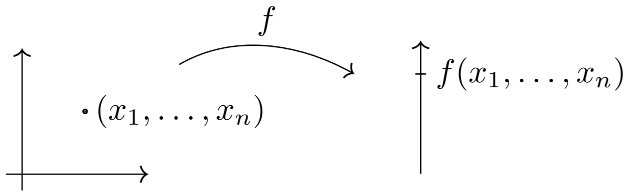
Reellvärda funktioner

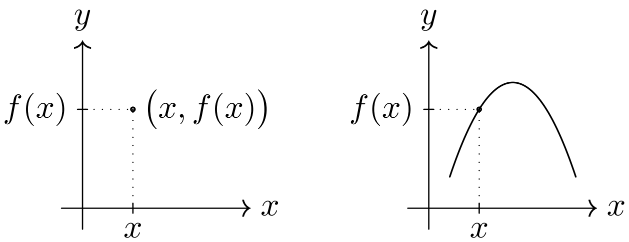
En funktion f som avbildar punkter $(x_1, \dots, x_n)$ i $\boldsymbol{R}^n$ till värden i $\boldsymbol{R}$ kallas för en reellvärd funktion av n variabler, vilket brukar skrivas $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$.



Funktionsgraf

$\boldsymbol{y = f(x)}$

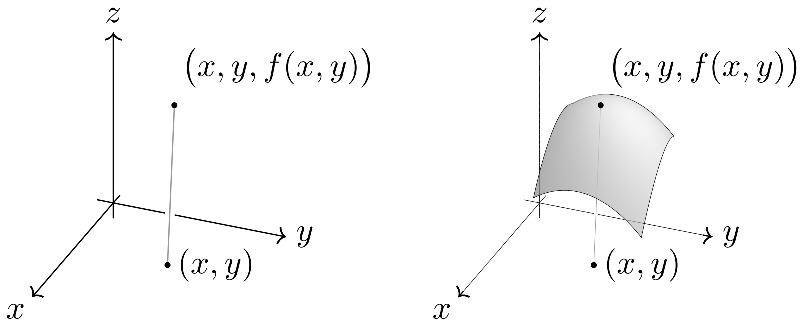
För varje punkt x på x-axeln markerar vi punkten $\bigl(x, f(x)\bigr)$.



När detta görs för alla x i definitionsmängden uppstår en kurva som kallas för funktionen f:s graf.

$\boldsymbol{z = f(x, y)}$

För varje punkt (x, y) i x, y-planet markerar vi punkten $\bigl(x, y, f(x, y)\bigr)$.



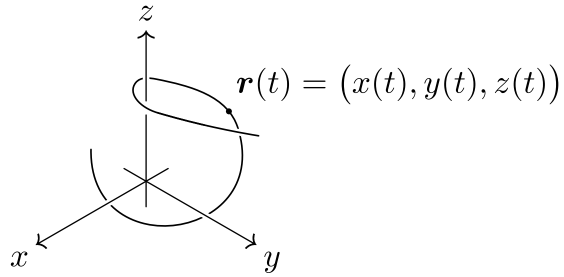
När detta görs för alla (x, y) i definitionsmängden uppstår en yta som kallas för funktionen f:s graf.

Parameterkurvor

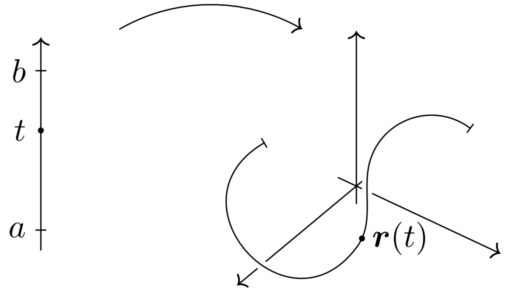
Uttrycket

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t) \\ x_2 &= x_2(t) \\ &\cdots \\ x_n &= x_n(t) \end{aligned} \qquad (a \le t \le b)$$

definierar en parameterkurva i $\boldsymbol{R}^n$. Varje t-värde ger en punkt $\boldsymbol{r}(t) = \bigl(x_1(t), \dots, x_n(t)\bigr)$ på kurvan.

