Avsnitt 3

Determinanter

Historien bakom determinantbegreppet är lite brokig. Den första gången determinantliknande resultat upptäcktes var av den tyske filosofen och matematikern Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) när han kom fram till ett determinantvillkor för när ett 3×2-system har en nollskild lösning. Han skrev också upp lösningsformler som i all väsentlighet påminner om vad vi numera kallar Cramers regel.

Gottfried Wilhelm Leibniz

Lösningsformlerna återupptäcktes på 1730-talet av den engelske matematikern Colin Maclaurin för system upp till storlek 4×4. Den schweiziske matematikern Gabriel Cramer generaliserade regeln år 1750 till att gälla godtyckligt stora kvadratiska system och gav en allmän metod för att beräkna determinanter via utveckling.

Den som först började studera determinanter som ett mer självständigt ämne var den franske matematikern Alexandre-Théophile Vandermonde och han kan sägas vara den som grundade den moderna determinantteorin.

Teorin utvecklades vidare och fick den första systematiska framställningen i ett viktigt arbete av landsmannen Augustin Cauchy år 1812, men det var först på 1840-talet som determinanter blev mer kända inom matematiken genom flera arbeten av den tyske matematikern Carl Jacobi.

Vad är en determinant?

Vad krävs för att ett kvadratiskt linjärt ekvationssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ska ha exakt en lösning?

Med andra ord, vad krävs allmänt för att en kvadratisk matris ska ha en invers?

Egentligen vet vi redan svaret: Det krävs att matrisen kan radreduceras till enhetsmatrisen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Men det svaret ger oss inget direkt villkor för när en allmän matris har en invers. Vi ska istället försöka att härleda ett mer direkt svar.

2×2-fallet

Vi börjar med 2×2-fallet. Ett allmänt 2×2-system kan skrivas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Låt oss för enkelhets skull anta att $a_{11} \neq 0$. För att lösa systemet multiplicerar vi andra raden med a_{11} och adderar en multipel av första raden till andra raden,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \qquad -a_{21} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & a_{11} \end{cases}$$

Den andra raden blir då

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

Här ser vi att systemet har exakt en lösning om

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Vänsterledets uttryck kallas för koefficientmatrisens determinant och betecknas

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Om $a_{11} = 0$ ser vi också att systemet har exakt en lösning om determinanten $\neq 0$.

3×3-fallet

För 3×3-system blir det lite mer omständigt, men om man utför manipulationerna rätt fås i slutänden att ett 3×3-system

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

har exakt en lösning om

$$\begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\qquad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \neq 0. \end{aligned}$$

Detta uttryck kallas för koefficientmatrisens determinant och betecknas

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

På ett liknande sätt kan vi gå vidare och definiera determinanter för större kvadratiska matriser.

Den viktiga egenskapen hos determinanter är alltså att

$$\det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ inverterbar.}$$

Vi ska nu lära oss några olika tekniker för att beräkna determinanter.

Snabbformler för små determinanter

Det finns enkla minnesregler för hur man beräknar små determinanter.

2×2-determinanter

Om determinanten är

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

så ritar vi ut höger- och vänsterdiagonalerna

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

Determinantens värde är nu högerdiagonalprodukten minus vänsterdiagonalprodukten

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ - \quad + \end{matrix} = ad - bc.$$

Övning 1

Beräkna $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$

3×3-determinanter (Sarrus regel)

Vi placerar kopior av de två första kolumnerna till höger om determinanten

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{array}$$

och ritar ut höger- och vänsterdiagonaler,

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 3 & 6 \end{array}$$

Determinantens värde får vi genom att lägga ihop högerdiagonalprodukterna och dra ifrån vänsterdiagonalprodukterna.

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right| = \begin{array}{ccccccc} & 1 & 4 & 7 & 1 & 4 & \\ & 2 & 5 & 8 & 2 & 5 & \\ & 3 & 6 & 9 & 3 & 6 & \\ - & - & - & & + & + & + \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= 1\cdot 5\cdot 9 + 4\cdot 8\cdot 3 + 7\cdot 2\cdot 6 \\ &\quad - 3\cdot 5\cdot 7 - 6\cdot 8\cdot 1 - 9\cdot 2\cdot 4 = 0. \end{aligned}$$

Observera att denna regel gäller endast för 3×3-determinanter.

Övning 2

$$\text{Beräkna} \quad \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right| =$$

Kofaktorutveckling

När vi kofaktorutvecklar en determinant uttrycker vi dess värde i determinanter av mindre storlek (s.k. minorer) och reducerar därmed problemet ett steg.

