— BLATT 12 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer 16. Januar 2007 (korrigierte Version)

Übung 1 (Bosch, Aufg. 3.1.6). Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie:

(a) Es gibt genau dann einen nicht-trivialen Unterraum $U \subsetneq V$ mit $f(U) \subseteq U$, wenn es in V eine Basis X gibt mit $A_{f,X,X} = \begin{pmatrix} \square & * \\ 0 & \square \end{pmatrix}$.

(b) Es existieren genau dann nicht-triviale Unterräume $U_1,\ U_2 \subseteq V$ mit $V = U_1 \oplus U_2$ und $f(U_i) \subseteq U_i$ für $i = 1,\ 2$, wenn es in V eine Basis X gibt mit $A_{f,X,X} = \begin{pmatrix} \square & 0 \\ 0 & \square \end{pmatrix}$.

Hierbei stehen die „$\square$“ für beliebige quadratische Untermatrizen (nicht 0×0), „$*$“ für beliebige (auch nichtquadratische) Untermatrizen und „0“ für eine Nullmatrix geeigneter Größe (auch hier nicht 0×0).

Übung 2 (Bosch, Aufg. 3.1.8). Sei $m > 0$, $E \in K^{m\times m}$ die Einheitsmatrix und $N = (\alpha_{ij}) \in K^{m\times m}$ eine strikte Obere-Dreiecks-Matrix, d.h., $\alpha_{ij} = 0$ für $i \geq j$. Zeigen Sie:

(a) $N^m = 0$ („N ist *nilpotent*“).

(b) Die Matrix $B = E + N$ ist invertierbar, d.h., es gibt eine Matrix C mit $BC = CB = E$.

Tipp: Versuchen Sie, die Formel für die geometrische Reihe zu verwenden.

Danke! Für all die Hilfe, all die Arbeit	DANKE! Jetzt kann in der Klausur nichts mehr schiefgehen!	DANKE!! Deinetwegen ist mir so viel — So viel klarer geworden.	BITTE BITTE pretty PRETTY PLEASE Mach nächstes Semester wieder Übungsleiter!
Danke, dass du diesen Stoff für mich so erträglich gemacht hast!	DANKE „hart aber fair“	Ich will auch so sein wie du! So schlau! So schön!	Danke! Ich hätte es nicht besser machen können!
Danke! ... Es lag nicht an dir...	Ich finde, dass die Übungsleiter skandalös unterbezahlt sind! Es kann doch nicht sein, dass man mit Putzen mehr verdient als mit Unterrichten an der Uni! Daher doppeltes Danke!	Du hast dein Bestes gegeben... DANKE!	? ? Was? Wer? ? Häh? Wieso?
DANKE! DU WARST... NETT UNTERSTÜTZEND FREUNDLICH und noch viel mehr! DEMÜTIG	DANKE. Aber das ist jetzt schon etwas kindisch, oder?	ICH LIEBE DICH! Ich will ein Kind von dir!	Danke! Ich fand die Vorlesung aber auch ziemlich gut!

Letztes Übungsblatt! Eines Ausschneiden und dem Übungsleiter geben (anonym)!

Übung 3 (Bosch, Aufg. 3.2.1). Bringen Sie die $\mathbb{R}$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 9 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

auf Zeilenstufenform.

Übung 4 (Bosch, Aufg. 3.2.4). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der lineare Unterraum, der von den folgenden Vektoren erzeugt wird:

$$(1,2,1,2),\ (2,5,4,5),\ (1,4,6,6),\ (2,5,6,9),\ (2,6,7,8),\ (1,1,0,3).$$

Berechnen Sie $\dim_{\mathbb{R}} U$ und geben Sie eine Basis von U an.

Übung 5 (Bosch, Aufg. 3.2.5). Folgende lineare Unterräume von $\mathbb{R}^5$ seien gegeben:

$$\begin{aligned} U &= \langle (1,0,1,0,1),\ (2,3,4,1,2),\ (0,3,2,1,0) \rangle, \\ U' &= \langle (1,-1,1,0,2),\ (1,3,3,1,1),\ (1,2,3,1,2) \rangle. \end{aligned}$$

Berechnen Sie $\dim U$ und $\dim U'$. Ist $U \subseteq U'$?