Y_2)_f$, denn es existiert die eindeutige Darstellung

$$(Y_1 \oplus Y_2)_f \ni (y_1, y_2) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k)k^{f(k)}(\Psi^k - 1)(y_1) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k)k^{f(k)}(\Psi^k - 1)(y_2)$$

   und somit

$$\bigcap_{f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}_0} (Y_1 \oplus Y_2)_f = \bigcap_{f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}_0} (Y_1)_f \oplus \bigcap_{f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}_0} (Y_2)_f.$$

2. Es gilt $K_{\mathbb{R}} = \mathbb{Z}$ und weiterhin $(\Psi^k - 1)(y) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $y \in K_{\mathbb{R}}(P)$, d.h $\bigcap_f Y_f$ ist trivial.
3. $K_{\mathbb{R}}$ lässt sich als Summe $K_{\mathbb{R}}(P) \oplus \tilde{K}_{\mathbb{R}}(X)$ schreiben und somit folgt die Behauptung aus Teil 1) und Teil 2).

3.3 Beispiel: $J''(\mathbb{R}P^n)$, $J''(S^n)$ für $n \equiv 1, 2 \mod 8$ und $\tilde{J}''(S^{4n})$

Beispiel 3.13 *Sei $X = \mathbb{RP}^n$ der reell projektive Raum. Dann ist die Quotientenabbildung*

$$K_{\mathbb{R}}(\mathbb{RP}^n) \to J''(\mathbb{RP}^n)$$

ein Isomorphismus.

Beweis: $\tilde{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{RP}^n)$ ist zyklisch von der Ordnung 2^g (vgl. *Adams, Vectorfields on Spheres*) für geeignetes g. Wähle f derart, dass $f(k) \geq g$ für gerade $k = 2m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$k^{f(k)}(\Psi^k - 1)(y) = \underbrace{m^{f(k)} 2^{f(k)-g}}_{\in \mathbb{Z}} \cdot 2^g((\Psi^{2m}) - 1)(y) = 0 \in K_{\mathbb{R}}(\mathbb{RP}^n).$$

für solche k nach einem Lemma aus Marcus' Vortrag (Dort nur für Linearkombinationen von $O(1)$-Bündeln, aber Herr Adams sagt, dass es auch sonst funktioniert. Ohne Beweis.) Für ungerade k folgt aus demselben Lemma, dass $\Psi^k(y) = y \in K_{\mathbb{R}}(\mathbb{RP}^n)$ und daher $k^{f(k)}(\Psi^k - 1)(y) = 0$. Also gilt $Y_f = 0$ und daher $\bigcap_f Y_f = 0$. Daraus folgt die Behauptung.

Beispiel 3.14 *Sei $X = S^n$ die n-Sphäre mit $n \equiv 1$ oder $2 \mod 8$. Dann ist die Quotientenabbildung*

$$K_{\mathbb{R}}(S^n) \to J''(S^n)$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Sei $f : \mathbb{RP}^n \to S^n$ eine Abbildung vom Grad 1. Dann ergibt sich das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} K_{\mathbb{R}}(S^n) \arrow[r, "f^*", "\text{inj. (ohne Bew.)}"'] \arrow[d] & K_{\mathbb{R}}(\mathbb{RP}^n) \arrow[d, "\cong \text{ (Bsp. 1.12)}"] \\ J''(S^n) \arrow[r, "f^*", "\exists \text{ (Bem. 1.6)}"'] & J''(\mathbb{RP}^n) \end{tikzcd}$$

Also ist auch der linke vertikale Pfeil ein Monomorphismus und damit auch ein Isomorphismus.