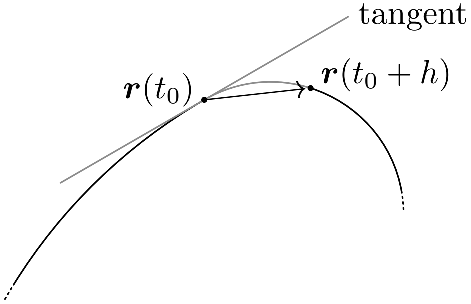


Parameterkurvan är alltså en funktion $t \mapsto \boldsymbol{r}(t)$ som avbildar t-värden i $\boldsymbol{r}$ till punkter på kurvan i $\boldsymbol{R}^n$.



Riktningsvektor

Om vi tar två parametervärden t_0 och $t_0 + h$ nära varandra så kommer vektorn mellan motsvarande punkter $\boldsymbol{r}(t_0)$ och $\boldsymbol{r}(t_0 + h)$ på kurvan, d.v.s. vektorn $\boldsymbol{r}(t_0+h)-\boldsymbol{r}(t_0)$, att ha en riktning som nästan är parallell med kurvans tangent i $\boldsymbol{r}(t_0)$.

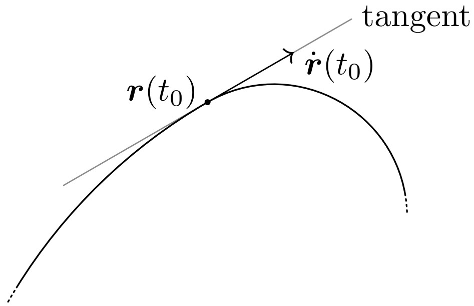


Låter vi $h \to 0$ kommer riktningen hos $\boldsymbol{r}(t_0 + h) - \boldsymbol{r}(t_0)$ att konvergera mot tangentens riktning.

Derivatavektorn

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t_0) = \big(\dot{x}_1(t_0), \ldots, \dot{x}_n(t_0)\big) = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_0 + h) - \boldsymbol{r}(t_0)}{h}$$

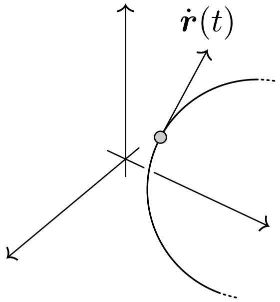
är därför en vektor som pekar i tangentens riktning i punkten $\boldsymbol{r}(t_0)$. Vektorn $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ kallas för kurvans riktningsvektor i punkten.



En mekanisk tolkning

Om en partikels läge beskrivs av parameterkurvan $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, där t är tiden, då är

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}}(t_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sträcka}}{\text{tid}} \\ &= \text{Partikelns hastighet vid tiden } t_0, \\ \|\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\| &= \text{Partikelns fart vid tiden } t. \end{aligned}$$



Regulär kurva

Löst uttryck är en regulär kurva en kurva som är slät och utan hörn.

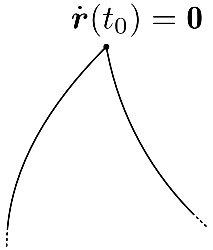
För en parameterkurva $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ finns två typer av punkter där kurvan inte är regulär:

1. Punkter där derivatan $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ antingen inte existerar eller inte är kontinuerlig, och

2. punkter där $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0) = \mathbf{0}$.

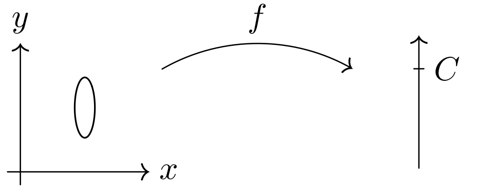
Dessa undantagspunkter kallas för singulära punkter.

Fall 2 svarar mot att parameterkurvan saktar ner och "stannar upp" i punkten. Efter passagen kan kurvan fortsätta i en annan riktning utan att kurvan för den skull blir icke-deriverbar i punkten. Kurvan har då en s.k. spets i punkten.



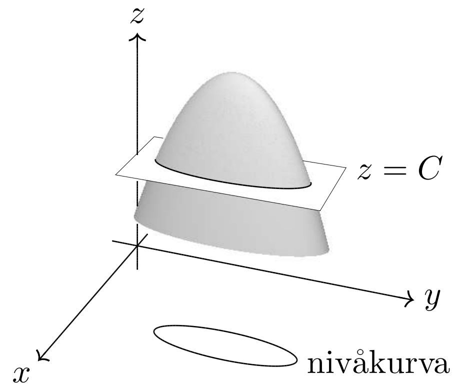
Nivåkurvor

Om vi har givet en funktion $f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ och betraktar alla punkter i $\boldsymbol{R}^2$ som avbildas på ett fixt värde C, så får vi vanligtvis en kurva i planet.



