— BLATT 5 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer 14. Oktober 2006

Die Wissenschaft

der

extensiven Grösse

oder

die Ausdehnungslehre,

eine neue mathematische Disciplin

dargestellt und durch Anwendungen erläutert

von

Hermann Grassmann

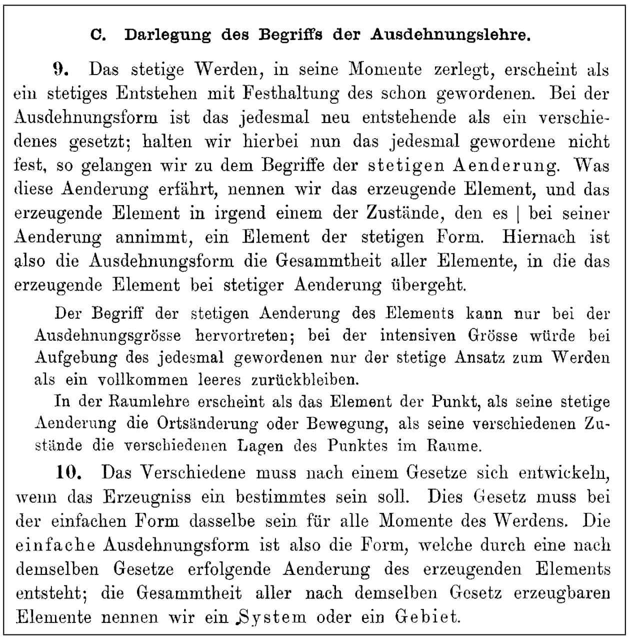
Lehrer an der Friedrich-Wilhelms-Schule zu Stettin.

Erster Theil,

die **lineale Ausdehnungslehre** enthaltend.

Leipzig, 1844.

Verlag von Otto Wigand.



C. Darlegung des Begriffs der Ausdehnungslehre.

9. Das stetige Werden, in seine Momente zerlegt, erscheint als ein stetiges Entstehen mit Festhaltung des schon gewordenen. Bei der Ausdehnungsform ist das jedesmal neu entstehende als ein verschiedenes gesetzt; halten wir hierbei nun das jedesmal gewordene nicht fest, so gelangen wir zu dem Begriffe der stetigen Aenderung. Was diese Aenderung erfährt, nennen wir das erzeugende Element, und das erzeugende Element in irgend einem der Zustände, den es | bei seiner Aenderung annimmt, ein Element der stetigen Form. Hiernach ist also die Ausdehnungsform die Gesammtheit aller Elemente, in die das erzeugende Element bei stetiger Aenderung übergeht.

Der Begriff der stetigen Aenderung des Elements kann nur bei der Ausdehnungsgrösse hervortreten; bei der intensiven Grösse würde bei Aufgebung des jedesmal gewordenen nur der stetige Ansatz zum Werden als ein vollkommen leeres zurückbleiben.

In der Raumlehre erscheint als das Element der Punkt, als seine stetige Aenderung die Ortsänderung oder Bewegung, als seine verschiedenen Zustände die verschiedenen Lagen des Punktes im Raume.

10. Das Verschiedene muss nach einem Gesetze sich entwickeln, wenn das Erzeugniss ein bestimmtes sein soll. Dies Gesetz muss bei der einfachen Form dasselbe sein für alle Momente des Werdens. Die einfache Ausdehnungsform ist also die Form, welche durch eine nach demselben Gesetze erfolgende Aenderung des erzeugenden Elements entsteht; die Gesammtheit aller nach demselben Gesetz erzeugbaren Elemente nennen wir ein System oder ein Gebiet.

Hermann Graßmann führte 1844 den Begriff des reellen Vektorraums (bei ihm: Ausdehnungsgebiet) und seine Axiomatik ein. Allerdings war seine Sprache so philosophisch, dass die Arbeit zunächst kaum rezipiert wurde.

Übung 1 (Bosch, Aufg. 1.4.1). Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein linearer Unterraum. Für welche Elemente $a \in V$ ist

$$a + U := \{a + u \mid u \in U\}$$

wiederum ein linearer Unterraum von V?

Übung 2 (Bosch, Aufg. 1.4.3). Sei K ein Körper und V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Dann lässt sich jedes beliebige Erzeugendensystem A von V zu einem endlichen Erzeugendensystem verkleinern, d.h., es gibt eine endliche Teilmenge $B \subseteq A$, so dass $\langle B \rangle = V$ gilt.

Übung 3 (Bosch, Aufg. 1.4.4). Sei $K \subseteq L$ ein Teilkörper und V ein L-Vektorraum. Außerdem sei $(x_j)_{j\in J}$ ein Erzeugendensystem von V als L-Vektorraum und $(\alpha_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von L, aufgefasst als K-Vektorraum. Hierbei sind I und J beliebige Indexmengen. Zeigen Sie: die Produkte $(\alpha_i x_j)_{(i,j)\in I\times J}$ bilden ein Erzeugendensystem von V als K-Vektorraum.

Übung 4 (Bosch, Aufg. 1.4.5). Gegeben seien Punkte $x,\ y \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, die nicht gemeinsam auf einer Geraden durch den Ursprung $0 \in \mathbb{R}^2$ liegen, d.h., $\alpha x \neq \beta y$ für alle $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^*$. Zeigen Sie, dass x, y bereits ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$ bilden. Gilt eine entsprechende Aussage auch, wenn man $\mathbb{R}$ durch einen beliebigen Körper K ersetzt?

Übung 5*. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine *absteigende Filtrierung* von V ist eine Folge

$$V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots$$

von linearen Unterräumen. Wir nennen eine Folge von Elementen $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von V eine *Cauchy-Folge*, falls es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $i,\ j \in \mathbb{N}$ mit $i,\ j \geq N$ gilt: $x_i - x_j \in V_n$. Wir sagen außerdem, dass eine Folge (x_i) gegen $x \in V$ *konvergiert*, falls es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $i \geq N$ gilt: $x - x_i \in V_n$. Wir nennen die Filtrierung (V_i) *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge konvergiert.

Bezeichne mit $K^{\mathbb{N}} = \{f\colon \mathbb{N} \to K\}$ den Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{N}$ nach K und mit $K^{(\mathbb{N})}$ den Untervektorraum derjenigen Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to K$, für die $f(i) \neq 0$ für höchstens endlich viele i gilt.

Zeigen Sie:

(a) Auf dem Vektorraum $V = K^{\mathbb{N}}$ ist die Filtrierung

$$V_n = \{f \in K^{\mathbb{N}} \mid f(0) = \dots = f(n-1) = 0\}$$

vollständig.

(b) Auf $W = K^{(\mathbb{N})}$ ist die Filtrierung $W_n = W \cap V_n$ nicht vollständig.