Übungen zur Linearen Algebra II

— Blatt 5 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer 1. Mai 2007

Übung 1 (Bosch, Aufg. 5.2.2). Seien a, b zwei von Null verschiedene Elemente eines Hauptidealrings R. Zeigen Sie: $Ra \cap Rb = Rv$ für $v = \mathrm{kgV}(a, b)$.

Übung 2. Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler g der Polynome

$$f_1 = T^5 + 3T^4 - 3T^3 + 4T^2 - T - 4 \quad \text{und} \quad f_2 = T^4 + 3T^3 - 6T^2 - 6T + 8 \in \mathbb{R}[T]$$

und stellen Sie ihn dar als

$$g = a_1 f_1 + a_2 f_2 \quad \text{für geeignete } a_i \in \mathbb{R}[T].$$

Übung 3. Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung des Polynoms $T^4 - 1$ über $K = \mathbb{R}$ und über $K = \mathbb{F}_5$, dem Körper mit fünf Elementen.

Übung 4 (Bosch, Aufg. 5.3.3). Für eine komplexe Zahl $\alpha = u + iv \in \mathbb{C}$ mit Realteil $u \in \mathbb{R}$ und Imaginärteil $v \in \mathbb{R}$ sei die zugehörige komplex konjugierte Zahl definiert durch $\overline{\alpha} = u - iv$.

Zeigen Sie, dass ein normiertes Polynom $f \in \mathbb{R}[T]$ genau dann prim ist, wenn entweder

$$f = T - \alpha \quad \text{für ein } \alpha \in \mathbb{R}$$

oder

$$f = (T - \alpha)(T - \overline{\alpha}) \quad \text{für ein } \alpha \in \mathbf{C} - \mathbb{R}$$

gilt.

Tipp: Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ ein $\mathbb{R}$-Algebrenisomorphismus ist, und setzen Sie sie zu einem $\mathbb{R}[T]$-Algebrenisomorphismus $\mathbb{C}[T] \to \mathbb{C}[T]$ fort.

Übung 5*. Sei K ein Körper und $f \in K[T]$ ein Polynom, das in K keine Nullstelle besitzt. Konstruieren Sie einen Körper $L \supset K$, so dass $\dim_K L$ endlich ist und f, aufgefasst als Polynom in $L[T]$, eine Nullstelle in L besitzt.

Geben Sie solch ein L für $K = \mathbb{F}_2$, den Körper mit zwei Elementen, und $f = T^2 + T + 1$ explizit an.

Abgabe bis Di, 8. Mai, 08:10 in den Briefkästen