Bemerkung 3.15 Sei n eine natürliche Zahl und seine Primfaktorzerlegung durch

$$n = 2^{\nu_2(n)} \cdot 3^{\nu_3(n)} \cdot 5^{\nu_5(n)} \cdot \ldots$$

gegeben. In Joachim's Vortrag wurde die zahlentheoretische Funktion $m(t)$ so definiert:

$$\nu_p(m(t)) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \neq 0 \mod p-1 \\ 1 + \nu_p(t) & \text{falls } t = 0 \mod p-1 \end{cases} \qquad \text{falls } p \text{ ungerade}$$

$$\nu_2(m(t)) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \neq 0 \mod 2 \\ 2 + \nu_2(t) & \text{falls } t = 0 \mod 2 \end{cases} \qquad \text{falls } p = 2$$

Man betrachtet also für das Argument t die Primzahlzerlegung von t und die Reste $t \mod p$ für alle Primzahlen p. Entsprechend der Fallunterscheidung wird der Funktionswert $m(t)$ durch Festlegung der Exponenten in seiner Primzahlzerlegung definiert.
Beispielsweise gilt $m(2s+1) = 2$, denn $t = 2s+1 = 1 \mod 2$ und für ungerade p gilt $2s+1 \neq 0 \mod p-1$, weil $p-1$ gerade ist. Da t selbst ungerade ist, ist $\nu_2(m(t)) = 1$ der einzige von Null verschiedene Exponent in der Primfaktorzerlegung von $m(t)$, d.h. $m(t) = 2$.

Beispiel 3.16 *Sei $X = S^{4n}$. Dann ist $\tilde{J}''(S^{4n})$ zyklisch von der Ordnung $m(2n)$*

Beweis: Sei $y \in \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{4n})$. Dann sagt liefert die Adams-Operation

$$k^{f(k)}(\Psi^k - 1)(y) = k^{f(k)}(k^{2n} - 1)(y),$$

d.h. die Untergruppe $Y_f \subset \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{4n}) = \mathbb{Z}$ besteht aus Vielfachen von $h(f, 2n)$, wobei $h(f, 2n)$ der größte gemeinsame Teiler der ganzen Zahlen

$$\{k^{f(k)}(k^{2n} - 1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

ist, d.h. $\tilde{J}''(S^{4n})$ ist zyklisch. Ein Satz aus Joachim's Vortrag (Satz 2.7. aus Artikel II) besagt:

$$h(f,t) \,|\, m(t) \quad \textit{und} \quad \forall t\ \exists f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0 \textit{ mit } h(f,t) = m(t)$$

Daraus folgt die Behauptung.

Satz 3.17 *Das Bild $J(\pi_{4n-1}(SO))$ des stabilen J-Homomorphismus bzw. äquivalent die Gruppe $\tilde{J}(S^{4n})$ ist zyklisch von der Ordnung*

1. *$m(2n)$, falls $4n = 4 \mod 8$;*
2. *entweder $m(2n)$ oder $2m(2n)$, wenn $4n = 0 \mod 8$.*

BEWEIS:

1. Sei $4n = 4 \mod 8$. Dann ist
$$r : \tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^{4n}) \to \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{4n})$$
ein Epimorphismus. Ein Satz aus Marco's Vortrag (Satz 1.4 in Artikel I) beweist die Gültigkeit der Adams-Vermutung für $X = S^{2n}$, also auch in diesem Fall. Behauptung 3.10 liefert deshalb das kommutative Diagramm
$$\begin{tikzcd} K_{\mathbb{R}}(S^{4n}) \arrow[rr, "\text{Quotientenabbildung}"] \arrow[dr, "\text{Projektion}"'] & & J(S^{4n}) \\ & J''(S^{4n}) \arrow[ur, dashed, "\exists\ \text{Epimorphismus}"'] & \end{tikzcd} \quad \text{bzw.} \quad \begin{tikzcd} \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{4n}) \arrow[rr, "\text{Quotientenabbildung}"] \arrow[dr, "\text{Projektion}"'] & & \tilde{J}(S^{4n}) \\ & \tilde{J}''(S^{4n}) \arrow[ur, dashed, "\exists\ \text{Epimorphismus}"'] & \end{tikzcd}$$
Nach Beispiel 3.16 ist $\tilde{J}''(S^{4n})$ zyklisch von der Ordnung $m(2n)$, d.h. die Ordnung von $\tilde{J}(S^{4n})$ muss ein Teiler von $m(2n)$ sein.
Auf der anderen Seite liefert ein Resultat von Milnor, Kervaire, Atiyah, Hirzebruch, dass die Ordnung von $\tilde{J}(S^{4n})$ ein Vielfaches von $m(2n)$ sein muss, was die erste Behauptung zeigt.
2. Im zweiten Fall $4n = 0 \mod 8$ ist die Argumentation ähnlich. Man verliert den Faktor 2, weil das Bild von
$$r : \tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^{4n}) \to \tilde{K}_{\mathbb{R}}(S^{4n})$$
aus Elementen besteht, welche durch 2 teilbar sind.

