Übungen zur Linearen Algebra II

— Musterlösungen zum Vorbereitungsblatt —

Tilman Bauer 29. Juni 2007

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$\det = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

dann 3×3-Regel:

$$= (-3 + 1 - 1 + 3) + 2(6 + 1 - 1) = 12.$$

Aufgabe 2. Was ist der größte gemeinsame Teiler der Polynome $T^4 + T^3 - T^2 + T - 2$ und $T^5 + 4T^4 + T^3 - 7T^2 - T + 2$?

Division mit Rest:

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
 & T^5 & +4T^4 & +T^3 & -7T^2 & -T & +2 & = (T^4 + T^3 - T^2 + T - 2)(T+3) + R \\
-(& T^5 & +T^4 & -T^3 & +T^2 & -2T) & & \\ \hline
 & & 3T^4 & +2T^3 & -8T^2 & +T & +2 & \\
 & -(& 3T^4 & +3T^3 & -3T^2 & +3T & -6) & \\ \hline
 & & & -T^3 & -5T^2 & -2T & +8 & = R
\end{array}$$

Nochmal:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & T^4 & +T^3 & -T^2 & +T & -2 & = (T^3 + 5T^2 + 2T - 8)(T-4) + R \\
-(& T^4 & +5T^3 & +2T^2 & -8T) & & \\ \hline
 & & -4T^3 & -3T^2 & +9T & -2 & \\
 & -(& -4T^3 & -20T^2 & -8T & +32) & \\ \hline
 & & & 17T^2 & +17T & -34 & = R
\end{array}$$

Schließlich:

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & T^3 & +5T^2 & +2T & -8 & = (T^2 + T - 2)(T+4) \\
-(& T^3 & +T^2 & -2T) & & \\ \hline
 & & 4T^2 & +4T & -8 &
\end{array}$$

Somit ist der größte gemeinsame Teiler $T^2 + T - 2$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Was sind die Elementarteiler der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\left(T^2-1\right) \\ T+1 & (T-1)(T+1) & T\left(T^2-1\right) \\ 0 & 0 & T^2-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[T]^{3\times 3}?$$

Wir wenden den Algorithmus aus dem Buch an:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2T^2-2 \\ T+1 & T^2-1 & T^3-T \\ 0 & 0 & T^2-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2T^2-2 \\ T^2-1 & T+1 & T^3-T \\ 0 & 0 & T^2-1 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & T+1 & T^3-T-(T^2-1)(2T^2-2) \\ 0 & 0 & T^2-1 \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen von $T=-1$ sehen wir, das $(T+1) \mid (T^3-T-(T^2-1)(2T^2-2))$. Da auch $(T+1) \mid (T^2-1)$, erhalten wir als Elementarteiler $1, T+1, T^2-1$.

Aufgabe 4. Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ hat das charakteristische Polynom

$$\chi_A(T) = T(T-1)^3(T+1).$$

Welche der folgenden Aussagen sind mit Sicherheit wahr?

• Zunächst bestimmen wir die möglichen Jordan-Normalformen einer solchen Matrix A. Es gibt drei Möglichkeiten:

1. $\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}, p(T) = T(T-1)(T+1)$

2. $\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}, p(T) = T(T-1)^2(T+1)$

3. $\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}, p(T) = T(T-1)^3(T+1)$

- A ist diagonalisierbar: Nein, 2+3.
- A ist nicht diagonalisierbar: Nein, 1.
- Das Minimalpolynom von A hat ungeraden Grad: Nein, 2.
- Das Minimalpolynom von A hat Grad ≤ 3: Nein, 2+3.
- A hat einen nichttrivialen Kern: Ja, ein Eigenwert 0.
- Die Jordan-Normalform von A hat mindestens zwei 1×1-Kästchen: Ja.

Aufgabe 5. Bestimmen Sie die Jordan- und die allgemeine Normalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 \\ -4 & -3 & -4 \\ -6 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Wir wenden wieder den Algorithmus zur Bestimmung der Normalteiler von $TE - A$ an:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} T-7 & -4 & -8 \\ 4 & T+3 & 4 \\ 6 & 3 & T+7 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} T-1 & -1 & T-1 \\ 4 & T+3 & 4 \\ 6 & 3 & T+7 \end{pmatrix} \quad (Z1 \rightsquigarrow Z1 + Z3) \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} T-1 & -1 & T-1 \\ 4+(T+3)(T-1) & 0 & 4+(T+3)(T-1) \\ 3T+3 & 0 & 4T+4 \end{pmatrix} \quad \text{(Nullen in S2)} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3(T+1) & 4(T+1) \\ 0 & (T+1)^2 & (T+1)^2 \end{pmatrix} \quad \text{(Z und S permutieren)} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (T+1) & 0 \\ 0 & 0 & (T+1)^2 \end{pmatrix} \quad \text{(Nullen in Z2 und S2)}
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir als allgemeine Normalform:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

und daraus die Jordan-Normalform

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6. Wenden Sie das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die folgende Basis des $\mathbb{R}^3$ an:

$$v_1 = (1,1,-1), \quad v_2 = (1,-1,1), \quad v_3 - (-1,1,1)$$

$$\begin{aligned}
v_2' &= v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
v_3' &= v_3 - \frac{\langle v_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\
v_3'' &= v_3' - \frac{\langle v_3', v_2'\rangle}{\langle v_2', v_2'\rangle} v_2' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}} \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(Den letzten Vektor v_3'' hätte man auch sofort raten können). Normiert ergibt sich als Orthonormalbasis:

$$\sqrt{\frac{1}{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad \sqrt{\frac{1}{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 7. Betrachten Sie den dreidimensionalen Unterraum V der Menge aller stetigen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der von der konstanten Funktion 1, e^x und e^{-x} aufgespannt wird. Auf V ist ein Skalarprodukt erklärt durch

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V.

