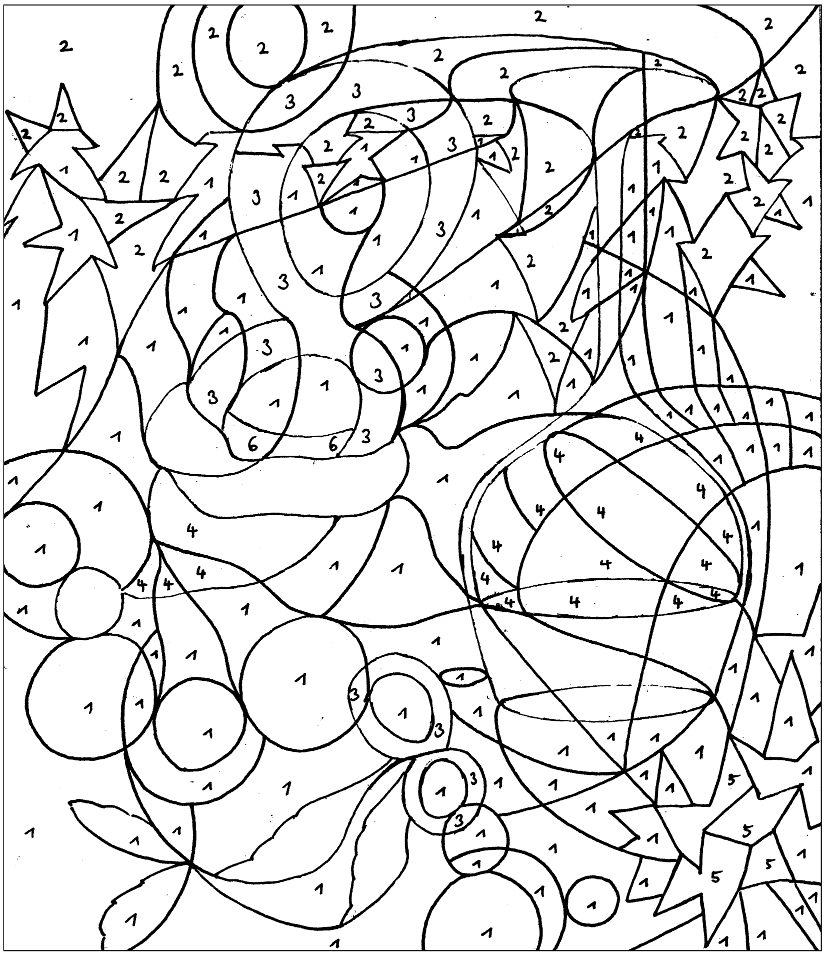
# Übungen zur Linearen Algebra I

## — Blatt 10 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer 19. Dezember 2006



1 — schwarz
2 — grün
3 — blau
4 — rot
5 — gelb
6 — grau

*Artwork by* $\ddot{\Omega}$

**Übung 1 (Bosch, Aufg. 2.2.6).** Betrachten Sie für Vektoren $a_0, \dots, a_r$ eines $K$-Vektorraums $V$ den von den $a_i$ erzeugten affinen Unterraum $A \subseteq V$ sowie den von den $a_i$ erzeugten linearen Unterraum $U \subseteq V$. Zeigen Sie: $A \subseteq U$ und

$$\dim_K A = \begin{cases} \dim_K U, & \text{falls } 0 \in A; \\ \dim_K U - 1, & \text{falls } 0 \notin A. \end{cases}$$

**Übung 2 (Bosch, Aufg. 2.2.8).** Seien $U$, $U'$ lineare Unterräume eines $K$-Vektorraums $V$. Zeigen Sie: Die kanonische Abbildung

$$U \hookrightarrow U + U' \twoheadrightarrow (U + U')/U'$$

induziert einen Isomorphismus

$$U/(U \cap U') \xrightarrow{\sim} (U + U')/U'.$$

Abgabe bis Di, 9. Januar, 08:10 in den Briefkästen. Frohe Weihnachten!

**Definition.** Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung von $K$-Vektorräumen. Der *Kokern* von $f$ ist der $K$-Vektorraum $\operatorname{coker} f := W/(\operatorname{im} f)$.

**Übung 3.** Seien $U \xrightarrow{f_1} V_1$ und $U \xrightarrow{f_2} V_2$ zwei lineare Abbildungen von $K$-Vektorräumen. Wir definieren einen neuen Vektorraum $V_1 \underset{U}{\oplus} V_2 := \operatorname{coker}(U \xrightarrow{u \mapsto (f_1(u), -f_2(u))} V_1 \oplus V_2)$.

Seien $\iota_i\colon V_i \to V_1 \underset{U}{\oplus} V_2$ die kanonischen Abbildungen $V_i \hookrightarrow V_1 \oplus V_2 \twoheadrightarrow V_1 \underset{U}{\oplus} V_2$ $(i = 1,\ 2)$. Zeigen Sie:

(a) Das Diagramm
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"] & V_1 \arrow[d, "\iota_1"] \\ V_2 \arrow[r, "\iota_2"] & V_1 \underset{U}{\oplus} V_2 \end{tikzcd}$$
kommutiert, d.h., $\iota_1 \circ f_1 = \iota_2 \circ f_2$.

(b) $V_1 \underset{U}{\oplus} V_2$ hat folgende *universelle Eigenschaft*: Ist $T$ ein beliebiger $K$-Vektorraum mit linearen Abbildungen $g_i\colon V_i \to T$ $(i = 1,\ 2)$, so dass $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$, so gibt es *genau eine* lineare Abbildung $g\colon V_1 \underset{U}{\oplus} V_2 \to T$, so dass $g_i = g \circ \iota_i$ $(i = 1,\ 2)$.

(c) Sind $V_1,\ V_2 \subseteq V$ Untervektorräume, so gibt es einen Isomorphismus
$$V_1 + V_2 \xrightarrow{\sim} V_1 \underset{V_1 \cap V_2}{\oplus} V_2.$$

Man nennt $V_1 \underset{U}{\oplus} V_2$ auch *Pushout* oder *amalgamierte Summe* von $V_1$ und $V_2$ über $U$.

**Übung 4 (Bosch, Aufg. 2.3.3).** Seien $V$, $W$ zwei $K$-Vektorräume. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_K(V, W) &\to \operatorname{Hom}_K(W^*, V^*) \\ f &\mapsto f^* \end{aligned}$$
eine injektive, $K$-lineare Abbildung ist (also ein Monomorphismus).

*Tipp:* Für die Injektivität kann es hilfreich sein, Basen oder Komplemente zu verwenden.

**Übung 5*.** Sei
$$0 \xrightarrow{f_n} V_n \xrightarrow{f_{n-1}} V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-2}} \dots \xrightarrow{f_0} V_0 \xrightarrow{f_{-1}} 0$$
eine Folge von $K$-Vektorräumen und linearen Abbildungen, so dass $f_{i-1} \circ f_i = 0$ für $i = 0, \dots, n$ gilt (so etwas nennt man einen *Kettenkomplex*). Definiere
$$H_i(V_*) := \ker(f_{i-1}) / \operatorname{im}(f_i) \quad (0 \leq i \leq n)$$
(Also ist der Kettenkomplex genau dann exakt, wenn $H_i(V_*) = 0$ für alle $i$ gilt.)

Zeigen Sie unter der Annahme, dass alle $V_i$ endlichdimensional sind:
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim V_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H_i(V_*).$$

Diese Zahl nennt man die *Euler-Charakteristik* von $V_*$, die Vektorräume $H_i(V_*)$ die *Homologie* von $V_*$.