Alla punkter på kurvan har samma funktionsvärde C. Detta kallas för en nivåkurva.

Ritar vi upp funktionens graf så är nivåkurvan den kurva i x, y-planet ovanför vilken funktionsytan skär planet $z = C$.



Gränsvärde

Innan vi definierar gränsvärde för en funktion $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ repeterar vi definitionen av

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

när $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$.

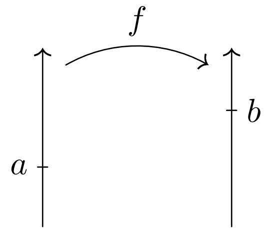
$\boldsymbol{f\colon R \to R}$

Med gränsvärdet

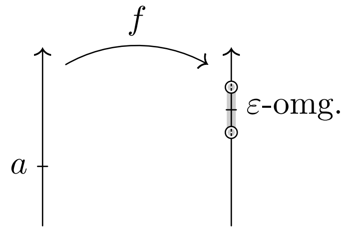
$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

menar vi intuitivt att när x närmar sig a så närmar sig $f(x)$ värdet b.

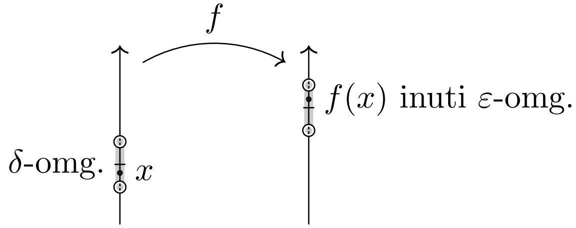
Funktionen f kan vi illustrera med figuren



Om vi väljer en ε-omgivning kring värdet b,



så ska det finnas en δ-omgivning kring a så att alla punkter (utom a) i δ-omgivningen avbildas inom ε-omgivningen av b.



Punkter δ-nära a avbildas alltså ε-nära b. När vi krymper ε måste vi givetvis välja δ mindre, men oavsett hur liten ε-omgivning vi väljer ska det alltid vara möjligt att hitta en sådan δ-omgivning.

Mera formellt lyder definitionen

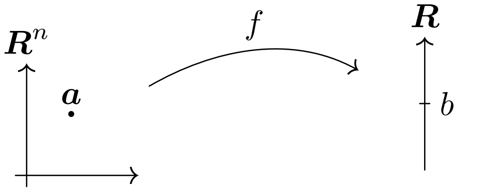
> För alla $\varepsilon > 0$ måste det finnas ett $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att
>
> $|f(x) - b| < \varepsilon$ för alla $x \neq a$ i intervallet $(a - \delta, a + \delta)$.

$f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$

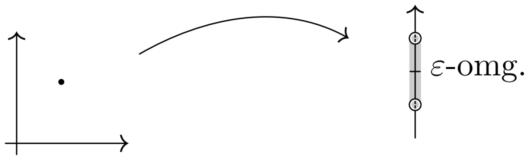
Om $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ så definierar vi gränsvärdet

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = b$$

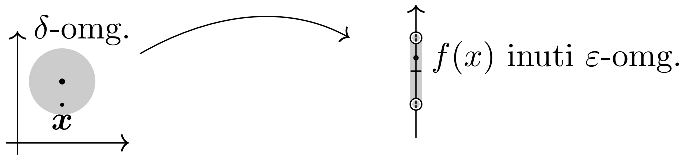
på ett liknande sätt.



Om vi väljer en ε-omgivning av värdet b,



så ska det finnas en δ-omgivning kring $\boldsymbol{a}$ så att alla punkter (utom $\boldsymbol{a}$) i δ-omgivningen avbildas inom ε-omgivningen av $\boldsymbol{b}$.



Oavsett hur litet $\varepsilon > 0$ är ska det finnas ett sådant $\delta > 0$.

Gränsvärdet definieras som:

> För alla $\varepsilon > 0$ måste det finnas ett $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att
>
> $|f(\boldsymbol{x}) - b| < \varepsilon \quad$ för alla $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ som uppfyller $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta$.

