Übungen zur Linearen Algebra II

— Blatt 2 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer 10. April 2007

Übung 1. Berechnen Sie die Determinante der folgenden $n \times n$-Matrix:

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Übung 2. Seien $A_1, \dots, A_k \in K^{n \times n}$ Matrizen und $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ eine Permutation. Zeigen oder widerlegen Sie:

$$\det(A_1 \dots A_k) = \det(A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(k)}).$$

Übung 3 (Bosch, Aufg. 4.4.1)**.** Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Übung 4 (Bosch, Aufg. 4.4.4)**.** Für Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n,\ b \in K^n$ und Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ gelte

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = b.$$

Zeigen Sie:

$$\det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n) = \alpha_i \det(a_1, \dots, a_n)$$

und folgern Sie daraus die Aussage von Korollar 4.4.6 [Bosch, S. 154].

Übung 5*. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $X = (x_1, \dots, x_n)$. Bestimmen Sie die Dimension der folgenden Vektorräume, und geben Sie jeweils eine Basis an.

(a) der Vektorraum $\bigotimes^k V^*$ aller multilinearen Abbildungen $V^k \to K$

(b) der lineare Unterraum $\operatorname{Sym}^k V^*$ aller multilinearen, symmetrischen Abbildungen $V^k \to K$, d.h. aller derjenigen multilinearen Abbildungen $f\colon V^k \to K$, für die für jede Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ gilt:

$$f(v_1, \dots, v_k) = f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

(c) der lineare Unterraum $\bigwedge^k V^*$ aller multilinearen und alternierenden Abbildungen $V^k \to K$.

Abgabe bis Di, 17. April, 08:15 in den Briefkästen