Minorer

En minor M_{ij} av en determinant är den deldeterminant vi får när rad i och kolumn j stryks i den stora determinanten.

$$M_{23} = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 5 & \cancel{9} & 8 \\ \cancel{2} & \cancel{6} & \cancel{10} & \cancel{9} \\ 3 & 7 & \cancel{11} & 0 \\ 4 & 8 & \cancel{12} & 2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 5 & 8 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{array}\right|.$$

Övning 3

$$\text{Bestäm minoren } M_{32} \text{ till} \quad \left|\begin{array}{cccc} 7 & 8 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 4 & 0 \\ 8 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right|.$$

Utveckling längs en rad

Vi kan beräkna en determinant genom att utveckla den längs en rad. Vi illustrerar med ett exempel,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}.$$

I determinanten kan vi nu välja en rad (vilken som helst), t.ex. rad 3, som vi utvecklar längs

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}.$$

Varje element på denna rad kommer ge upphov till en term i kofaktorutvecklingen.

Termen som svarar mot det första elementet 2 får vi genom att multiplicera 2:an med minoren som återstår när raden och kolumnen som 2:an ingår i stryks.

$$\begin{vmatrix} \cancel{3} & 4 & 0 & 5 \\ \cancel{6} & 2 & 0 & 1 \\ \cancel{2} & \cancel{9} & \cancel{4} & \cancel{3} \\ \cancel{0} & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = +\,2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \cdots$$

Termen har också ett tecken framför sig som ges av motsvarande element i följande teckentabell

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}.$$

Denna tabell byggs upp med ett +:tecken i övre vänstra hörnet och sedan förekommer tecknen växelvis.

Nästa term i utvecklingen blir 9 multiplicerat med motsvarande minor

$$\begin{vmatrix} 3 & \cancel{4} & 0 & 5 \\ 6 & \cancel{2} & 0 & 1 \\ \cancel{2} & \cancel{9} & \cancel{4} & \cancel{3} \\ 0 & \cancel{3} & 7 & 2 \end{vmatrix} = +2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$-\,9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \cdots$$

Här har vi nu ett minustecken framför termen eftersom motsvarande position i teckentabellen har ett minustecken.

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Sedan får vi en term med 4 gånger motsvarande minor

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = +2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$-\,9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} + \cdots$$

Denna gång med ett plustecken framför. Som synes växlar tecknet mellan + och −. Den sista termen har därför ett minustecken

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = +2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$-\,9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$-\,3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}.$$

Detta är kofaktorutvecklingen av determinanten längs den tredje raden. De mindre determinanterna beräknas sedan med valfri metod (t.ex. med Sarrus regel eller kofaktorutveckling).

Utveckling längs en kolumn

Kofaktorutveckling längs en kolumn går till på samma sätt som längs en rad.

Säg att vi vill beräkna samma determinant som tidigare längs den andra kolumnen

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}.$$

Precis som förut kommer varje element i kolumnen ge en term i utvecklingen.

Elementet 4 ger termen: 4 gånger motsvarande minor

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -\,4 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \cdots$$

Tecknet framför termen är − eftersom teckentabellen har ett minus där 4:an står

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}.$$

Vi fortsätter sedan med de andra tre elementen som ger tre minortermer med alternerande tecken,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+\ 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+\ 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ovanstående formel är kofaktorutvecklingen av determinanten längs den andra kolumnen.

Övning 4

a) Utveckla determinanten längs den andra raden.

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

b) Utveckla determinanten längs den tredje kolumnen.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & -8 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

Rad- och kolumnoperationer

Den andra tekniken som vi ska använda för att beräkna determinanter är rad- och kolumnoperationer. Tillvägagångssättet liknar det vi använder vid gausseliminering. Via rad- och kolumnoperationer förenklar vi determinanten tills den blivit så enkel att vi direkt kan beräkna dess värde.

Radoperationer

Om vi utför en radoperation på en determinant så förändras dess värde enligt följande regler:

- $|A| = |A|$
- $|A\,\textcircled{a}| = a\,|A|$
- $|A| = -|A|$

Övning 5

Rätt eller fel?

$$a)\quad 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 6 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 0 & 2\cdot 5 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 3 & 2\cdot 1 \end{vmatrix}$$

$$b)\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$c)\quad - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & 4 \\ -3 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

För praktisk räkning kan det vara enklare att vända på reglerna och skriva

- $|A| = |A|$
- $|A| = \frac{1}{a}|A\,\textcircled{a}|$, där $a \neq 0$
- $|A| = -|A|$

Strategin när vi beräknar en determinant är att vi med radoperationer omvandlar determinanten till en speciellt enkel determinant, t.ex. en triangulär determinant. Värdet av en triangulär determinant är nämligen lika med produkten av diagonalelementen.