Räkneregler

Om $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})$ och $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$ existerar, då är

1. $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \big(f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})\big) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) + \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$,
2. $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \big(f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})\big) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) - \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$,
3. $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) = \big(\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})\big) \cdot \big(\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})\big)$,
4. $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \dfrac{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})}{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})}, \qquad$ om $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) \neq 0$.

Instängningsprincipen

Om

$$f(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x}) \leq h(\boldsymbol{x})$$

och $f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x}) \to b$ då $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, då gäller att

$$g(\boldsymbol{x}) \to b \quad \text{då } \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}.$$

Kontinuitet

En funktion $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ är kontinuerlig i punkten $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ om

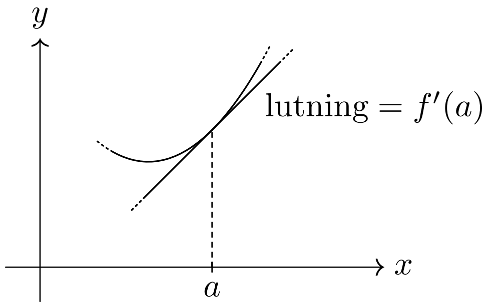
$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}).$$

Sats Funktioner uppbyggda av elementära funktioner är kontinuerliga.

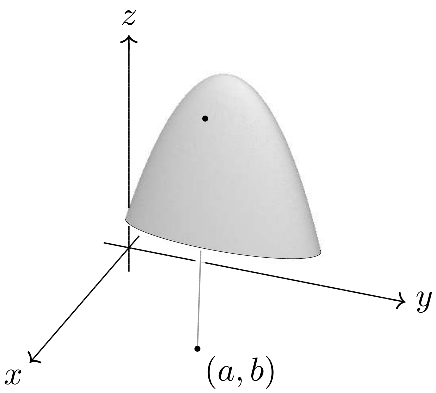
Partialderivata

Derivatan av en funktion $y = f(x)$ i en punkt $x = a$ mäter ändringstakten av f i punkten.

Ritar vi grafen till f är derivatan $f'(a)$ lutningen hos f:s tangentlinje i $x = a$.



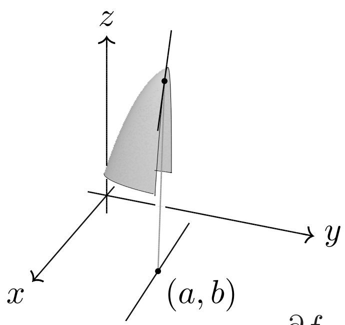
Betrakta vi nu en funktion $z = f(x, y)$ av två variabler så är den definierad i x, y-planet.



För att beskriva ändringstakten av f i en punkt (a, b) så behöver vi ange derivatan av f i två linjärt oberoende riktningar. Det är naturligt att välja dessa riktningar som x- och y-riktningarna.

Om vi håller y-variabeln fix och deriverar $f(x, y)$ med avseende på x, då får vi partialderivatan av f med avseende på x,

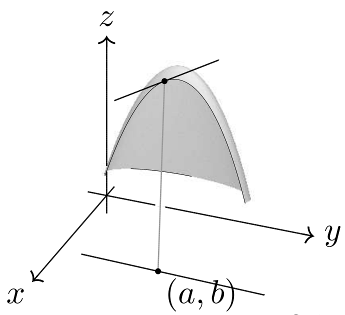
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}.$$



Tangentens lutning $= \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$

Om vi håller x-variabeln fix och deriverar $f(x, y)$ med avseende på y, då får vi partialderivatan av f med avseende på y,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}.$$



Tangentens lutning $= \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$

Har vi en funktion $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ av n variabler så definieras n st partialderivator i punkten $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ som

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h},$$
$$\ldots$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + h) - f(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)}{h}.$$

Olika beteckningar

Det finns andra beteckningar för partialderivatorna,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \text{skrivs även som } f'_x,\ D_x f,\ f'_1.$$

Högre ordningars partialderivator

Om partialderivatorna deriveras i sin tur får vi andraderivator

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big), \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big), \quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) \quad \text{och} \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big).$$

Dessa derivator betecknas mer kortfattat som

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \quad \text{respektive} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Alternativa beteckningar är

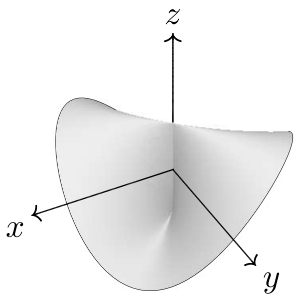
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = D_x\, D_y\, f = f''_{11},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = f''_{yx} = D_x\, D_y\, f = f''_{21} \quad \text{(notera ordningen hos indexen).}$$

Differentierbarhet

En funktion f är deriverbar i en punkt om dess partialderivator existerar i punkten.

