Übungen zur Linearen Algebra I

— Vorbereitungsblatt zur Klausur —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer 18. Januar 2007

Aufgabe 1. Welche der folgenden Systeme von Vektoren in $\mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig, welche sind ein Erzeugendensystem und welche eine Basis?

l.u.a.	Erz.	Basis	System
☐	☐	☐	$(1,-1,0)$, $(0,1,-1)$
☐	☐	☐	$(1,-1,0)$, $(0,1,-1)$, $(1,0,-1)$
☐	☐	☐	$(1,a,1-a)$ $(a \in \mathbb{R})$
☐	☐	☐	$(1,a,a^2)$ $(a \in \mathbb{R})$
☐	☐	☐	alle (x,y,z) mit $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$ und $x+2y+3z=1$

Aufgabe 2. Gegeben seien drei zweidimensionale Untervektorräume $U_1,\ U_2,\ U_3$ eines K-Vektorraums V, so dass der Schnitt von je zwei der Unterräume eindimensional ist. Welche Dimensionen können als Dimension von $U_1+U_2+U_3$ auftreten?

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☐ 6

Aufgabe 3. Seien $U_1,\ U_2$ lineare Unterräume eines K-Vektorraums V, und seien X_1, X_2 Basen von U_1 bzw. U_2. Welche der folgenden Aussagen treffen stets zu?

☐ $X_1 \cup X_2$ ist ein Erzeugendensystem von U_1+U_2.

☐ $X_1 \cup X_2$ linear unabhängig in U_1+U_2

☐ $X_1 \cap X_2$ ist ein Erzeugendensystem von $U_1 \cap U_2$

☐ $X_1 \cap X_2$ ist linear unabhängig in $U_1 \cap U_2$

☐ $X_1 \subseteq X_2$ genau dann, wenn $U_1 \subseteq U_2$

☐ Ist $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, so sind X_1 und X_2 disjunkt.

Aufgabe 4. Was ist die Dimension von $\mathrm{Hom}_K(K^3,K^5)$?

◯ $\max\{3,5\}=5$

◯ $3+5=8$

◯ $3 \cdot 5 = 15$

◯ $3^5 = 243$

◯ $5^3 = 125$

◯ unendlich

Aufgabe 5. Welchen Rang hat die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 2 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 & 5 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$?

Aufgabe 6. Wenn Sie die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ohne Zeilenvertauschungen so auf Zeilenstufenform bringen, dass der erste nichtverschwindende Eintrag in jeder Zeile 1 ist, was steht dann rechts unten in der Matrix?

- ◯ 0
- ◯ $\frac{1}{2}$
- ◯ -1
- ◯ 3
- ◯ $-\frac{2}{7}$
- ◯ $\frac{7}{5}$

Aufgabe 7. Welche Dimensionen haben $\ker f_1 \cap \ker f_2$ und $\ker f_1 + \ker f_2$ für die folgenden beiden linearen Abbildungen $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$?

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= x_2 + 5x_4 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= x_1 + 2x_2 + x_3 + 10x_4 - x_5 \end{aligned}$$

- ☐ Schnitt 0-dimensional, Summe 5-dimensional
- ☐ Schnitt 1-dimensional, Summe 4-dimensional
- ☐ Schnitt 2-dimensional, Summe 3-dimensional
- ☐ Schnitt 3-dimensional, Summe 4-dimensional
- ☐ Schnitt 3-dimensional, Summe 5-dimensional
- ☐ Schnitt 4-dimensional, Summe 4-dimensional

Aufgabe 8. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein nilpotenter Endomorphismus, d.h., $f \circ f \circ \cdots \circ f = 0$ für genügend viele $\circ$-Faktoren. Zeigen Sie, dass man eine Basis X von $\mathbb{R}^n$ wählen kann, so dass für $A_{f,X,X} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ gilt: $a_{ij} = 0$ für $i \geq j$.

Aufgabe 9. Bestimmen Sie, für welche Werte von α ist das System $(1, \alpha, \alpha)$, $(\alpha, 1, \alpha)$, $(\alpha, \alpha, 1)$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 10. Bestimmen Sie ein Komplement zu dem Unterraum

$$\langle (1,2,1,0),\ (2,3,2,2),\ (0,-1,0,2) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4.$$