Übungen zur Linearen Algebra I

— Blatt 1 —

Siegfried Bosch, Tilman Bauer 17. Oktober 2006

Übung 1. (a) Bestimmen Sie die Wahrheitstafel des Ausdrucks

$$((P \vee \neg Q) \wedge \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg P)$$

(b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus (a) noch einmal unter Verwendung der Termumformungsregeln auf dem Handout.

(c) Geben Sie einen möglichst einfachen Ausdruck in P, Q mit den Grundoperationen an, der folgende Wahrheitstafel hat:

?	$P = f$	$P = w$
$Q = f$	w	f
$Q = w$	f	w

Übung 2. Oft hängen mathematische Aussagen von einem oder mehreren Parametern $x \in X$ einer Menge ab – z.B. „x ist eine ganze Zahl" mit $x \in \mathbb{R}$ oder „$x < y$" mit $x, y \in \mathbb{R}$. Daher erweitert man die Aussagenlogik um solche Aussagen (auch Prädikate genannt) $P(x)$ und führt *Quantoren* ein:

$\forall x \in X\colon P(x)$ („Für alle x in X gilt P(x)."),
$\exists x \in X\colon P(x)$ („Es gibt (mindestens) ein x in X, so dass P(x) gilt.").

Es gelten die Regeln

$$(\neg\,(\forall x \in X\colon P(x))) = (\exists x \in X\colon \neg P(x))\,;$$
$$(\neg\,(\exists x \in X\colon P(x))) = (\forall x \in X\colon \neg P(x))\,.$$

(a) Interpretieren Sie folgende Aussage in natürlicher Sprache. Halten Sie sie für wahr? (Sie brauchen keinen Beweis zu führen.)

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\ \forall l \in \mathbb{N}\colon\ (\neg(m = kl) \vee k = 1 \vee l = 1) \wedge m > n.$$

(b) Zeigen Sie an einem konkreten Beispiel, dass die Reihenfolge der Quantoren wichtig ist:

$$\big(\forall x \in X\ \exists y \in Y\colon P(x,y)\big) \neq \big(\exists y \in Y\ \forall x \in X\colon P(x,y)\big).$$

Übung 3. (a) Drücken Sie die Aussage „Es gibt *genau* ein $x \in X$, so dass $P(x)$ gilt" mit Hilfe der bisher eingeführten Quantoren aus. Man schreibt dafür oft:

$$\exists! x \in X\colon P(x).$$

Abgabe bis Di, 24. Oktober, 08:15 in den Briefkästen

(b) Versuchen Sie das gleiche für „Es gibt *höchstens drei verschiedene* $x \in X$, so dass $P(x)$ gilt".

(c) Diskutieren Sie (kurz) die Frage, ob es möglich ist, die Aussage „Es gibt unendlich viele $x \in X$, so dass $P(x)$ gilt" in der bisherigen Prädikatenlogik auszudrücken. Beweisen Sie nichts.

Übung 4. Übersetzen Sie die folgenden umgangssprachlichen Aussagen in Formeln und vereinfachen Sie, so wie im folgenden Beispiel:

$$\begin{aligned}
&\text{„Nicht alle Professoren sind jeden Tag in der Uni."}\\
\mapsto &\neg\big(\forall p \in \text{Professoren } \forall t \in \text{Tage}\colon p \text{ ist am Tag } t \text{ in der Uni}\big)\\
\mapsto &\exists p \in \text{Professoren } \exists t \in \text{Tage}\colon p \text{ ist am Tag } t \text{ nicht in der Uni}\\
\mapsto &\text{„Es gibt Professoren, die an manchen Tagen nicht in der Uni sind."}
\end{aligned}$$

(a) „Nicht alles ist Gold, was glänzt."

(b) „Nicht alle Menschen sind so klug wie in Bayern." (E. Stoiber)

(c) „Es gibt keine Länder ohne Städte, in denen nicht jeder Haushalt mit Strom und Wasser versorgt ist."

Übung 5*. Unter einer *Berechnungsvorschrift* für logische Funktionen verstehen wir eine Folge von Zuweisungen $Q := f(P_1, \dots, P_n)$, wobei f ein logischer Ausdruck in den Unbestimmten $P_1, \dots, P_n$ ist. Statt ihn formal zu definieren, wird der Begriff an einem Beispiel sofort klar: eine Berechnungsvorschrift für $T = P \wedge Q \wedge R$ ist zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
S &:= P \wedge Q\\
T &:= S \wedge R
\end{aligned}$$

Eine Berechnungsvorschrift darf auch mehrere Ergebniswerte liefern, wie zum Beispiel für die Funktion, die (P, Q, R) die Werte (P', Q', R') zuordnet:

$$\begin{aligned}
P' &:= \neg P\\
Q' &:= \neg Q\\
R' &:= \neg R
\end{aligned}$$

Ist es möglich, eine Berechnungsvorschrift für diese Funktion anzugeben, die nur mit Grundoperationen auskommt und nur zwei Negationsoperatoren enthält?