Bara för att en funktion är deriverbar i en punkt så är det inte ett tecken på att funktionen är "regulär" i punkten. Exempelvis har funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-xy}{x^2+y^2}, & \text{om } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{om } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$



partialderivator i origo men funktionen är inte ens kontinuerlig där.

Ett bättre mått på en funktions regularitet är om funktionen är differentierbar. En funktion f är differentierbar i en punkt $\boldsymbol{p}$ om den lokalt kan beskrivas som en linjär funktion, d.v.s.

$$f(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{p}) + a_1 h_1 + \cdots + a_n h_n + R(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{h})\|\boldsymbol{h}\|,$$

där resttermen uppfyller $\lim_{\boldsymbol{h}\to \boldsymbol{0}} R(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{h}) = 0$.

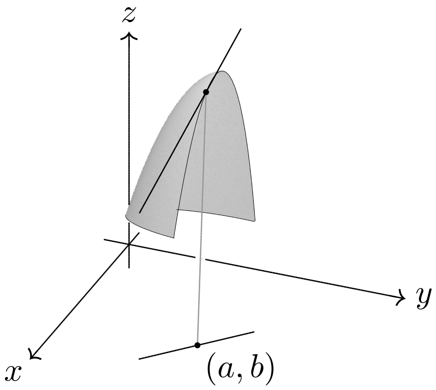
Sats Om alla partiella derivator av f är kontinuerliga en omgivning av en punkt, så är f differentierbar i omgivningen.

Sats Om en funktion ges av elementära uttryck, då är funktionen kontinuerlig i de punkter där den är definierad.

Riktningsderivata

Istället som för partialderivatorna mäta hur funktionen ändrar sig i axelparallella riktningar kan vi mäta f:s ändringstakt längs en linje med enhetsriktningen $\boldsymbol{v} = (c, d)$,

$$\boldsymbol{r}(t) = (a, b) + t\,(c, d),$$



d.v.s. betrakta

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + ch, b + dh) - f(a, b)}{h}.$$

Detta kallas för f:s riktningsderivata i riktningen $\boldsymbol{v}$.

Vektorn

$$\nabla f = \Bigl(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \Bigr)$$

kallas för gradienten till f.

Sats Om f är differentierbar i punkten (a, b) och $\boldsymbol{v}$ är en enhetsvektor, då är

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \boldsymbol{v}.$$

Av ovanstående sats ser vi att riktningsderivatan är som störst då $\boldsymbol{v}$ pekar i samma riktning som ∇f. Gradienten ∇f är alltså den riktning i vilken funktionen växer mest.

Kedjeregeln

Kedjeregeln har det formella utseendet

Om $f(x_1, \dots, x_n)$ och $x_1(t), \dots, x_n(t)$ är differentierbara funktioner, då är

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} f\bigl(x_1(t), \dots, x_n(t)\bigr) \\ &\qquad = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}. \end{aligned}$$

Som ett exempel på kedjeregeln ska vi beräkna derivatan

$$\frac{d}{dx} \frac{e^{\arctan x}}{\sin x + \log \tan x}.$$

Vi kan förenkla uttrycket genom att införa deluttryck,

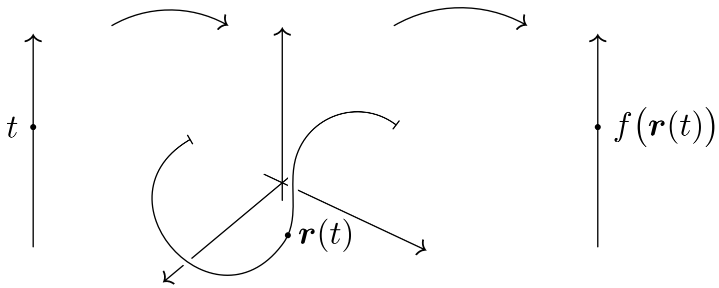
$$\begin{aligned} \frac{e^{\arctan x}}{\sin x + \log \tan x} &= \frac{e^u}{\sin x + \log \tan x} \\ &= \frac{e^u}{v + \log \tan x} = \frac{e^u}{v + \log w}, \end{aligned}$$

