Übungen zur Linearen Algebra II

— Blatt 10 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer 12. Juni 2007

Übung 1 (Bosch, Aufg. 6.5.2). Zeigen Sie, dass zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ genau dann ähnlich sind, wenn ihre Minimalpolynome sowie ihre charakteristischen Polynome übereinstimmen.

Übung 2 (Bosch, Aufg. 6.5.3). Berechnen Sie von folgenden Matrizen in $\mathbb{R}^{4\times 4}$ jeweils das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom und bestimmen Sie die Jordansche Normalform, falls sie existiert:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Übung 3. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Berechnen Sie die Potenzen A^n für alle $n \in \mathbb{N}$, indem Sie geschlossene Ausdrücke für die Einträge der potenzierten Matrix angeben.

Übung 4 (Bosch, Aufg. 6.5.5). Seien K ein Körper, $p_1, \dots, p_n \in K[T]$ paarweise nicht-assoziierte Primpolynome und $1 \le r_i \le s_i$ natürliche Zahlen ($1 \le i \le n$). Gibt es einen endlich-dimensionalen Vektorraum V mit einem Endomorphismus $f\colon V \to V$ mit Minimalpolynom $p_f = p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}$ und charakteristischem Polynom $\chi_f = p_1^{s_1} \dots p_n^{s_n}$?

Übung 5*. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Zeigen oder widerlegen Sie: wenn es zwei verschiedene natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gibt mit $A^n = A^m$, so ist A diagonalisierbar.

Abgabe bis Di, 19. Juni, 08:10 in den Briefkästen.