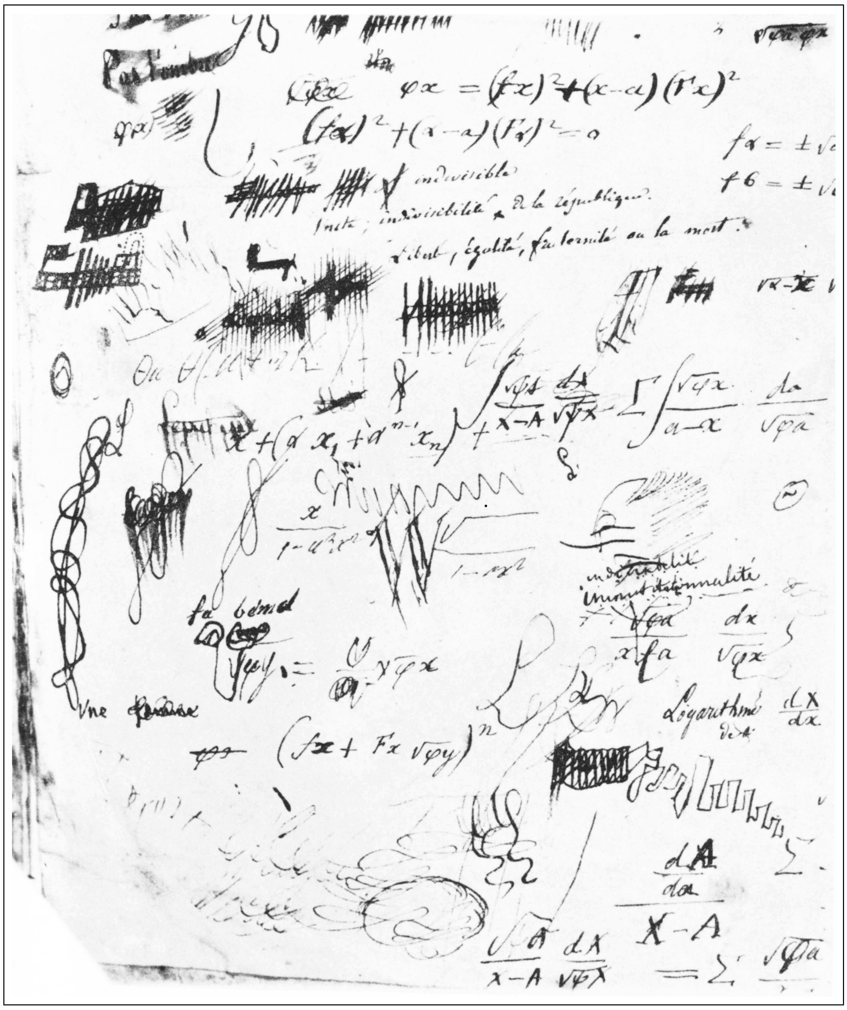
Übungen zur Linearen Algebra I

— Blatt 3 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer — 31. Oktober 2006



Auf Évariste Galois, neben Niels Henrik Abel und Sophus Lie, geht der heutige Begriff der Gruppe zurück. Galois studierte Gruppen von Permutationen der Nullstellen von Gleichungen, die man heute Galoisgruppen nennt. Dies ist ein Blatt, das Galois 1832 im Alter von 20 Jahren am Vorabend seines Tods durch ein Pistolenduell um eine Frau schrieb.

Übung 1 (Bosch, Aufg. 1.2.1). Für eine Menge X betrachte man die Menge $\mathrm{Bij}(X, X)$ der bijektiven Selbstabbildungen. Man prüfe nach, dass $\mathrm{Bij}(X, X)$ unter der Komposition von Abbildungen eine Gruppe bildet und zeige, dass diese genau dann nicht kommutativ ist, wenn X mindestens drei verschiedene Elemente besitzt.

Übung 2 (Bosch, Aufg. 1.2.3). Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Teilmenge. Man zeige, dass H genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn gilt:

(a) $H \neq \emptyset$,

(b) $a,\ b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.

Übung 3 (Bosch, Aufg. 1.2.4). Sei G eine Gruppe mit Untergruppen $H_1,\ H_2 \subseteq G$. Man zeige, dass $H_1 \cup H_2$ genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn $H_1 \subseteq H_2$ oder $H_2 \subseteq H_1$ gilt.

Übung 4 (Bosch, Aufg. 1.2.8). Für ein $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ betrachte man die Teilmenge $R_n = \{0, 1, \ldots, n-1\} \subset \mathbb{N}$. Es sei $\pi\colon \mathbb{Z} \to R_n$ die Abbildung, die einer ganzen Zahl deren nicht-negativen Rest bei Division durch n zuordnet. (Z.B. ist $\pi(-8) = 2$ für $n = 5$.)

(a) Es existiert eine eindeutig bestimmte Verknüpfung $(a, b) \mapsto a + b$ auf R_n, so dass für $x,\ y \in \mathbb{Z}$ stets $\pi(x + y) = \pi(x) + \pi(y)$ gilt.

(b) R_n ist mit dieser Verknüpfung eine Gruppe.

Man bezeichnet diese Gruppe üblicherweise mit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/(n)$, $\mathbb{Z}/n$ oder (veraltet) $\mathbb{Z}_n$ und nennt sie die Gruppe der *ganzen Zahlen modulo* n.

Übung 5 (Bosch, Aufg. 1.2.9). Sei G eine Gruppe. Auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(G)$ (der Menge aller Teilmengen von G) betrachte man die durch

$$(A, B) \mapsto A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

gegebene Verknüpfung. Zeigen Sie, dass diese Verknüpfung assoziativ ist und ein neutrales Element besitzt. Ist $\mathfrak{P}(G)$ mit dieser Verknüpfung eine Gruppe? Wenn nein, zu welchen Elementen $A \in \mathfrak{P}(G)$ gibt es Inverse?

*Diesmal keine *-Aufgabe!*