där $u = \arctan x$, $v = \sin x$ och $w = \tan x$. Kedjeregeln ger nu att

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\,\frac{e^{\arctan x}}{\sin x+\log\tan x}\\
&\qquad=\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{e^u}{v+\log w}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{e^u}{v+\log w}\cdot\frac{dv}{dx}\\
&\qquad\quad+\frac{\partial}{\partial w}\,\frac{e^u}{v+\log w}\cdot\frac{dw}{dx}\\
&\qquad=\frac{e^u}{v+\log w}\cdot\frac{1}{1+x^2}-\frac{e^u}{(v+\log w)^2}\cdot\cos x\\
&\qquad\quad-\frac{e^u}{(v+\log w)^2}\cdot\frac{1}{w}\cdot\bigl(1+\tan^2 x\bigr)\\
&\qquad=\frac{e^{\arctan x}}{\sin x+\log\tan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}-\frac{e^{\arctan x}}{\bigl(\sin x+\log\tan x\bigr)^2}\cdot\cos x\\
&\qquad\quad-\frac{e^{\arctan x}}{\bigl(\sin x+\log\tan x\bigr)^2}\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot\bigl(1+\tan^2 x\bigr).
\end{aligned}
$$

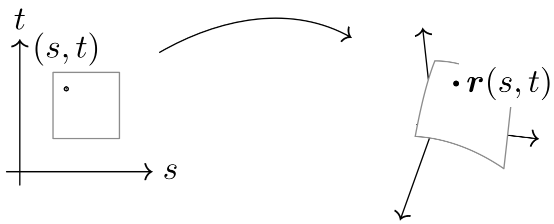
Vi kan också se kedjeregeln som en deriveringsregel för sammansatta funktioner.

Funktionen $\boldsymbol{r}(t)=\bigl(x_1(t),\dots,x_n(t)\bigr)$ är en funktion från $\boldsymbol{R}$ till $\boldsymbol{R}^n$ (parameterkurva) och $f(x_1,\dots,x_n)$ är en funktion från $\boldsymbol{R}^n$ till $\boldsymbol{R}$.



Parameterytor

En parameteryta är en funktion $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s,t)$ som avbildar parameterpunkter (s,t) i en 2-dimensionell parametermängd till en yta.



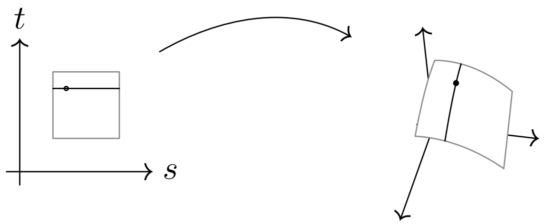
I koordinatform kan parameterytan skrivas som

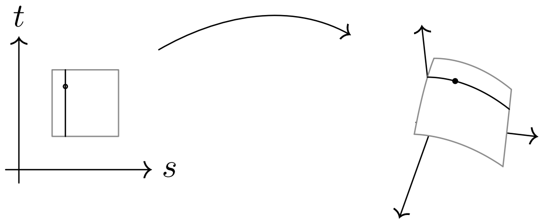
$$
\begin{aligned}
x&=x(s,t),\\
y&=y(s,t),\\
z&=z(s,t).
\end{aligned}
$$

Varje värde på s och t ger en punkt på ytan. När s och t varierar över parametermängden så varierar $\boldsymbol{r}(s,t)$ över ytan.

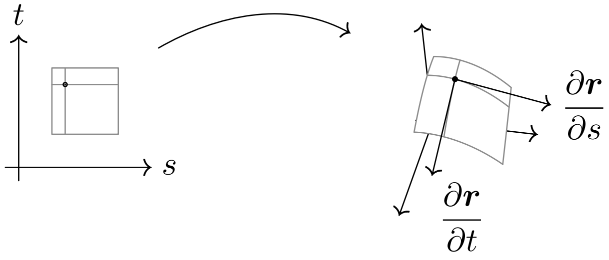
Normalvektor

Om vi i parametermängden låter (s,t) variera längs en axelparallell linje genom en punkt (s_0,t_0) så får vi en kurva som ligger på parameterytan och går genom punkten $\boldsymbol{r}(s_0,t_0)$.





