Übungen zur Linearen Algebra II

— Blatt 4 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer 24. April 2007

Übung 1 (Bosch, Aufg. 5.1.4). Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ Ideale in dem kommutativen Ring R. Zeigen Sie, dass folgende Teilmengen von R wiederum Ideale bilden:

(a) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} := \{a + b \mid a \in \mathfrak{a},\ b \in \mathfrak{b}\}$;

(b) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} := \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathfrak{a},\ b_i \in \mathfrak{b}\}$

(c) $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

Übung 2 (Bosch, Aufg. 5.2.1). Dividieren Sie die folgenden Polynome $f \in \mathbb{R}[T]$ mit Rest durch $g \in \mathbb{R}[T]$:

(a) $f = T^6 + 3T^4 + T^3 - 2$, $g = T^2 - 2T + 1$;

(b) $f = T^n - 1$, $g = T - 1$ mit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$;

(c) $f = T^n + T^{n-1} + \cdots + 1$, $g = T + 1$ mit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Übung 3 (Bosch, Aufg. 5.2.6). Zeigen Sie, dass der Polynomring $\mathbb{Z}[T]$ kein Hauptidealring ist.

Übung 4 (Bosch, Aufg. 5.2.10). Sei K ein Körper und A eine K-Algebra, die als K-Vektorraum endlichdimensional ist. Zeigen Sie, dass es zu jedem Element $a \in A$ ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom $f_a \in K[T]$ kleinsten Grades gibt mit $f_a(a) = 0$.

Übung 5*. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ein euklidischer Ring ist, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ jedoch nicht. Hierbei ist $\mathbb{Z}[\sqrt{a}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{a}$ als Unterring von $\mathbb{C}$ aufzufassen.

Abgabe bis Mi, 2. Mai, 08:15 in den Briefkästen