Übungen zur Linearen Algebra I

— Blatt 6 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer 21. November 2006

Schüler.
Kann Euch nicht eben ganz verstehen.
Mephistopheles.
Das wird nächstens schon besser gehen,
Wenn Ihr lernt alles reduzieren
Und gehörig klassifizieren.
Schüler.
Mir wird von alledem so dumm,
Als ging' mir ein Mühlrad im Kopf herum.
Mephistopheles.
Nachher, vor allen andern Sachen,
Müsst Ihr Euch an die Metaphysik machen!
Da seht, dass Ihr tiefsinnig fasst,
Was in des Menschen Hirn nicht passt;
Für was drein geht und nicht drein geht,
Ein prächtig Wort zu Diensten steht.
Doch vorerst dieses halbe Jahr
Nehmt ja der besten Ordnung wahr.
Fünf Stunden habt Ihr jeden Tag;
Seid drinnen mit dem Glockenschlag!
Habt Euch vorher wohl präpariert,
Paragraphos wohl einstudiert,
Damit Ihr nachher besser seht,
Dass er nichts sagt, als was im Buche steht;
Doch Euch des Schreibens ja befleißt,
Als diktiert' Euch der Heilig' Geist!
— *Altklugheit aus na-was-wohl*

Übung 1. Bestimmen Sie im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$, ob folgende Systeme von Vektoren linear abhängig oder unabhängig sind. Geben Sie im Falle linearer Abhängigkeit eine nichttriviale Linearkombination der Vektoren an, die Null ist. Zeigen Sie im Falle linearer Unabhängigkeit, dass jede Linearkombination der Vektoren, die Null ist, schon trivial sein muss.

(a) $(1,0,1)$ und $(0,1,1)$;

(b) $(1,1,0)$, $(0,1,0)$ und $(2,-1,0)$;

(c) $(2,-1,0)$, $(1,0,-1)$ und $(0,1,-1)$;

(d) $(3,3,1)$, $(-1,1,0)$, $(2,0,1)$ und $(-1,-1,-1)$.

Übung 2. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem linear unabhängigen System $v_1, \ldots, v_n$. Wir definieren eine Teilmenge

$$W = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ und } \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0\}$$

Zeigen Sie, dass W ein linearer Unterraum von V ist. Geben Sie eine Basis von W an und bestimmen Sie die Dimension von W.

Übung 3 (Bosch, Aufg. 1.5.2). Seien U, U' lineare Unterräume eines K-Vektorraums V mit $U \cap U' = \{0\}$. Gegeben seien außerdem linear unabhängige Systeme

$$x_1, \ldots, x_r \in U \quad \text{und} \quad y_1, \ldots, y_s \in U'.$$

Zeigen Sie, dass die Vereinigung $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s$ der beiden Systeme linear unabhängig in V ist.

Übung 4 (Bosch, Aufg. 1.5.4). In dem $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachte man den linearen Unterraum P derjenigen Funktionen, die sich schreiben lassen als

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Wir nennen P den Vektorraum der *Polynomfunktionen*. Bestimmen Sie eine Basis für P.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ nur dann unendlich viele Nullstellen haben kann, wenn alle $\alpha_i = 0$ sind.

Übung 5*. Sei wieder einmal K ein endlicher Körper mit $\#K = q$ Elementen. Wie viele verschiedene Basen hat der Vektorraum K^n für $n \in \mathbb{N}$? Beispiel: für $n = 1$ hat jede Basis die Länge 1, besteht also nur aus einem einzigen Vektor. Dieser darf ein beliebiger Vektor außer dem Nullvektor sein, also gibt es in K^1 genau $\#K - 1 = q - 1$ verschiedene Basen.