Übungen zur Linearen Algebra II

— Blatt 9 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer 5. Juni 2007

Übung 1. Bestimmen Sie alle abelschen Gruppen der Ordnung 36 bis auf Isomorphie.

Übung 2. Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines n-dimensionalen K-Vektorraums V mit n verschiedenen Eigenwerten. Zeigen Sie, dass V dann f-zyklisch ist.

Übung 3 (Bosch, Aufg. 6.5.7). Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit einem Endomorphismus $F\colon V \to V$. Das Minimalpolynom p_f sei eine Potenz p^r eines Primpolynoms $p \in K[T]$ $(r > 0)$. Zeigen Sie:

(a) Es existiert ein Vektor $u \in V$ mit $p^{r-1}(f)(u) \neq 0$.

(b) Ist $u \in V$ ein solcher Vektor und ist $U \subseteq V$ der von u erzeugte f-zyklische Untervektorraum, so hat U ein f-invariantes Komplement, d.h. es gibt einen f-invarianten Untervektorraum $U' \subseteq V$ mit $V = U \oplus U'$.

Übung 4 (Bosch, Aufg. 6.5.8). Sei V ein endlichdimensionaler f-zyklischer K-Vektorraum unter einem Endomorphismus $f\colon V \to V$. Zeigen Sie, dass jeder f-invariante Unterraum $U \subseteq V$ wiederum f-zyklisch ist.

Übung 5*. Sei A eine endliche abelsche Gruppe und $f\colon A \to \mathbb{C}^\times$ ein nichttrivialer Gruppenhomomorphismus in die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen. Zeigen Sie:

$$\sum_{a \in A} f(a) = 0.$$

Abgabe bis Di, 12. Juni, 08:10 in den Briefkästen. Frohe Pfingstferien!