Sats
$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & t_{nn} \end{vmatrix} = t_{11}t_{22}\cdots t_{nn}$$

Beviset är att kofaktorutveckla determinanten hela tiden längs den första kolumnen,

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & t_{nn} \end{vmatrix} = t_{11}\begin{vmatrix} t_{22} & \dots & t_{2n} \\ & \ddots & \\ & & t_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \cdots + 0$$

$$= t_{11}t_{22}\begin{vmatrix} t_{33} & \dots & t_{3n} \\ & \ddots & \\ & & t_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = t_{11}t_{22}\cdots t_{nn}.$$

Exempel

Vi illustrerar metoden med ett exempel,

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 6 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix}.$$

Först byter vi plats på rad 1 och 3 för att få bort nollan i övre vänstra hörnet. Detta steg gör att determinanten byter tecken,

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 6 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -6 & -1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Sedan vill vi ha nollor under 1:an i första kolumnen, och det får vi genom att addera två gånger första raden till den andra raden. Denna radoperation ändrar inte determinantens värde.

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -6 & -1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} {\scriptstyle 2} = -\begin{vmatrix} 1 & -6 & -1 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Vi byter plats på rad 2 och 3.

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -6 & -1 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 1 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix}$$

(Notera teckenbytet.)

Till sist adderar vi tre gånger andra raden till tredje raden för att få en triangulär determinant som vi direkt kan beräkna.

$$= \begin{vmatrix} 1 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 3 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 5 = 10.$$

Kolumnoperationer

På determinanter kan vi också utföra kolumnoperationer, och då förändras determinantens värde enligt reglerna

- $|A| = |A|$
- $|A| = \frac{1}{a}|\underset{@}{A}|, \qquad$ där $a \neq 0$
- $|A| = -|A|$

Övning 6

Utför kolumnoperationerna.

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix}$

b) $\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 1 & 10 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 2 & & \end{matrix} \end{array}$

c) $\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 2 & -3 & \end{matrix} \end{array}$

Exempel

Vi ska beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Det första vi kan notera är att den andra och fjärde kolumnen är nästan lika, så om vi subtraherar den ena kolumnen från den andra så får vi en kolumn med många nollor i vilket öppnar för en kofaktorutveckling,

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} & - & & \end{matrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Kofaktorutveckla den fjärde kolumnen

$$= (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Kofaktorutveckla den andra raden

$$= (-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 2 - 7 \cdot 4) = 24.$$

Det är vanligt att man blandar olika tekniker på detta sätt.

Exempel

Vad är villkoret på talet a för att ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + \ \ y + z + av = 1 \\ \ \ x + ay + z + 2v = 2 \\ ax + \ \ y + z + 2v = 3 \\ \ \ x + \ \ y + z + av = 4 \end{cases}$$

skall ha precis en lösning?

Skriver vi systemet i matrisform

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

så vet vi att ekvationen har precis en lösning när koefficientmatrisen har en invers och det är när dess determinant inte är noll. Vi beräknar alltså determinanten. Vi börjar med att utföra några radoperationer.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} - & \text{-}a & \text{-}3 \end{matrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 2-a^2 \\ 0 & -2 & -2 & -2a \end{vmatrix}$$

När vi nu fått en kolumn med många nollor i kofaktorutvecklar vi längs den

$$= -\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 2-a \\ 1-a & 1-a & 2-a^2 \\ -2 & -2 & -2a \end{vmatrix}.$$

Sedan ser vi att första och andra kolumnen nästan är lika.

$$= -\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 2-a \\ 1-a & 1-a & 2-a^2 \\ -2 & -2 & -2a \end{vmatrix}$$

$$\ominus$$

$$= -\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 2-a \\ 0 & 1-a & 2-a^2 \\ 0 & -2 & -2a \end{vmatrix}$$

Kofaktorutveckla den första kolumnen

$$\begin{aligned} &= -(a-1)\begin{vmatrix} 1-a & 2-a^2 \\ -2 & -2a \end{vmatrix} \\ &= -(a-1)\big((1-a)(-2a) - (2-a^2)(-2)\big) \\ &= -(a-1)(4-2a). \end{aligned}$$

Determinanten är skild från noll när $a \neq 1$ och $a \neq 2$.

Determinantregler

Om A och B är $n \times n$-matriser och a är en skalär då gäller att

- $\det(aA) = a^n \det A$
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- $\det(A^T) = \det A$
- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

Dessa determinantregler kan t.ex. användas för att förenkla determinantuttryck innan de beräknas.

Cramers regel

Cramers regel säger att om matrisen A är inverterbar så har det linjära ekvationssystemet $Ax = b$ lösningen

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \qquad \text{för alla obekanta } x_i,$$

där A_i är matrisen A men med kolumn i ersatt med högerledet b.

Exempel

Bestäm x ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ 4x + y + 2z = 9 \end{cases}$$

Eftersom vi bara vill bestämma en variabel i systemet kan Cramers regel vara lämplig. Nu vet vi visserligen inte om koefficientmatrisen är inverterbar men det märker vi när vi beräknar determinanten i nämnaren.

