Übungen zur Linearen Algebra I

— Blatt 11 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer 9. Januar 2007

九章算術卷第八

方程

〔一〕今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，實三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，實二十六斗。問上、中、下禾實一秉各幾何？

荅曰：
上禾一秉，九斗、四分斗之一，
中禾一秉，四斗、四分斗之一，
下禾一秉，二斗、四分斗之三。

方程術曰，置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗，於右方。中、左禾列如右方。以右行上禾遍乘中行而以直除。又乘其次，亦以直除。然以中行中禾不盡者遍乘左行而以直除。左方下禾不盡者，上爲法，下爲實。實即下禾之實。求中禾，以法乘中行下實，而除下禾之實。餘如中禾秉數而一，即中禾之實。求上禾亦以法乘右行下實，而除下禾、中禾之實。餘如上禾秉數而一，即上禾之實。實皆如法，各得一斗。

Die *Chiu Chang Suan Shu*, die neun Bücher der Mathematik (1. Jh. v. Chr.), sind die frühesten Aufzeichnungen, in denen Matrizen und Methoden zum Lösen von linearen Gleichungssystemen auftauchen. Die Methode heißt hier *fang cheng* (etwa: Matrix). In diesem Ausschnitt wird die Aufgabe gestellt: Wenn 3 Garben guter Ernte, 2 Garben mittlerer Ernte und 1 Garbe schlechter Ernte insgesamt 39 *dou* Korn ergeben, 2 Garben guter, 3 Garben mittlerer und 1 Garbe schlechter Ernte 34 *dou* ergeben, und 1 Garbe guter, 2 Garben mittlerer und 3 Garben schlechter Ernte 26 *dou* ergeben, wieviel *dou* ergibt dann jeweils eine Garbe der drei Sorten?

Übung 1 (Bosch, Aufg. 2.3.1). Prüfen Sie, ob die folgenden Linearformen $\phi_i\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ ein linear unabhängiges System in $(\mathbb{R}^5)^*$ bilden:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
\phi_1(\alpha_1,\dots,\alpha_5) & = & \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & + & \alpha_4 & + & \alpha_5 \\
\phi_2(\alpha_1,\dots,\alpha_5) & = & \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & 3\alpha_3 & + & 4\alpha_4 & + & 5\alpha_5 \\
\phi_3(\alpha_1,\dots,\alpha_5) & = & \alpha_1 & - & \alpha_2 & & & & & &
\end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
\phi_1(\alpha_1,\dots,\alpha_5) & = & \alpha_1 & + & 7\alpha_2 & + & 7\alpha_3 & + & 7\alpha_4 & + & \alpha_5 \\
\phi_2(\alpha_1,\dots,\alpha_5) & = & \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & 3\alpha_3 & + & 4\alpha_4 & + & 5\alpha_5 \\
\phi_3(\alpha_1,\dots,\alpha_5) & = & 12\alpha_1 & + & 7\alpha_2 & + & 13\alpha_3 & + & 8\alpha_4 & + & 9\alpha_5 \\
\phi_4(\alpha_1,\dots,\alpha_5) & = & 10\alpha_1 & - & 2\alpha_2 & + & 3\alpha_3 & - & 3\alpha_4 & + & 3\alpha_5
\end{array}$$

Übung 2. Auf $\mathbb{R}^n$ sei e_i die Standardbasis $(i = 1, \dots, n)$, also $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ mit 1 an der i-ten Stelle. Auf dem Dualraum $(\mathbb{R}^n)^*$ bezeichne ϵ_i $(i = 1, \dots, n)$ die duale Basis, also $\epsilon_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ für $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Geben Sie für folgende Basen von $\mathbb{R}^n$ (ausgedrückt in den e_i) die zugehörigen dualen Basen an, indem Sie die Elemente als Linearkombinationen der ϵ_i schreiben:

(a) $v_k = \sum_{i=1}^k e_i$ für $k = 1, \dots, n$;

(b) $v_1 = e_1$, $v_k = e_k - e_{k-1}$ für $2 \leq k \leq n$.

Übung 3 (Bosch, Aufg. 2.3.5). Sei V ein K-Vektorraum und V^* sein Dualraum. Für lineare Unterräume $U_1 \subseteq V$ und $U_2 \subseteq V^*$ setze man

$$U_1^\perp := \{\phi \in V^* \mid \phi(U_1) = 0\}$$
$$U_2^\perp := \{a \in V \mid \forall \phi \in U_2 \colon \phi(a) = 0\}$$

Zeigen Sie für lineare Unterräume $U, U' \subseteq V$ bzw. $U, U' \subseteq V^*$ unter der Annahme, dass V endlichdimensional ist:

(a) $(U + U')^\perp = U^\perp \cap (U')^\perp$;

(b) $(U^\perp)^\perp = U$;

(c) $(U \cap U')^\perp = U^\perp + (U')^\perp$;

(d) $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.

Achtung: jede der Aussagen (a)–(c) ist sowohl für V als auch für V^* zu zeigen!

Übung 4 (Bosch, Aufg. 3.1.1). Berechnen Sie die Produkte AB und BA für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Übung 5. Wählen Sie in den angegebenen K-Vektorräumen V eine möglichst einfache Basis X und bestimmen Sie zu den Endomorphismen $f \colon V \to V$ jeweils die zugehörige Matrix $A_{f,X,X}$.

(a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, f Drehung um 90° im mathematisch positiven Sinn (d.h. gegen den Uhrzeigersinn).

(b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, f Spiegelung an der Geraden $y = x$.

(c) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, f Multiplikation mit $\alpha + \beta\sqrt{2}$, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.