Übungen zur Linearen Algebra II

— Blatt 8 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer 22. Mai 2007

Übung 1. Bestimmen Sie die Elementarteiler folgender Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ über $R = \mathbb{Z}$;

(b) $\begin{pmatrix} 1 & t & t \\ t^3 - t^2 & (t-1)^2(t^3+t^2+1) & t^4 - t^2 - t + 1 \\ t^4 - 1 & (t^2-1)(t^4+t-1) & t^5 + t^4 - t^2 - t \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}[t]$.

Übung 2 (Bosch, Aufg. 6.3.3). Es seien $a_{11}, \ldots, a_{1n}$ teilerfremde Elemente eines Hauptidealrings R, d. h. es gelte $\mathrm{ggT}(a_{11}, \ldots, a_{1n}) = 1$.

Zeigen Sie, dass es für $2 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ Elemente $a_{ij} \in R$ gibt, so dass die Matrix $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ invertierbar ist.

Übung 3 (Bosch, Aufg. 6.3.6). Sei M ein endlich erzeugter freier R-Modul. Zeigen Sie:

(a) M besitzt eine endliche Basis.

(b) Je zwei Basen von M bestehen aus gleichviel Elementen. (Wenn Sie möchten, dürfen Sie annehmen, dass R ein Integritätsring ist.)

Übung 4 (Bosch, Aufg. 6.4.1). Die *Ordnung* einer Gruppe ist die Anzahl ihrer Elemente und wird mit $\#G$ bezeichnet. Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass es zu jedem Teiler $d \mid \#G$ der Ordnung von G eine Untergruppe $H \subseteq G$ der Ordnung d gibt. Zeigen Sie außerdem, dass die Ordnung jeder Untergruppe $H \subseteq G$ die Ordnung von G teilt.

Übung 5*. Sei R ein Hauptidealring und $M \in R^{m \times n}$. Ein *d-Minor* (oder eine *d-Unterdeterminante*) mit $0 \leq d \leq \min\{m, n\}$ ist die Determinante einer quadratischen $d \times d$-Teilmatrix, die durch Streichen von Zeilen und Spalten aus M entsteht. Sei $U_d(M)$ die (endliche) Menge aller d-Minoren von M. Zeigen Sie, dass $\mathrm{ggT}(U_d(M))$ das Produkt der ersten d Elementarteiler von M ist.

Wenn Sie möchten, können Sie annehmen, dass R euklidisch ist.

Abgabe bis Di, 5. Juni, 08:10 in den Briefkästen. Frohe Pfingstferien!