Übungen zur Linearen Algebra I

— Blatt 8 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer 5. Dezember 2006 (korrigierte Fassung)



Nikoläuse, linearen Abbildungen unterworfen
(a) $r' = g, g' = r$ (b) $x' = x - y, y' = y$ (c) $r' = r + x, g' = g + y, b' = b + r$

Übung 1 (Bosch, Aufg. 2.1.2). Gibt es $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, die die folgenden Vektoren $a_i \in \mathbb{R}^4$ jeweils auf die angegebenen Vektoren $b_i \in \mathbb{R}^3$ abbilden?

(a) $a_1 = (1,1,0,0)$, $a_2 = (1,1,1,0)$, $a_3 = (0,1,1,1)$, $a_4 = (0,0,1,1)$;
$b_1 = (1,2,3)$, $b_2 = (2,3,1)$, $b_3 = (3,1,2)$, $b_4 = (2,0,4)$

(b) $a_1 = (0,1,1,1)$, $a_2 = (1,0,1,1)$, $a_3 = (1,1,0,1)$;
$b_1 = (1,2,3)$, $b_2 = (2,3,1)$, $b_3 = (3,1,2)$

(c) $a_1 = (0,1,1,1)$, $a_2 = (1,0,1,1)$, $a_3 = (1,1,0,1)$, $a_4 = (0,2,0,1)$;
$b_1 = (1,2,3)$, $b_2 = (2,3,1)$, $b_3 = (3,1,2)$, $b_4 = (2,0,4)$

Übung 2 (Bosch, Aufg. 2.1.5). Sei V ein K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus (d.h. ein Homomorphismus eines Vektorraums auf sich selbst) mit $f^2 = f$. Zeigen Sie:

$$V = \ker f \oplus \operatorname{im} f.$$

Übung 3. Seien U_1, U_2, U_3 endlichdimensionale Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

$$\dim(U_1 + U_2 + U_3) = \dim(U_1) + \dim(U_2) + \dim(U_3) - \dim(U_1 \cap U_2) - \dim((U_1 + U_2) \cap U_3)$$

Abgabe bis Di, 12. Dezember, 08:10 in den Briefkästen

Übung 4 (Bosch, Aufg. 1.6.7). Seien U, U' lineare Unterräume eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Unter welcher Bedingung besitzen U und U' ein gemeinsames Komplement in V? Das heißt: wann gibt es einen Unterraum C, so dass $V = U \oplus C = U' \oplus C$ gilt?

Übung 5*. Wir nennen eine Folge von Vektorräumen und linearen Abbildungen

$$U_1 \xrightarrow{u_2} U_2 \xrightarrow{u_3} U_3$$

exakt, falls $\mathrm{im}(u_2) = \ker(u_3)$ gilt. Eine längere Folge $\ldots \xrightarrow{f_i} U_i \xrightarrow{f_{i+1}} U_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \ldots$ nennen wir exakt, falls jede Teilfolge aus drei aufeinanderfolgenden Vektorräumen exakt ist.

Gegeben seien nun Vektorräume und Abbildungen

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "f_1"'] & U_2 \arrow[r, "u_3"] \arrow[d, "f_2"'] & U_3 \arrow[r, "u_4"] \arrow[d, "f_3"'] & U_4 \arrow[r, "u_5"] \arrow[d, "f_4"'] & U_5 \arrow[d, "f_5"'] \\
V_1 \arrow[r, "v_2"] & V_2 \arrow[r, "v_3"] & V_3 \arrow[r, "v_4"] & V_4 \arrow[r, "v_5"] & V_5,
\end{tikzcd}$$

so dass obiges Diagramm exakte Zeilen hat und *kommutiert*, d.h.,

$$v_i \circ f_{i-1} = f_i \circ u_i \quad \text{für } 2 \leq i \leq 5.$$

Zeigen Sie: sind f_1, f_2, f_4 und f_5 Isomorphismen, so auch f_3. Gilt die analoge Aussage auch für Monomorphismen bzw. Epimorphismen?