

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

— BLATT 2 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer

24. Oktober 2006

Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.

Von

GEORG CANTOR in Halle a./S.

(Erster Artikel.)

„Hypothesen non fingo.“

„Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus.“

„Veniet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia.“

§ 1.

Der Mächtigkeitsbegriff oder die Cardinalzahl.

Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

In Zeichen drücken wir dies so aus:

(1) $M = \{m\}$.

Die Vereinigung mehrerer Mengen M, N, P, \dots , die keine gemeinsamen Elemente haben, zu einer einzigen bezeichnen wir mit

(2) (M, N, P, \dots) .

Die Elemente dieser Menge sind also die Elemente von M , von N , von P etc. zusammengenommen.

‚Theil‘ oder ‚Theilmenge‘ einer Menge M nennen wir jede *andere* Menge M_1 , deren Elemente zugleich Elemente von M sind.

Ist M_2 ein Theil von M_1 , M_1 ein Theil von M , so ist auch M_2 ein Theil von M .

Jeder Menge M kommt eine bestimmte ‚Mächtigkeit‘ zu, welche wir auch ihre ‚Cardinalzahl‘ nennen.

‚Mächtigkeit‘ oder ‚Cardinalzahl‘ von M nennen wir den *Allgemeinbegriff*, welcher mit Hilfe unseres activen Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahirt wird.

Mathematische Annalen. XLVI.

31

CANTOR, 1897

Übung 1 (Bosch, Aufg. 1.1.1). Seien A, B, C Teilmengen einer Menge X . Man zeige:

- (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- (b) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
- (c) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

Abgabe bis Di, 31. Oktober, 08:15 in den Briefkästen

Übung 2 (Bosch, Aufg. 1.1.2). Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen Mengen. Man zeige für Teilmengen $M_1, M_2 \subset X$ und $N_1, N_2 \subset Y$:

- (a) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$
- (b) $f(M_1 \cap M_2) \subset f(M_1) \cap f(M_2)$. Gilt sogar Gleichheit?
- (c) $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$
- (d) $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$
- (e) $f(f^{-1}(N_1)) \subset N_1$. Wann gilt Gleichheit?
- (f) $f^{-1}(f(M_1)) \supset M_1$. Wann gilt Gleichheit?

Übung 3 (Bosch, Aufg. 1.1.3). Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ Abbildungen von Mengen, so dass $g \circ f$ bijektiv ist. Zeigen Sie, dass f injektiv und g surjektiv ist.

Übung 4 (Bosch, Aufg. 1.1.4). Zwischen welchen der folgenden Paare von Mengen gibt es bijektive Abbildungen?

- (a) \mathbb{N} und \mathbb{Z}
- (b) \mathbb{N} und $\mathbb{N} \times \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$
- (c) \mathbb{N} und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- (d) \mathbb{N} und \mathbb{Q}

Übung 5*. „Nicht schon wieder!“, flucht Schröder, der Rezeptionist des *Grand Hotel Hilbert*. Seit dem Anbau des neuen Flügels mit unendlich vielen Zimmern herrscht im Hotel Chaos, vor allem, weil die Zimmertüren immer noch nicht mit Nummern versehen sind. Und jetzt kommt da wieder eine Kolonne von unendlich vielen vollbesetzten Bussen an. Schröder hasst seinen Job. Als die Gäste durch die Türen hereinströmen, lässt er sie sich einfach selbst freie Zimmer suchen. Nach langem Tumult steht aber immer noch eine beträchtliche Gruppe von Gästen, die kein freies Zimmer gefunden haben, in der Lobby herum. Soll sich doch die Chefin drum kümmern, denkt Schröder und ruft sie aus ihrem Büro herbei. Frau Bernstein erscheint, wirft einen Blick über die leer ausgegangenen Gäste in der Lobby und betätigt den Durchsageknopf: „Meine verehrten Damen und Herren, ich muss Sie leider bitten, sich alle noch einmal ein neues Zimmer auszusuchen. Bitte überlassen Sie Ihr jetziges Zimmer einem anderen!“ Schröder staunt, denn plötzlich haben auch die in der Lobby Wartenden freie Zimmer gefunden. Er will sich wieder seiner Zeitungslektüre zuwenden, aber die Chefin ist noch unzufrieden: „Schröder, jetzt haben wir zwar alle untergebracht, aber immer noch eine Menge freier Zimmer. Können wir es nicht hinbekommen, alle Zimmer zu belegen und gleichzeitig alle Gäste unterzubringen?“

Als es schon wieder zu dämmern beginnt, haben die beiden eine Lösung gefunden, aber Schröder ist sauer. Er kündigt zum Monatsende wegen zu vieler unbezahlter Überstunden. Wie sieht die Lösung aus?

Konkret und etwas allgemeiner gefragt: Seien G (Gäste) und Z (Zimmer) zwei beliebige Mengen mit zwei injektiven Abbildungen $G \rightarrow Z$ und $Z \rightarrow G$. Konstruieren Sie eine bijektive Abbildung $G \xrightarrow{\sim} Z$.

Mehr zu Hilberts Hotel:

http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_paradox_of_the_Grand_Hotel