Enligt Cramers regel är

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}.$$

I täljardeterminanten har vi ersatt kolumnen som svarar mot x med högerledet. Sarrus regel ger

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 9 + 1 \cdot 7 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 9 - 5 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 7 \cdot 2 = -1,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 2 = -1.$$

Alltså är $x = -1/-1 = 1$.

Bevis av Cramers regel (3×3-fallet)

Ett allmänt 3×3-system kan skrivas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

eller mer kompakt som en matrisekvation $Ax = b$.

Om vi börjar med att betrakta uttrycket

$$x_2 \det A = x_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

så kan vi multiplicera in x_2 i den andra kolumnen (kolumnen som just svarar mot x_2)

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}x_2 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}x_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}x_2 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Addera nu lämpliga multiplar av kolumn 1 och 3 till kolumn 2,

$$= \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}x_2 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}x_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}x_2 & a_{33} \end{vmatrix} \\ x_1 \longrightarrow \quad \longleftarrow x_3 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & a_{13} \\ a_{21} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & a_{23} \\ a_{31} & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Enligt ekvationssystemet är den andra kolumnen lika med högerledet

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \det A_2.$$

Vi har alltså visat att

$$x_2 \det A = \det A_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}.$$

På motsvarande sätt får vi fram formlerna för x_1 och x_3.

Adjunktformeln

Säg att vi har en 3×3-matris

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

och vill bestämma inversen till A,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Ett sätt att göra detta på är att ställa upp $AA^{-1} = E$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

och försöka bestämma x_{ij}:na ur sambandet.

Om vi tittar på den första kolumnen i enhetsmatrisen i högerledet så ser vi att den bestäms genom att multiplicera raderna i A-matrisen med första kolumnen i A^{-1}-matrisen,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Om vi bara vore intresserade av denna första kolumn så skulle vi kunna skriva sambandet mellan leden som

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Från detta samband kan vi lösa ut x_{11}, x_{21} och x_{31} med Cramers regel

$$x_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{M_{11}}{\det A},$$

$$x_{21} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-M_{12}}{\det A},$$

$$x_{31} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{M_{13}}{\det A}.$$

Tittar vi sedan på de andra kolumnerna i enhetsmatrisen så kan vi på samma sätt bestämma de två andra kolumnerna i matrisen A^{-1}. I slutänden fås formeln

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{pmatrix}^T.$$

Detta kallas för adjunktformeln.

Exempel

Bestäm inversen till $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Enligt adjunktformeln ges inversen av

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{pmatrix}^T.$$

Vi beräknar determinanten och minorerna

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = -1,$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5,$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4,$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 5,$$

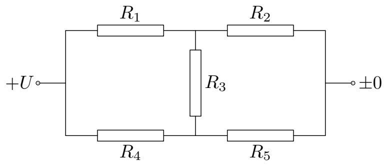
$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 5,$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3.$$

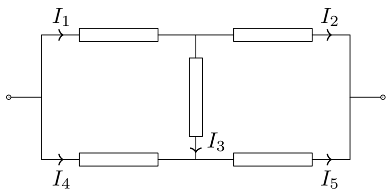
Inversen är $A^{-1} = \dfrac{1}{-1} \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 5 & -4 & 2 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

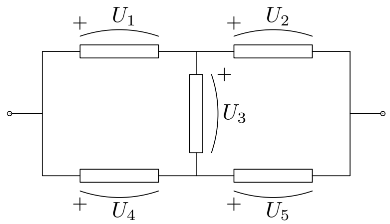
Ett elkretsproblem

Bestäm hur mycket ström som går genom resistorn R_3 i kretsen till höger.

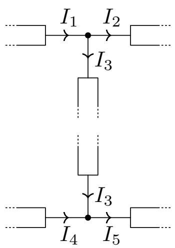


Inför strömmar och spänningar.





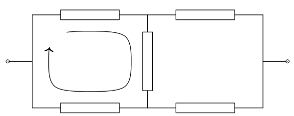
Kirchhoffs strömlag ger



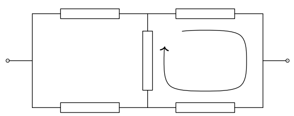
$$I_1 = I_2 + I_3 \tag{1}$$

$$I_3 + I_4 = I_5 \tag{2}$$

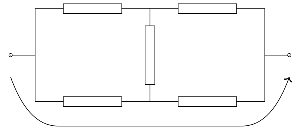
Kirchhoffs spänningslag



$$-U_1 - U_3 + U_4 = 0 \tag{3}$$



$$-U_2 + U_5 + U_3 = 0 \tag{4}$$



$$-U_4 - U_5 = -U \tag{5}$$

Ohms lag ger

$$U_1 = R_1 I_1, \quad U_2 = R_2 I_2, \quad U_3 = R_3 I_3,$$
$$U_4 = R_4 I_4, \quad U_5 = R_5 I_5.$$