3.4 Weitere Eigenschaften von J'' und $\tilde{J}''$

Lemma 3.18 *Sei*
$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$$
eine exakte Sequenz von endlich erzeugten Ψ-Gruppen derart, dass $J''(A)$ endlich ist. Dann ist auch die Sequenz
$$J''(A) \xrightarrow{i_*} J''(B) \xrightarrow{j_*} J''(C) \longrightarrow 0$$
exakt.

BEWEIS: Das Diagramm
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ J''(A) \arrow[r, "i_*"] & J''(B) \arrow[r, "j_*"] & J''(C) \end{tikzcd}$$
kommutiert und weil j nach Voraussetzung ein Epimorphismus ist und ebenso die Quotientenabbildungen, muss auch j^* ein Eimorphismus sein. Ebenso folgt aus diesem Diagramm $j_* \circ i_* = 0$, so dass nur noch $\mathrm{Ker}(j_*) \subset \mathrm{Bild}(i_*)$ zu zeigen ist.
Sei $b \in B$ mit $j_*(b) = 0$, d.h.
$$j(b) \in \bigcap_{\{f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}_0\}} C_f.$$
Es ist $J(A)$ endlich nach Voraussetzung, wähle also Repräsentanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in A$ für die Elemente von $J''(A)$. *Für jedes $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ gibt es ein $\alpha_r \in A$ mit $b - i(\alpha_r) \in B_f$ (1).* Sei nämlich $f_0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0, k \mapsto f_0(k)$ eine Funktion. Wegen $j(b) \in C_{f_0}$ gilt
$$j(b) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^{f_0(k)}(\Psi^k - 1)(c_k)$$
für geeignete Elemente $c_k \in C$, welche fast immer 0 sind. Weil j surjektiv und linear ist, gibt es Elemente $b_k \in B$ mit $j(b_k) = c_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und somit
$$j(b - \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^{f_0(k)}(\Psi^k - 1)(b_k)) \ = \ 0 \qquad \Rightarrow \qquad b - \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^{f_0(k)}(\Psi^k - 1)(b_k) \ \in \ \mathrm{Ker}(j)$$

Wegen der Exaktheit der Ausgangssequenz gibt es ein Element $a \in A$ mit

$$i(a) \;=\; b - \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^{f_0(k)}(\Psi^k - 1)(b_k) \qquad \Rightarrow \qquad b \;=\; i(a) + b - \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^{f_0(k)}(\Psi^k - 1)(b_k)$$

Sei α_r der Repräsentant von a in $J''(A)$, d.h. $a - \alpha_r \in \bigcap_f A_f \subset A_{f_0}$ bzw. für geeignete $a_k \in A$ gilt

$$a \;=\; \alpha_r + \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^{f_0(k)}(\Psi^k - 1)(a_k) \qquad \Rightarrow \qquad b \;=\; i(\alpha_r) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^{f_0(k)}(\Psi^k - 1)(b_k + i(a_k)).$$

Dies bedeutet $b - i(\alpha_r) \in B_f$.
Wir zeigen nun: *Es gibt ein Element α_r mit $b - i(\alpha_r) \in B_f$ für alle (!) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ (2).* Nehmen wir das Gegenteil an, so gibt es für jedes α_r eine Funktion $f_r : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ mit $b - i(\alpha_r) \notin B_{f_r}$. Definiere eine Funktion $f_{\max} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ durch

$$f_{\max}(k) = \max_{1\le r\le q} f_r(k).$$

Dann gilt $f_{\max} \ge f_r$ und daher nach Bemerkung 1.4. $B_{f_{\max}} \subset B_{f_r}$ für alle $1 \le r \le q$. Nach Annahme ergibt sich also $b - i(\alpha_r) \notin B_{f_{\max}}$ im Widerspruch zu (1).
Wir haben bewiesen, dass ein α_r existiert mit $b - i(\alpha_r) \in \bigcap_f B_f$, d.h. in $J''(B)$ gilt $b = i_*(\alpha_r)$ und damit die Behauptung.

