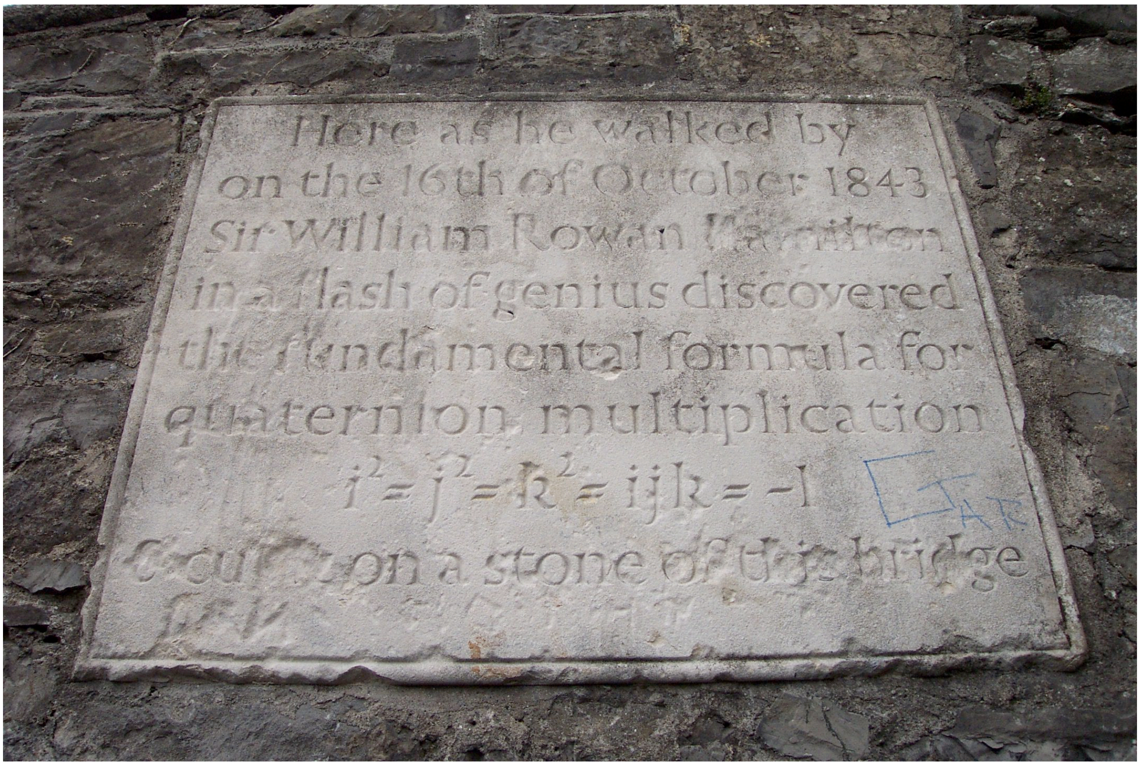
ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

— BLATT 4 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer 9. Oktober 2006 (korrigierte Fassung)



Tafel an der Brougham Bridge, Dublin (zu Übung 5*)

Übung 1 (Bosch, Aufg. 1.3.2). Sei K ein endlicher Körper. Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in K$ bezeichne $na = a + \cdots + a$ die n-fache Summe von a mit sich selbst.

(a) Es existiert in $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, so dass $na = 0$ für alle $a \in K$ gilt.

(b) Wählt man n wie in (a) minimal, so ist n eine Primzahl, die man die *Charakteristik* von K nennt.

Übung 2 (Bosch, Aufg. 1.3.6). Bestimmen Sie den kleinsten Teilkörper von $\mathbb{C}$, der die komplexe Zahl i enthält.

Übung 3. Zeigen Sie mittels Induktion:

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}.$$

Können Sie diese Gleichung auch kombinatorisch verdeutlichen?

Übung 4. Es bezeichne $\mathcal{P}_k(n)$ die Menge aller k-elementigen Teilmengen von $\{1,\ldots,n\}$. Für $1 \le k \le n$ hat jede solche Teilmenge $A \in P_k(n)$ ein minimales Element $1 \le \min A \le n$. Sei $F(n,k)$ der arithmetische Mittelwert aller dieser minimalen Elemente:

$$F(n,k) = \binom{n}{k}^{-1} \sum_{A \in P_k(n)} \min A.$$

Zum Beispiel ist $\mathcal{P}_2(3) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$, und der Mittelwert der minimalen Elemente ist $\frac{1+1+2}{3} = \frac{4}{3}$. Zeigen Sie:

$$F(n,k) = \frac{n+1}{k+1}.$$

Tipp: Sorgfältige Induktion. Verwenden Sie folgende Beobachtung: eine k-elementige Teilmenge von $\{1,\ldots,n\}$ ist entweder eine $(k-1)$-elementige Teilmenge von $\{1,\ldots,n-1\}$ vereinigt mit $\{n\}$ oder eine k-elementige Teilmenge von $\{1,\ldots,n-1\}$.

Übung 5*. Eine $*$-Algebra ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum A mit zwei zusätzlichen Operationen $\cdot$ und *, so dass

(a) $\cdot$ eine innere Verknüpfung $A \times A \to A$ ist, die rechts- und linkslinear ist:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{und} \quad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{für } a,\ b,\ c \in A;$$
$$(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b) = a \cdot (\lambda b) \quad \text{für } a \in A,\ \lambda \in \mathbb{R};$$

(b) jedem $a \in A$ ein Element a^* zugeordnet ist, so dass $(\lambda a)^* = \lambda a^*$, $(a+b)^* = a^* + b^*$, $a^{**} = a$ und $(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, $a,\ b \in A$ gilt.

Beispielsweise ist $\mathbb{R}$ mit der üblichen Multiplikation und $a^* = a$ eine $*$-Algebra; ebenso $\mathbb{C}$ mit der üblichen Multiplikation und $a^* = \overline{a}$.

Wir nennen A kommutativ (assoziativ), falls $\cdot$ eine kommutative (assoziative) Verknüpfung ist.

Sei nun A eine $*$-Algebra und definiere auf $CD(A) := A \times A$ für $a,b,c,d \in A$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(a,b) + (c,d) &:= (a+c, b+d),\\
\lambda(a,b) &:= (\lambda a, \lambda b),\\
(a,b) \cdot (c,d) &:= (ac - db^*, a^*d + cb),\\
(a,b)^* &:= (a^*, -b).
\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Ist A eine $*$-Algebra, so ist $CD(A)$ ist wiederum eine $*$-Algebra.

(b) $CD(\mathbb{R}) = \mathbb{C}$.

(c) Ist A kommutativ, so ist $CD(A)$ assoziativ.

(d) $CD(\mathbb{C})$ ist nicht kommutativ. Diese Algebra nennt man die Algebra der *Quaternionen* und bezeichnet sie nach ihrem Entdecker Hamilton (1843) mit $\mathbb{H}$.

(e) $CD(\mathbb{H})$ ist nicht assoziativ. Diese Algebra nennt man die Algebra der *Oktaven* und bezeichnet sie mit $\mathbb{O}$. Sie wurden zuerst von John Graves entdeckt (ebenfalls 1843), aber erstmals 1845 von Arthur Cayley veröffentlicht, so dass die Oktaven auch Cayley-Zahlen genannt werden.

(f) $CD(\mathbb{O})$ hat Nullteiler, d.h. es gibt Elemente $a, b \in CD(\mathbb{O}) - \{0\}$ mit $a \cdot b = 0$.