Stoppar vi in dessa samband i (3) till (5) så får vi ekvationer som bara innehåller strömmar

$$-R_1 I_1 - R_3 I_3 + R_4 I_4 = 0 \tag{3'}$$
$$-R_2 I_2 + R_5 I_5 + R_3 I_3 = 0 \tag{4'}$$
$$-R_4 I_4 - R_5 I_5 \qquad = -U \tag{5'}$$

Stoppar vi sedan in I_1 och I_5 enligt (1) och (2) in i ($3'$) till ($5'$) så får vi ekvationer som bara innehåller I_2, I_3 och I_4,

$$\begin{cases} -R_1 I_2 - (R_1 + R_3) I_3 + R_4 I_4 = 0 \\ -R_2 I_2 + (R_1 + R_5) I_3 + R_5 I_4 = 0 \\ \qquad\qquad -R_5 I_3 - (R_4 + R_5) I_4 = -U \end{cases}$$

eller i matrisform

$$\begin{pmatrix} -R_1 & -(R_1 + R_3) & R_4 \\ -R_2 & R_3 + R_5 & R_5 \\ 0 & -R_5 & -(R_4 + R_5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -U \end{pmatrix}.$$

Eftersom vi bara söker I_3 och koefficientmatrisen innehåller många symboluttryck är det enklast att använda Cramers regel

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} -R_1 & 0 & R_4 \\ -R_2 & 0 & R_5 \\ 0 & -U & -(R_4+R_5) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -R_1 & -(R_1+R_3) & R_4 \\ -R_2 & R_3+R_5 & R_5 \\ 0 & -R_5 & -(R_4+R_5) \end{vmatrix}}.$$

Täljardeterminanten räknar vi ut med en kofaktorutveckling längs den andra kolumnen,

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} -R_1 & 0 & R_4 \\ -R_2 & 0 & R_5 \\ 0 & -U & -(R_4+R_5) \end{vmatrix} = -(-U)\begin{vmatrix} -R_1 & R_4 \\ -R_2 & R_5 \end{vmatrix} \\ &\quad = U(R_2R_4 - R_1R_5), \end{aligned}$$

och nämnardeterminanten räknar vi ut med Sarrus regel

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} -R_1 & -(R_1+R_3) & R_4 \\ -R_2 & R_3+R_5 & R_5 \\ 0 & -R_5 & -(R_4+R_5) \end{vmatrix} \\ &\quad = R_1(R_3+R_5)(R_4+R_5) + 0 + R_4R_2R_5 \\ &\qquad - 0 - R_1R_5R_5 + R_2(R_1+R_3)(R_4+R_5) \\ &\quad = R_1R_2R_4 + R_1R_2R_5 + R_1R_3R_4 + R_1R_3R_5 \\ &\qquad + R_1R_4R_5 + R_2R_3R_4 + R_2R_3R_5 + R_2R_4R_5. \end{aligned}$$

Svaret är alltså

$$I_3 = \frac{R_2R_4 - R_1R_5}{\left(\begin{aligned} &R_1R_2R_4 + R_1R_2R_5 + R_1R_3R_4 + R_1R_3R_5 \\ &\quad + R_1R_4R_5 + R_2R_3R_4 + R_2R_3R_5 + R_2R_4R_5 \end{aligned}\right)} U.$$

Avsnitt 3. Determinanter

L6.1 Använd determinanter för att avgöra om följande matriser är inverterbara.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

En matris A är inverterbar om och endast om $\det A \neq 0$. Vi beräknar därför determinanten av respektive matriserna och kontrollerar om den är noll.

a) Med minnesregeln

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{array}{cccc} & a & b & \\ & c & d & \\ - & & & + \end{array} = ad - bc$$

får vi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0.$$

Alltså är matrisen inverterbar.

b) Vi beräknar 3×3-determinanten med Sarrus regel. Tag de två första kolumnerna i determinanten och placera kopior av dessa till höger om determinanten,

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}\right.$$

Determinantens värde får vi genom att lägga ihop högerdiagonalprodukterna och dra ifrån vänsterdiagonalprodukterna

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \\ - \ - \ - & & & & + \ + \ + \end{array} \quad \begin{aligned} &= 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 \\ &\qquad - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 9 \\ &= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0. \end{aligned}$$

Matrisen är inte inverterbar.

c) Sarrus regel ger

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{array}{ccccc} 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ - \ - \ - & & & & + \ + \ + \end{array} \\ &= 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \cdot 2 \\ &\qquad - (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= -4 - 4 - 4 + 1 - 8 - 8 = -27 \neq 0. \end{aligned}$$

Detta visar att matrisen är inverterbar.

d) Vi får att determinanten är

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} &= \cos\varphi \cdot \cos\varphi - (-\sin\varphi) \cdot \sin\varphi \\ &= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Matrisen är därför inverterbar (för alla värden på φ).

