— BLATT 7 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer 28. November 2006

> **§ 2. Les ensembles saturés et irréductibles. Théorème de M. Brouwer.**
>
> Un ensemble est dit, selon Janiszewski[1]), *saturé* par rapport à une propriété donnée, s'il la possède et s'il n'est un vrai sous-ensemble d'aucun ensemble qui la possède. Un ensemble est dit *irréductible* par rapport à une propriété, s'il la possède et s'il ne renferme aucun vrai sous-ensemble qui la possède.
>
> Les notions d'ensembles saturés et irréductibles ont été traitées à plusieurs reprises. C'est surtout dans l'Analysis Situs qu'on en faisait usage. Or, le théorème suivant concerne les ensembles dont les éléments sont de nature tout à fait arbitraire:
>
> **(41)** *E étant un ensemble à propriété $\mathfrak{R}$, si le produit de toute classe bien ordonnée de sous-ensembles décroissants de E, qui présentent cette propriété, la présente également, — il existe un sous-ensemble de E qui est irréductible par rapport à $\mathfrak{R}$.*

Das Zornsche Lemma geht auf Kuratowski zurück: hier seine Formulierung (Fundamenta Mathematicae **3**, 1922).

Übung 1. Betrachten Sie folgendes Erzeugendensystem W auf $\mathbb{R}^4$:

$$(1,2,-1,0)\ ,\ (1,-2,-2,1)\ ,\ (1,0,1,-1)\ ,\ (0,-1,1,-1)\ ,\ (1,1,1,1)$$

(Sie müssen nicht zeigen, dass es tatsächlich ein Erzeugendensystem ist.) Zeigen Sie, dass folgende Systeme linear unabhängig sind, und ergänzen Sie sie zu einer Basis, indem Sie geeignete Vektoren aus W hinzufügen. (Der Basisergänzungssatz sagt aus, dass das immer möglich ist.) Begründen Sie in jedem Fall, dass Ihr Ergebnis eine Basis ist.

(a) $(1,0,0,0)\ ,\ (0,1,0,0)\ ,\ (0,1,1,0)$;

(b) $(2,-2,-1,0)\ ,\ (0,-2,-3,2)$;

(c) $(0,6,4,-3)$.

Übung 2 (Bosch, Aufg. 1.6.1). Bestimmen Sie Komplemente zu folgenden linearen Unterräumen des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$:

(a) $U = \langle (1,2,3), (-2,3,1), (4,1,5) \rangle$;

(b) $U = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \}$.

Übung 3. Sei I eine *total (auch: streng) geordnete Menge*. Das heißt: es gibt eine Relation „$\leq$" auf I, die folgende Eigenschaften hat (für $i,\ j,\ k \in I$):

(Reflexivität) $i \leq i$;

(Transitivität) $i \leq j \wedge j \leq k \Rightarrow i \leq k$;

(Antisymmetrie) $(i \leq j \wedge j \leq i) \Rightarrow i = j$;

(Totalität) $i \leq j \vee j \leq i$.

Sei nun weiterhin V ein K-Vektorraum mit einer Basis $(x_i)_{i \in I}$ und $(\alpha_{ij})_{i,\, j \in I}$ ein System von Koeffizienten in K mit $\alpha_{ij} = 0$ für $j \leq i$, und für jedes $j \in J$ gelte $\alpha_{ij} = 0$ für alle bis auf endlich viele $i \in I$. Zeigen Sie: Mit

$$y_j := x_j + \sum_{i \in I} \alpha_{ij} x_i$$

bildet $(y_j)_{j \in I}$ ebenfalls eine Basis von V.

Zeigen Sie an einem Beispiel, dass man die Bedingung $\alpha_{ij} = 0$ für $j \leq i$ nicht ersatzlos streichen kann.

Übung 4 (Bosch, Aufg. 1.6.2). Sei $V = \sum_{i=1}^{n} U_i$ eine Zerlegung eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V in Untervektorräume $U_i \subseteq V$. Zeigen Sie, dass die Summe der U_i genau dann direkt ist, wenn $\dim V = \sum_{i=1}^{n} \dim U_i$ gilt.

Übung 5*. Eine *Flagge* in einem Vektorraum V ist eine Menge $\mathcal{F}$ von Unterräumen von V mit der Eigenschaft, dass für verschiedene $U,\ U' \in \mathcal{F}$ gilt, dass entweder $U \subset U'$ oder $U' \subset U$ gilt. Eine Flagge heißt maximal, wenn man zu $\mathcal{F}$ keine weiteren Unterräume hinzufügen kann, ohne die Flaggeneigenschaft zu verlieren.

(a) Zeigen Sie: Jeder Vektorraum besitzt eine maximale Flagge.

(b) Eine Basis $\mathcal{B}$ von V heißt *an eine Flagge $\mathcal{F}$ angepasst*, falls für jedes $U \in \mathcal{F}$ eine Teilmenge von $\mathcal{B}$ eine Basis von U ist. Zeigen Sie, dass jede Flagge eine angepasste Basis besitzt.