Zunächst berechnen wir:

$$\langle e^{ax}, e^{bx}\rangle = \int_0^1 e^{(a+b)x}\, dx = \frac{1}{a+b}e^{(a+b)x}\Big|_0^1 = \frac{1}{a+b}(e^{a+b}-1)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
v_1 &= 1\\
v_2' &= e^x - \frac{\langle e^x, 1\rangle}{\langle 1,1\rangle}1 = e^x - e + 1\\
v_3' &= e^{-x} - \frac{\langle e^{-x}, 1\rangle}{\langle 1,1\rangle}1 = e^{-x} + \frac{1}{e} - 1\\
v_3'' &= v_3' - \frac{\langle v_3', v_2'\rangle}{\langle v_2', v_2'\rangle}v_2' = e^{-x} + \frac{1}{e} - 1 - \frac{-e-\frac{1}{e}+3}{-\frac{1}{2}e^2+2e-\frac{3}{2}}(e^x - e + 1)\\
&= e^{-x} - \frac{2(e^2-3e+1)}{e^2-4e+3}e^{x-1} + \frac{e-\frac{1}{e}-2}{e-3}.
\end{aligned}$$

Nun muss man noch normieren und erhält, schrecklich aber wahr,

$$1$$

$$\sqrt{\frac{2}{-e^2+4e-3}}\,(1-e+e^x)$$

$$\frac{e^{-x}\left((-3+e)(-1+e)e - 2e^{2x}(1+(-3+e)e) + e^x\left(1+e-3e^2+e^3\right)\right)}{(-3+e)\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{4}{-3+e}+e+4e^2-5e^3+\frac{3e^4}{2}}}$$

…aber so ein Krampf kommt in der Klausur nicht.

Aufgabe 8. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $\left(\frac{1}{i+j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$.

Hier gibt es Tricks, die zu kennen es sich lohnt. Wir ersetzen zunächst die konkreten Zahlen in der Matrix durch Variable:

$$A = \left(\frac{1}{x_i+y_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

Multiplizieren wir die i-te Zeile mit $\prod_{j=1}^{n}(x_i + y_j)$, so verschwinden alle Nenner, und die Determinante multipliziert sich mit $\prod_{i,j=1}^{n}(x_i + y_j)$. Der Eintrag (i, j) der resultierenden Matrix B ist

$$\prod_{j \neq k}(x_i + y_k).$$

Gilt für ein Paar $i \neq j$, dass $x_i = x_j$ oder $y_i = y_j$, so enthält die Matrix zwei identische Zeilen bzw. Spalten, daher muss die Determinante 0 sein. Das heißt aber, dass die Polynome $(x_i - x_j)$ und $(y_i - y_j)$ alle die Determinante teilen müssen (die Determinante ist auch ein Polynom). Also gilt

$$\prod_{i>j}(x_i - x_j)(y_i - y_j) \mid \det(B).$$

Da jeder Eintrag von B den Totalgrad $n - 1$ hat, hat $\det B$ den Totalgrad $n(n-1)$; das ist aber auch der Grad von $\prod_{i>j}(x_i - x_j)(y_i - y_j)$. Also gibt es ein $\lambda \in \mathbb{Z}$, so dass

$$\det(B) = \lambda \prod_{i>j}(x_i - x_j)(y_i - y_j)$$

Um λ zu bestimmen, betrachten wir den Koeffizienten von

$$x_2 x_3^2 \dots x_n^{n-1} \cdot y_2 y_3^2 \dots y_n^{n-1}$$

Man sieht an der Summendarstellung der Determinante von B, dass dieser Term nur als Summand von $B_{11} B_{22} \dots B_{nn}$ auftreten kann, wo der Koeffizient 1 ist. Der Koeffizient in $\prod_{i>j}(x_i - x_j)(y_i - y_j)$ ist auch 1, also $\lambda = 1$ und

$$\det A = \frac{\prod_{i>j}(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j=1}^{n}(x_i + y_j)},$$

also

$$\det\left(\frac{1}{i+j}\right) = \frac{\prod_{i>j}(i-j)^2}{\prod_{i,j=1}^{n}(i+j)}$$

Wenn wir die abkürzende Schreibweise $n!! = n!(n-1)! \dots 1!$ verwenden, lässt sich das kompakt schreiben als:

$$\frac{(n-1)!!^2 n!!^2}{(2n)!!}.$$

Keine Panik, in diesem Schwierigkeitsgrad kommt nichts in der Klausur. Aber die Idee, dass man Determinanten auch indirekt durch Analyse der Nullstellen von Polynomen berechnen kann, sollte man sich merken!