L6.2 Hur många lösningar har ekvationssystemen?

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

b) Ett sätt att avgöra hur många lösningar systemet har är att gausseliminera till ett slutschema och där avläsa svaret. I detta fall kan vi dock få ett snabbare svar genom att beräkna koefficientmatrisens determinant.

- Om det $\neq 0$ så vet vi att systemet måste ha exakt en lösning.
- Om det $= 0$ har slutschemat en nollrad vilket vanligtvis betyder att vi antingen har en parameterlösning eller att systemet saknar lösning.

Men i detta fall har vi ett homogent system (högerledet består bara av nollor) och då kommer alla nollrader vara av typen $0 = 0$. Vi kommer alltså ha en parameterlösning.

Om vi summerar så har vi alltså

- determinant $\neq 0$ $\Rightarrow$ exakt en lösning,
- determinant $= 0$ $\Rightarrow$ parameterlösning.

Vi bestämmer nu determinantens värde

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ - & - & - & + & + & + \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 4 \\ &\quad - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 5 = 0. \end{aligned}$$

Systemet har därför en parameterlösning.

c) Vi kan använda samma resonemang som i b-uppgiften, men denna gång kan vi inte utesluta att systemet saknar lösning om determinanten är noll eftersom vi inte har ett homogent system. Vi har därför att

- determinant $\neq 0$ $\Rightarrow$ exakt en lösning,
- determinant $= 0$ $\Rightarrow$ parameterlösning eller saknar lösning.

Skulle det visa sig att determinanten är noll får vi gå den långa vägen och gausseliminera.

Koefficientmatrisens determinant är

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \{\text{ Se uppgift L6.1c }\} = -27 \neq 0.$$

Svaret är att systemet har exakt en lösning.

L6.4a För vilka värden på konstanten a är matrisen

$$\begin{pmatrix} 11-a & 2 \\ 5 & 2-a \end{pmatrix}$$

inverterbar?

Vi kan bestämma exakt när matrisen är inverterbar genom att beräkna dess determinant. Bara när determinanten är skild från noll är matrisen inverterbar. Vi har

$$\begin{vmatrix} 11-a & 2 \\ 5 & 2-a \end{vmatrix} = (11-a)(2-a) - 2 \cdot 5 = a^2 - 13a + 12$$

och vi ser att när a inte är en rot till polynomet $a^2 - 13a + 12$ så är matrisen inverterbar, d.v.s. när $a \neq 1$ och $a \neq 12$ är matrisen inverterbar.

L6.10a Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

Vi ska lösa uppgiften med två metoder.

Metod 1 (Kofaktorutveckling)

Vi kan välja att kofaktorutveckla längs en rad eller en kolumn i determinanten. Förslagsvis väljer vi en rad/kolumn med många nollor i sig så att så många termer som möjligt blir noll i utvecklingen. I vår determinant spelar det ingen roll vad vi väljer så vi väljer rad 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Varje element i raden ger upphov till en term i utvecklingen

$$+\boxed{4}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -2 \end{vmatrix} - \boxed{0}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$
$$+\boxed{3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \end{vmatrix} - \boxed{0}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Varje term är elementet gånger motsvarande minor och tecknen framför termerna ges av motsvarande rad i teckentabellen

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}.$$

Minorerna i utvecklingen kan vi räkna ut på valfritt sätt, t.ex. med kofaktorutveckling.

- I determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

  väljer vi att utveckla längs den andra kolumnen (eftersom vi bara har ett nollskilt element där)

$$= -2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= -2\cdot\bigl(3\cdot(-2)-(-1)\cdot 7\bigr) + 0 - 0 = -2$$

- Vi utvecklar determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \end{vmatrix}$$

  längs den första raden

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} - 0\cdot(\cdots) + 0\cdot(\cdots)$$
$$= 1\cdot\bigl(3\cdot(-2)-(-1)\cdot 7\bigr) - 0 + 0 = 1.$$

Om vi sammanställer uträkningen har vi

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -2 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$
$$+3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 4\cdot\left(-2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} + 0 - 0\right) - 0$$
$$+3\cdot\left(1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} - 0 + 0\right) - 0$$
$$= 4\cdot(-2) - 0 + 3\cdot 1 - 0 = -5.$$

Metod 2 (Radoperationer)

Med hjälp av radoperationer kan vi reducera en determinant till en triangulär determinant vars värde är produkten av diagonalelementen. Vid varje radoperation ändras determinantens värde enligt reglerna

- $|A\,| = |A|$
- $|A\,| = \frac{1}{a}|A\,\textcircled{a}|$, där $a \neq 0$,
- $|A\,| = -|A|$

