Übungen zur Linearen Algebra II

— Blatt 7 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer 15. Mai 2007

Übung 1. Bestimmen Sie das Minimalpolynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Übung 2 (Bosch, Aufg. 6.2.3). Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und $U_1,\ U_2 \subseteq V$ f-invariante Unteräume, d.h. f schränkt sich zu Endomorphismen $f_i\colon U_i \to U_i$ ein. Zeigen Sie:

(a) Gilt $V = U_1 + U_2$, so folgt $p_f = \mathrm{kgV}(p_{f_1}, p_{f_2})$ für die Minimalpolynome von f, f_1, f_2.

(b) $U_1 \cap U_2$ ist ebenfalls invariant, und das Minimalpolynom der Einschränkung

$$f_{12}\colon U_1 \cap U_2 \to U_1 \cap U_2$$

teilt $\mathrm{ggT}(p_{f_1}, p_{f_2})$. Gilt im Allgemeinen auch die Gleichheit $p_{f_{12}} = \mathrm{ggT}(p_{f_1}, p_{f_2})$?

Übung 3 (Bosch, Aufg. 6.2.6). Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* $(c_i)_{i\geq 1}$ ist definiert durch $c_1 = c_2 = 1$ und $c_{n+2} = c_n + c_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie für c_n einen geschlossenen Ausdruck an, der nur von n abhängt. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = G,$$

wobei G der goldene Schnitt ist.

Tipp: Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n+2} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$$

und eine Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, für die $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

Übung 4. Sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Zeigen Sie, dass es freie R-Moduln F_0 und F_1 und R-Modulhomomorphismen $\delta\colon F_1 \to F_0$ und $\epsilon\colon F_0 \to M$ gibt, so dass

$$F_1 \xrightarrow{\delta} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

exakt ist.

Übung 5*. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $A \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass A ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist.

Abgabe bis Di, 22. Mai, 08:10 in den Briefkästen