Übungen zur Linearen Algebra II

— Blatt 1 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer 3. April 2007

Übung 1 (Bosch, Aufg. 4.1.2). Eine Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ heißt ein *r-Zyklus*, wenn es paarweise verschiedene Elemente $a_1, \dots, a_r \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit

$$\begin{aligned} \pi(a_i) &= a_{i+1} \quad \text{für } 1 \leq i < r; \\ \pi(a_r) &= a_1, \end{aligned}$$

und π alle übrigen Elemente von $\{1, \dots, n\}$ fest lässt. Bestimmen Sie das Signum $\operatorname{sgn} \pi$ für einen r-Zyklus $\pi \in \mathfrak{S}_n$.

Übung 2. Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Übung 3 (Bosch, Aufg. 4.2.1). Sei $U < V$ ein r-dimensionaler linearer Unterraum eines n-dimensionalen K-Vektorraums. In V seien $n - r$ Vektoren $x_{r+1}, \dots, x_n$ gegeben. Weiterhin sei $\Delta \colon V^n \to K$ eine Determinantenfunktion. Zeigen Sie, dass sich durch

$$\Delta_U(a_1, \dots, a_r) := \Delta(a_1, \dots, a_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$$

eine Determinantenfunktion $\Delta_U \colon U^r \to K$ definieren lässt. Wann ist Δ_U nichttrivial?

Übung 4. Das *Tensorprodukt* $A \otimes B$ einer $m \times m$-Matrix A und einer $n \times n$-Matrix B ist definiert als die $(mn) \times (mn)$-Matrix, die sich in Blockschreibweise schreiben lässt als

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mm}B \end{pmatrix},$$

wobei $A = (a_{ij})$. Zeigen Sie:

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^n (\det B)^m.$$

Übung 5*. Gegeben seien Matrizen $A \in K^{m \times n}$ und $B \in K^{n \times m}$. Zeigen Sie:

$$\det(I + AB) = \det(I + BA),$$

wobei I jeweils für eine Einheitsmatrix geeigneter Größe steht.

Tipp: Da die Matrizen auf beiden Seiten verschiedene Größen haben, sollten Sie versuchen, $I + AB$ und $I + BA$ zunächst in größere Matrizen (z.B. $(m + n) \times (m + n)$) mit gleicher Determinante einzubauen.

Abgabe bis Di, 10. April, 08:15 in den Briefkästen