Übungen zur Linearen Algebra II

— Blatt 3 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer 17. April 2007

Übung 1 (Bosch, Aufg. 5.1.1). Sei R ein kommutativer Ring und $t \in R$. Betrachten Sie den Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi\colon R[T] &\to R \\ f &\mapsto f(t), \end{aligned}$$

der t anstelle der Variablen T einsetzt. Zeigen Sie:

$$\ker \varphi = R[T] \cdot (T - t) := \{(T - t)g \mid g \in R[T]\}.$$

Tipp: Sie können die Frage zunächst auf den Fall $t = 0$ reduzieren, indem Sie den Einsetzungshomomorphismus $R[T] \to R[T]$ betrachten, der T durch $T + t$ ersetzt.

Übung 2 (Bosch, Aufg. 5.1.2). Sei V ein nichttrivialer Vektorraum über einem Körper K. Betrachten Sie zu einem Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ den Einsetzungshomomorphismus

$$\begin{aligned} \Phi\colon K[T] &\to \mathrm{End}_K(V) \\ f &\mapsto f(\varphi), \end{aligned}$$

der φ anstelle der Variablen T einsetzt. Bestimmen Sie $\ker \Phi$ in den Fällen $\varphi = 0$ und $\varphi = \mathrm{id}$.

Übung 3 (Bosch, Aufg. 5.1.3). Sei R ein kommutativer Ring und $R^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Elementen $a_i \in R$.

(a) Zeigen Sie, dass durch die gleichen Formeln wie beim Polynomring, also durch

$$\begin{aligned} (a_i)_i + (b_i)_i &:= (a_i + b_i)_i \\ (a_i)_i \cdot (b_i)_i &:= (c_i)_i \qquad\qquad \text{mit} \quad c_i = \sum_{i=\mu+\nu} a_\mu b_\nu, \end{aligned}$$

eine Ringstruktur auf $R^{\mathbb{N}}$ erklärt wird. Dieser Ring wird mit $R[\![T]\!]$ bezeichnet und *Ring der formalen Potenzreihen* genannt. Zeigen Sie, dass sich seine Elemente als unendliche Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i$ darstellen lassen.

(b) Es sei $q \in R[\![T]\!] \cdot T$. Zeigen Sie, dass der Ausdruck $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ Sinn ergibt und ein Element f definiert, für das $f \cdot (1 - q) = 1$ gilt.

(c) Bestimmen Sie die Gruppe $R[\![T]\!]^\times$ aller Einheiten in $R[\![T]\!]$.

Abgabe bis Di, 24. April, 08:15 in den Briefkästen

Übung 4. Ein *Monoid* (auch *Halbgruppe* genannt) ist eine Menge M mit einer Verknüpfung $\cdot\colon M \times M \to M$, die assoziativ ist und ein neutrales Element $e \in M$ besitzt. (Es ist also eine Gruppe, bis darauf, dass man die Existenz von Inversen nicht fordert.)

Sei nun R ein kommutativer Ring und M ein Monoid. Dann definiert man $R[M]$, den *Monoidring* von M über R, als die Menge $R^{(M)}$ aller durch Elemente von M indizierten Folgen $(a_m)_{m\in M}$ in R, in denen alle bis auf endlich viele $a_m = 0$ sind. Definiere

$$\begin{aligned} (a_m)_{m\in M} + (b_m)_{m\in M} &:= (a_m + b_m)_{m\in M} \\ (a_m)_{m\in M} \cdot (b_m)_{m\in M} &:= (c_m)_{m\in M} \qquad\qquad \text{mit} \quad c_m = \sum_{m=m'\cdot m''} a_{m'} b_{m''}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $R[M]$ mit dieser Struktur ein Ring ist. (Warum ist die Summe in der Definition des Produkts endlich?)

(b) Sind M, N zwei Monoide, so bezeichne $M \times N$ das Monoid der Paare $\{(m,n) \mid m \in M,\ n \in N\}$ mit komponentenweiser Verknüpfung. Geben Sie einen Ringisomorphismus

$$(R[M])\,[N] \xrightarrow{\cong} R[M \times N].$$

an.

(c) Zeigen Sie, dass sich der Monoidring $R[\mathbb{N}^n]$ für das Monoid $\mathbb{N}^n$ der n-Tupel von natürlichen Zahlen als Ring der Polynome der Form $\sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1,\ldots,i_n} T_1^{i_1} T_2^{i_2} \ldots T_n^{i_n}$ in n Variablen auffassen lässt. Man schreibt hierfür auch: $R[\mathbb{N}^n] = R[T_1, T_2, \ldots, T_n]$.

Übung 5*. Definieren Sie einen sinnvollen Gradbegriff für Polynome in $R[T_1, \ldots, T_n]$, der im Fall $n = 1$ mit dem Grad eines Polynoms in einer Variablen übereinstimmt, und der folgende Axiome erfüllt:

- $\deg(f + g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$
- $\deg(f \cdot g) \leq \deg f + \deg g$, Gleichheit gilt, falls R ein Integritätsring ist,
- $\deg f(T_1, \ldots, T_n) = \deg f(T_{\sigma(1)}, \ldots, T_{\sigma(n)})$ für alle Permutationen $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

(Natürlich müssen Sie zeigen, dass die Axiome tatsächlich erfüllt sind!)