När vi radreducerar använder vi samma strategi som vid gausseliminering. Vi börjar med $(1,1)$-elementet och ser till att få nollor under,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -2 \end{vmatrix} \textcircled{\scriptsize -4} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Notera att radoperationen inte ändrade determinantens värde. Vi går vidare till $(2,2)$-elementet och utför en radoperation så att vi får nollor därunder,

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}.$$

Nu har vi fått en triangulär determinant och dess värde är produkten av diagonalelementen

$$= 1 \cdot 3 \cdot (-5) \cdot \tfrac{1}{3} = -5.$$

L6.10b Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

Den första frågan vi ställer är: ska vi kofaktorutveckla eller använda radoperationer? I detta fall är nog radoperationer att föredra eftersom kofaktorutveckling brukar man normalt använda när determinanten innehåller någon rad eller kolumn med många nollor. Vi får

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\tfrac{5}{4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\tfrac{5}{4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -\tfrac{5}{4} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 35.$$

Lägg märke till att strategin vid radreduceringen inte är identisk med vanlig gausseliminering. Vi struntar i att radreducera uppåt eftersom det räcker med att vi når en triangulär determinant på slutet.

L6.10c Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 16 & 15 & 14 & 13 & 12 \\ 11 & 10 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 7 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Här ser vi att den tredje kolumnen har många nollor i sig, så vi börjar med att utveckla längs den. Eftersom det bara finns ett nollskilt element i kolumnen har utvecklingen bara en term,

$$+\,14 \cdot \begin{vmatrix} 11 & 10 & 9 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

I den nya determinanten har den fjärde kolumnen endast ett nollskilt element så vi utvecklar längs den

$$= +14 \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 11 & 10 & 9 \\ 0 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Att vi får ett minustecken framför 3:an kan vi se genom att starta vid $(1,1)$-elementet med ett $+$:tecken och sedan gå stegvis mot 3:ans position och vid varje steg byta tecken

$$\begin{pmatrix} + \xrightarrow{} - \xrightarrow{} + \xrightarrow{} & - \\ & \downarrow \\ & + \\ & \downarrow \\ & - \\ & \end{pmatrix}.$$

Den determinant vi nu har fått är en 3×3-determinant och den skulle vi kunna räkna ut med Sarrus regel men samtidigt ser vi att den första kolumnen bara har ett nollskilt element, så vi utvecklar längs kolumnen istället,

$$\begin{aligned} &= +14 \cdot (-3) \cdot 11 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= +14 \cdot (-3) \cdot 11 \cdot (8 \cdot 1 - 7 \cdot 2) = 2772. \end{aligned}$$

L6.11a Är matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ inverterbar?

Vi vet att matrisen är inverterbar om och endast om determinanten $\neq 0$.

När vi ska beräkna determinanten ser det ut att vara ett gränsfall mellan om vi ska kofaktorutveckla eller radreducera. Vi kan börja med en radoperation,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Här kan det vara lämpligt att utveckla längs den andra raden,

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Vi har nu en triangulär determinant och får värdet som produkten av diagonalelementen,

$$= -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -1 \neq 0.$$

Matrisen är alltså inverterbar.

L6.12 Hur många lösningar har ekvationssystemet?

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

Först och främst har systemet exakt en lösning om koefficientmatrisens determinant är skild från noll. Eftersom systemet är homogent så kommer det i fallet att determinanten är noll att ha en parameterlösning. Vi har alltså

- determinant $\neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ exakt en lösning
- determinant $= 0 \quad \Rightarrow \quad$ oändligt många lösningar

Determinanten är

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & -3 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

Det verkar inte finnas någon öppning för en kofaktorutveckling så vi radreducerar istället,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & -3 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 \quad -4 \quad -6 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & -3 \\ 0 & 17 & -7 & -6 \\ 0 & 15 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

Här kan det vara lämpligt att utföra en kolumnoperation för att flytta nollorna från tredje kolumnen till den andra kolumnen.

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & -3 \\ 0 & 17 & -7 & -6 \\ 0 & 15 & 0 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & -7 & 17 & -6 \\ 0 & 0 & 15 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= + \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & 17 & -6 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 15 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\frac{15}{9} \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & 17 & -6 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Alltså har systemet oändligt många lösningar.

L6.15 Matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 9 & 9 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 9 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

är inverterbara. Beräkna $\det\bigl(C^2AB(B^2AC^2)^{-1}\bigr)$.

Istället för att först beräkna den komplicerade matrisprodukten och sedan ta determinanten av allt ska vi använda determinantreglerna

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

samt matrisräknereglerna och förenkla uttrycket innan vi sätter igång att räkna.