Lemma 3.19 *Sei Y eine endlich erzeugte Ψ-Gruppe mit Filtrierung*

$$Y = Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots \supset Y_n = 0$$

von Ψ-Untergruppen Y_q derart, dass $J''(Y_q/Y_{q+1})$ für alle q endlich ist. Dann ist $J''(Y)$ endlich.

Beweis: Die Aussage durch Induktion nach n bewiesen.
Der Induktionsanfang ist klar. Sei die Aussage für $n-1$ bereits bewiesen. Die Sequenz

$$Y_{n-1} \xrightarrow{\text{Inklusion}} Y_n \xrightarrow{\text{Projektion}} Y_{n-1}/Y_n \longrightarrow 0$$

ist exakt und nach Induktionsannahme ist $J''(Y_{n-1})$ endlich sowie nach Voraussetzung Y_n und Y_{n-1}/Y_n endlich erzeugt (weil Y endlich erzeugt ist), d.h. nach Lemma 1.18 ist die Sequenz

$$J''(Y_{n-1}) \xrightarrow{\text{Inklusion}_*} J''(Y_n) \xrightarrow{\text{Projektion}_*} J''(Y_{n-1}/Y_n) \longrightarrow 0$$

ebenfalls exakt und spaltet. Weil die Gruppen $J''(Y_{n-1})$ und $J''(Y_{n-1}/Y_n)$ nach Induktionsannahme endlich sind, ist wegen der Exaktheit auch die Gruppe $J''(Y_n) = J''(Y)$ endlich.

Lemma 3.20 *Sei $\bigvee S^q$ eine endliche 1-Punkt-Vereinigung von q-Sphären und Y ein Ψ-Quotient einer Ψ-Untergruppe U von $\tilde{K}_\Lambda(\bigvee S^q)$. Dann ist $J''(Y)$ endlich.*

Beweis: Wenn $\tilde{K}_\Lambda(S^q)$ endlich ist, so auch $\tilde{K}_\Lambda(\bigvee S^q)$, und ebenso Y als Quotient U/V einer Untergruppe V sowie dann auch $J''(Y)$ als weiterer Quotient einer endlichen Gruppe. Also genügt es die Fälle

$$\Lambda = \mathbb{R} \text{ und } q = 0 \mod 4 \qquad \text{sowie} \qquad \Lambda = \mathbb{C} \text{ und } q = 0 \mod 2$$

zu betrachten. Sei $q = 2n$. Dann sind die Adams-Operationen Ψ^k auf Y durch $\Psi^k(y) = k^n y$ für y gegeben. Wie in Beispiel 3.16 („*$\tilde{J}(S^{4n})$ ist zyklisch von der Ordnung $m(2n)$.*") wird das Vielfache $m(n)\cdot y$ von $y \in \tilde{K}_\Lambda(S^{4n})$ auf 0 in $J''(Y)$ abgebildet (es landet tatsächlich in $\tilde{J}''(S^{4n})$), d.h. insbesondere das Vielfache jedes Repräsentanten eines Elementes in Y wird auf 0 abgebildet. Nun ist Y endlich erzeugt, weil $\tilde{K}_\Lambda(\bigvee S^q)$ endlich erzeugt ist, d.h. auch jeder Erzeuger hat $m(n)$-Torsion. Also ist $J''(Y)$ endlich.

Satz 3.21 *Sei X ein endlicher zusammenhängender CW-Komplex. Dann ist $\tilde{J}''(X)$ endlich.*

Beweis: Es lässt sich $Y := \tilde{K}_\Lambda(X)$ filtrieren, indem man für das n-Gerüst $X^{(n)}$ von X

$$Y_q := \operatorname{Bild}(j^* : K_\Lambda(X, X^{(q-1)}) \to \tilde{K}_\Lambda(X))$$

