Übungen zur Linearen Algebra II

— Vorbereitungsblatt zur Klausur —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer 26. Juni 2007

Dieses Blatt enthält Aufgaben, mit denen Sie gezielt für die Klausur lernen können. Die Klausur am 30. 6. besteht aus 6 Multiple-Choice-Aufgabe, die großteils rechenorientiert sind, und 4 Theorie-Aufgaben, in denen Sie einfache Sachverhalte beweisen sollen.

Bei Multiple-Choice-Aufgaben mit ☐ als Auswahlfeldern ist jede zutreffende Antwort anzukreuzen; für jedes richtig gesetzte und für jedes richtig nicht gesetzte Kreuz gibt es einen Punkt.

Bei Aufgaben mit ◯ als Auswahlfeldern ist genau eine Antwort richtig; ist sie korrekt angekreuzt, gibt es 3 Punkte, ist eine falsche Antwort oder mehr als eine Antwort angekreuzt, gibt es 0 Punkte, ist nichts angekreuzt, gibt es 1 Punkt.

Wichtiger Hinweis zur Klausur: Bringen Sie lediglich einen Stift, einen Bildausweis und, falls gewünscht, etwas Stärkung mit. Wir stellen das Papier. Bitte lassen Sie Ihre Taschen und Jacken zu Hause oder schließen Sie sie in ein Schließfach ein. Mobiltelefone, Rechner, Bücher, Papier und ähnliches dürfen nicht in den Klausurraum mitgenommen werden. Bitte seien Sie spätestens um 8:45 da. Die Klausurzeit beginnt um 9:00 und endet um 12:00. Auf dem Deckblatt der Klausur werden wir Sie bitten, einen „Code“ anzugeben. Tragen Sie hier eine beliebige Zeichenfolge ein, die Sie wiedererkennen; wir werden die Ergebnisse der Klausur online und per Aushang, durch diese Codes anonymisiert, voraussichtlich am späten Samstagnachmittag bekanntgeben. Wenn Sie das nicht wünschen, lassen Sie das Code-Feld leer. In diesem Fall erfahren Sie Ihr Ergebnis bei der Rückgabe der Klausuren.

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Was ist der größte gemeinsame Teiler der Polynome $T^4 + T^3 - T^2 + T - 2$ und $T^5 + 4T^4 + T^3 - 7T^2 - T + 2$?

◯ 0

◯ 1

◯ $T - 1$

◯ $T + 1$

◯ $T^2 + T - 2$

◯ $T^3 - 2T^2 + 1$

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Welche der folgenden Polynome sind Elementarteiler der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\left(T^2-1\right) \\ T+1 & (T-1)(T+1) & T\left(T^2-1\right) \\ 0 & 0 & T^2-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[T]^{3\times 3}?$$

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ T
- ☐ $T+1$
- ☐ $T-1$
- ☐ T^2-1

Aufgabe 4. Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ hat das charakteristische Polynom

$$\chi_A(T) = T(T-1)^3(T+1).$$

Welche der folgenden Aussagen sind mit Sicherheit wahr?

- ☐ A ist diagonalisierbar.
- ☐ A ist nicht diagonalisierbar.
- ☐ Das Minimalpolynom von A hat ungeraden Grad.
- ☐ Das Minimalpolynom von A hat Grad ≤ 3.
- ☐ A hat einen nichttrivialen Kern.
- ☐ Die Jordan-Normalform von A hat mindestens zwei 1×1-Kästchen.

Aufgabe 5. Bestimmen Sie die Jordan- und die allgemeine Normalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 \\ -4 & -3 & -4 \\ -6 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6. Wenden Sie das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die folgende Basis des $\mathbb{R}^3$ an:

$$v_1 = (1,1,-1), \quad v_2 = (1,-1,1), \quad v_3 - (-1,1,1)$$

Aufgabe 7. Betrachten Sie den dreidimensionalen Unterraum V der Menge aller stetigen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der von der konstanten Funktion 1, e^x und e^{-x} aufgespannt wird. Auf V ist ein Skalarprodukt erklärt durch

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V.

Aufgabe 8. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $\left(\frac{1}{i+j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$.