Übungen zur Linearen Algebra II

— Blatt 6 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer 8. Mai 2007

Übung 1 (Bosch, Aufg. 6.1.3). Berechnen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ist A diagonalisierbar?

Übung 2 (Bosch, Aufg. 6.2.1). Berechnen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ist A diagonalisierbar?

Übung 3 (Bosch, Aufg. 6.1.2). Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und λ ein Eigenwert von f. Zeigen Sie, dass für Polynome $q \in K[T]$ jeweils $q(\lambda)$ Eigenwert von $q(f)$ ist.

Übung 4 (Bosch, Aufg. 6.1.5). Die Matrizen $A,\ B \in K^{n\times n}$ seien ähnlich. Zeigen Sie, dass für Polynome $q \in K[T]$ dann auch $q(A)$ und $q(B)$ ähnlich sind.

Übung 5 (Bosch, Aufg. 6.1.7). Betrachten Sie folgendes kommutative Diagramm von K-Vektorräumen:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ W & \xrightarrow{g} & W. \end{array}$$

Zeigen Sie:

(a) Ist h injektiv, so ist jeder Eigenwert von f auch Eigenwert von g.

(b)* Ist h surjektiv, so ist jeder Eigenwert von g auch Eigenwert von f.

Konstruieren Sie Beispiele, die zeigen, dass in den vorstehenden Aussagen die Voraussetzungen „injektiv“ bzw. „surjektiv“ nicht entbehrlich sind.