Först delar vi upp uttrycket i faktorer

$$\det\bigl(C^2AB(B^2AC^2)^{-1}\bigr) = \det C^2 \cdot \det A \cdot \det B \cdot \det(B^2AC^2)^{-1}.$$

Den sista faktorn kan förenklas med regeln för inverser,

$$= \det C^2 \cdot \det A \cdot \det B \cdot \frac{1}{\det(B^2AC^2)}$$

och vi utvecklar nämnaren i determinantfaktorer

$$= \det C^2 \cdot \det A \cdot \det B \cdot \frac{1}{\det B^2 \cdot \det A \cdot \det C^2} = \frac{\det B}{\det B^2}$$
$$= \frac{\det B}{\det B \cdot \det B} = \frac{1}{\det B}.$$

Determinanten av B är enkel att beräkna eftersom B är en triangulär matris,

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Vi har därmed att $\quad \det\bigl(C^2AB(B^2AC^2)^{-1}\bigr) = \dfrac{1}{\det B} = \dfrac{1}{6}.$

L6.17a Skriv upp inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ med adjunktformeln.

Adjunktformeln säger att

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & +M_{22} \end{pmatrix}^T,$$

där M_{11}, M_{12}, M_{21} och M_{22} är matrisens minorer.

Minoren M_{ij} till matrisen får vi genom att stryka rad i och kolumn j i matrisen och ta determinanten av delmatrisen. I vårt fall är

$$M_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{6} & \cancel{1} \\ \cancel{2} & -7 \end{vmatrix} = -7 \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} \cancel{6} & \cancel{1} \\ 2 & \cancel{-7} \end{vmatrix} = 2$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} \cancel{6} & 1 \\ \cancel{2} & \cancel{-7} \end{vmatrix} = 1 \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 6 & \cancel{1} \\ \cancel{2} & \cancel{-7} \end{vmatrix} = 1$$

och determinanten är

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-7) - 1 \cdot 2 = -44.$$

Inversen är

$$A^{-1} = \frac{1}{-44} \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Kontroll: $\quad A^{-1}A = \dfrac{1}{44} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

L6.17b Skriv upp inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ med adjunktformeln.

Vi använder adjunktformeln återigen

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{pmatrix}^T.$$

Minorerna och determinanten får vi till

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Här ser vi att en invers saknas eftersom determinanten är noll.

L6.20a Lös systemet

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

med Cramers regel.

Vi skriver först ekvationssystemet i matrisform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

För att vi ska kunna använda Cramers regel måste koefficientmatrisen vara inverterbar, d.v.s. determinanten vara skild från noll,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0.$$

Enligt Cramers regel är varje obekant lika med kvoten av två determinanter

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} \qquad \text{och} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}.$$

Nere i nämnaren har vi koefficientmatrisens determinant. I täljaren tar vi determinanten av den matris vi får när den kolumn i koefficientmatrisen som svarar mot variabeln ersätts med högerledet

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{6 \cdot 4 - 2 \cdot 8}{-2} = -4,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot 8 - 6 \cdot 3}{-2} = 5.$$

Vi kontrollerar också svaret

$$\begin{aligned} x + 2y &= -4 + 2 \cdot 5 = 6, \\ 3x + 4y &= 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 5 = 8. \end{aligned}$$

L6.20b Lös systemet

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

med Cramers regel.

Cramers regel ger att lösningen (förutsatt att vi har exakt en lösning) ges av

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}.$$

De fyra determinanterna beräknar vi med de vanliga metoderna

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \{\,\text{Sarrus}\,\} = 1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \cdot 1$
  $\qquad - (-1) \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 3 = -10,$
- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \{\,\text{Utveckla första kolumnen}\,\} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1,$
- $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \{\,\text{Utveckla andra kolumnen}\,\} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5,$
- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \{\,\text{Utveckla tredje kolumnen}\,\} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

Lösningen är alltså

$$x = \tfrac{1}{-10} = -\tfrac{1}{10}, \quad y = \tfrac{-5}{-10} = \tfrac{1}{2}, \quad z = \tfrac{1}{-10} = -\tfrac{1}{10}.$$

Vi kontrollerar svaret

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= -\tfrac{1}{10} + 2 \cdot \tfrac{1}{2} - \left(-\tfrac{1}{10}\right) = 1, \\ 3x + y + 2z &= 3 \cdot \left(-\tfrac{1}{10}\right) + \tfrac{1}{2} + 2 \cdot \left(-\tfrac{1}{10}\right) = -\tfrac{3}{10} + \tfrac{5}{10} - \tfrac{2}{10} = 0, \\ 2x + y + 3z &= 2 \cdot \left(-\tfrac{1}{10}\right) + \tfrac{1}{2} + 3 \cdot \left(-\tfrac{1}{10}\right) = -\tfrac{2}{10} + \tfrac{5}{10} - \tfrac{3}{10} = 0. \end{aligned}$$