definiert. Dabei ist j^* von der kanonischen Inklusion $(X, X^{(0)}) \hookrightarrow (X, X^{(n)})$ induziert, beachte $\tilde{K}_\Lambda(X) = K_\Lambda(X, \{\mathrm{pt}\})$ und $X^{(0)} = \{\mathrm{pt}\}$, da X zusammenhängend ist. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & K_\Lambda(X, X^q) \arrow[r] \arrow[d, "\text{surj.}"] & K_\Lambda(X, X^{q-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\text{surj.}"] & K_\Lambda(X^q, X^{q-1}) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d] & \cdots . \\
0 \arrow[r] & Y_{q+1} \arrow[r] & Y_q \arrow[r] & Y_q/Y_{q+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Weil die beiden Zeilen exakt und die ersten beiden senkrechten Pfeile die surjektiven Abbildungen j^* sind, ist auch der dritte senkrechte Pfeil $K_\Lambda(\bigvee S^q) \cong K_\Lambda(X^q, X^{q-1}) \to Y_q/Y_{q+1}$ surjektiv. Also ist Y_q/Y_{q+1} ein Ψ-Quotient des Kerns des Verbindungshomomorphismus δ^* in der oberen exakten Sequenz. Aber nach Konstruktion verschwindet die virtuelle Dimension von jedem $y \in Y_q/Y_{q+1}$, d.h. Y_q/Y_{q+1} ist ein Ψ-Quotient einer Untergruppe von $\tilde{K}(\bigvee S^q)$. und somit $J''(Y_q/Y_{q+1})$ nach Lemma 3.20 endlich. Also sind die Voraussetzungen von Lemma 3.19 erfüllt und somit folgt, dass $J''(Y)$ endlich ist.

Satz 3.22 *Sei $X \to Y \to Z$ eine Kofaserung von endlichen zusammenhängenden CW-Komplexen derart, dass die Sequenz*

$$\tilde{K}_\Lambda(Z) \xrightarrow{j^*} \tilde{K}_\Lambda(Y) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}_\Lambda(X) \longrightarrow 0$$

exakt ist. Dann ist auch die Sequenz

$$\tilde{J}''_\Lambda(Z) \xrightarrow{j^*} \tilde{J}''_\Lambda(Y) \xrightarrow{i^*} \tilde{J}''_\Lambda(X) \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis: Es $\tilde{K}_\Lambda(Z)$, $\tilde{K}_\Lambda(Y)$ sowie $\tilde{K}_\Lambda(X)$ sind endlich erzeugt. Außerdem ist nach Satz 3.21 $\tilde{J}''(Z)$ endlich. Dann folgt die Behauptung mit Lemma 3.18.

Der folgende Satz zeigt, dass trotz des Limes über Funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ bzw. $e : \mathbb{Z} \times Y \to \mathbb{N}_0$ in der Definition von $J''(Y)$ dieser Limes tatsächlich angenommen wird:

Satz 3.23 *Sei X ein endlicher zusammenhängender CW-Komplex, und sei $Y = \tilde{K}_\Lambda(X)$. Dann gibt es eine Funktion $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0, k \mapsto F(k)$ derart, dass*

$$\bigcap_{\{f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}_0\}} Y_f = Y_F.$$

Beweis: Nach Satz 1.20 ist $\tilde{J}''(X)$ endlich. Seien $y_1, \ldots, y_n$ Repräsentanten in $Y = \tilde{K}_\Lambda(X)$ für die von 0 verschiedenen Elemente in $\tilde{J}''_\Lambda(X)$. Wegen $y_q \notin \bigcap_f Y_f$ gibt es eine Funktion f_q derart, dass $y_q \notin Y_{f_q}$. Definiere $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ durch

$$F(k) := \max_{1 \le q \le n} f_q(k).$$

Weiterhin gilt $\bigcap_f Y_f \subset Y_F$ und wir erhalten eine Quotientenabbildung

$$\theta : Y/\bigcap_{\{f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}_0\}} \to Y/Y_F$$

Nach Konstruktion gilt $F \geq f_q$ und daher $Y_F \subset Y_{f_q}$ für alle $1 \leq q \leq n$. Also folgt $y_q \notin Y_F$ für alle $1 \leq q \leq n$. Also werden die von 0 verschiedenen Elemente $y_k \in Y/\bigcap_f Y_f$ auf von 0 verschiedene Elemente in Y/Y_F abgebildet, d.h. θ ist injektiv. Folglich gilt $Y/\bigcap_f Y_f \subset Y/Y_F$ und daher $Y_F \subset \bigcap_f Y_f$, was die Behauptung beweist.