Übungen zur Linearen Algebra I

— Blatt 9 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer — 12. Dezember 2006

Wenn man auf $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ die Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*\colon x = \lambda y$ betrachtet, erhält man als Menge der Äquivalenzklassen ein interessantes geometrisches Objekt, die *projektive Ebene* $\mathbb{R}P^2$. Sie lässt sich nicht ohne Selbstdurchdringung im dreidimensionalen Raum einbetten (wohl aber im vierdimensionalen); eine trotzdem sehr ästhetische dreidimensionale Darstellung (bekannt als Boysche Fläche) ist als Skulptur vor dem Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach zu bewundern.

Übung 1 (Bosch, Aufg. 2.1.6). Für lineare Unterräume U, U' eines K-Vektorraums V sei die Abbildung $\phi\colon U \times U' \to V$ gegeben durch $\phi(a, b) = a - b$.

(a) Zeigen Sie, dass ϕ K-linear ist, wenn man $U \times U'$ mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation als K-Vektorraum auffasst.

(b) Berechnen Sie $\dim_K(U \times U')$.

(c) Wenden Sie die Dimensionsformel für lineare Abbildungen auf ϕ an und folgern Sie daraus die Dimensionsformel für lineare Unterräume von V:

$$\dim_K U + \dim_K U' = \dim_K(U + U') + \dim_K(U \cap U').$$

Übung 2 (Bosch, Aufg. 2.1.8). Seien $V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3$ K-lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen K-Vektorräumen. Zeigen Sie:

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leq \operatorname{rg}(g \circ f) + \dim V_2.$$

Übung 3 (Bosch, Aufg. 2.2.1). Betrachten Sie folgende Mengen M mit der jeweils angegebenen Relation $\sim$ und entscheiden Sie, ob es sich um eine Äquivalenzrelation handelt. Geben Sie, falls möglich, die Äquivalenzklassen an.

(a) $M = \mathbb{R}$, $a \sim b :\Leftrightarrow |a| = |b|$;

(b) $M = \mathbb{R}$, $a \sim b :\Leftrightarrow |a - b| < 1$;

(c) $M = \mathbb{Z}$, $a \sim b :\Leftrightarrow p \mid a - b$, d.h., die (fest gewählte) Zahl $p \in \mathbb{Z}$ teilt $a - b$, oder noch präziser: es gibt ein $c \in \mathbb{Z}$, so dass $cp = a - b$.

Übung 4 (Bosch, Aufg. 2.2.4). Sei V ein K-Vektorraum und $A \subseteq V$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass es eine kleinste Menge A' mit $A \subseteq A' \subseteq V$ gibt, so dass die durch

$$a \sim b :\Leftrightarrow a - b \in A'$$

definierte Relation eine Äquivalenzrelation ist. Bestimmen Sie A' unter der Voraussetzung, dass A abgeschlossen unter skalarer Multiplikation ist:

$$\alpha \in K, a \in A \Rightarrow \alpha a \in K.$$

Übung 5*. Sei $V = \mathbb{R}^2$. Auf $V \oplus V \oplus V =: V^3$ sei eine Relation definiert durch: $(a_1, a_2, a_3) \sim (b_1, b_2, b_3)$ genau dann, wenn es einen Isomorphismus $f\colon V \to V$ gibt mit $f(a_i) = b_i$ für $i = 1,\ 2,\ 3$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und bestimmen Sie die Äquivalenzklassen mit expliziten Repräsentanten.