I detta fall har vi alltså en parameterkurva eftersom vi endast tillåts variera en av parametrarna (vi har en funktion $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n$).



I ytan kommer derivatorna $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s_0, t_0)$ och $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s_0, t_0)$ vara riktningsvektorer till respektive parameterkurva, d.v.s. derivatavektorerna är två vektorer parallella med ytan. En normalvektor till ytan blir därför

$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}.$$

Regulär parameteryta

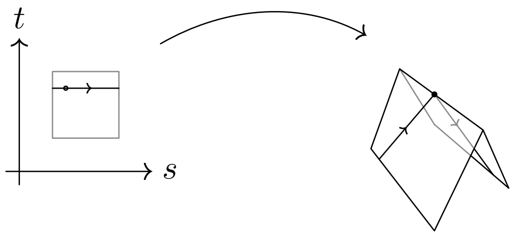
En regulär yta är en yta som är slät och saknar hörn och kanter.

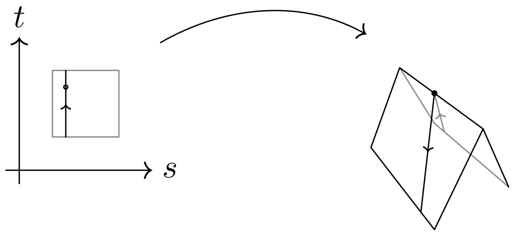
När vi har en parameteryta $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s, t)$ så finns det två typer av punkter där ytan inte är regulär:

1. Punkter där $\boldsymbol{r}$:s partialderivator inte existerar eller inte är kontinuerliga, och
2. punkter där normalvektorn $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$.

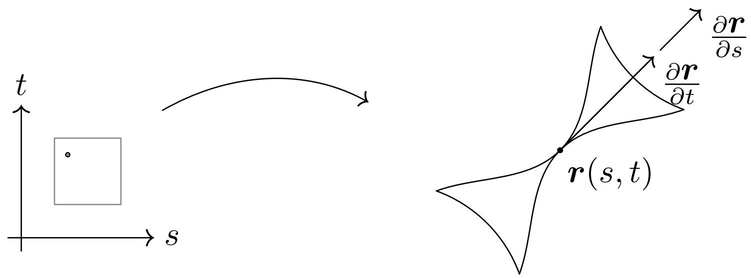
Sådana punkter kallas för singulära punkter till parameterytan.

När fall 2 inträffar kan det bero på att ytan har en kant eller hörn i punkten. Just i sådana punkter ändrar ytan plötsligt riktning och för att detta ska kunna ske utan att fall 1 inträffar så måste parametriseringen ”stanna upp” i punkten, d.v.s. åtminstone en av riktningsvektorerna $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}$ och $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}$ blir en nollvektor.





Det är också möjligt att tänka sig punkter där $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}$ och $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}$ blir linjärt beroende, d.v.s. parallella. I sådana punkter kan ytan vara degenererad.



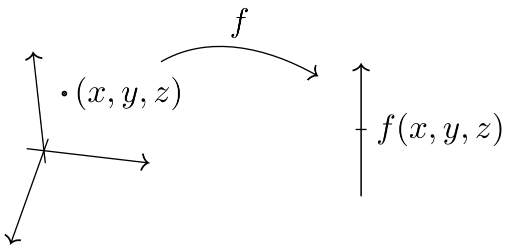
Det är alltså endast i punkter där $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}$ och $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}$ är linjärt oberoende, d.v.s.

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \neq \mathbf{0}$$

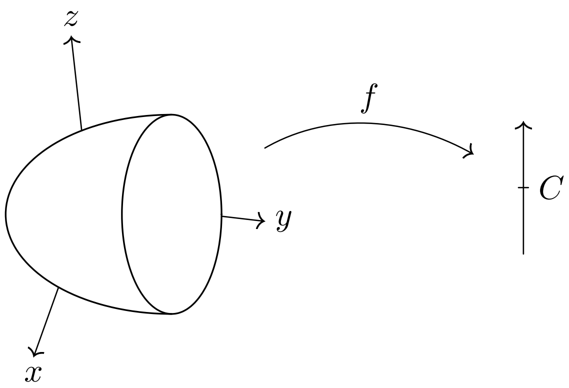
som vi kan garantera att ytan är regulär.

Nivåytor

Säg att vi har en funktion $f\colon \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, d.v.s. en reellvärd funktion av tre variabler.



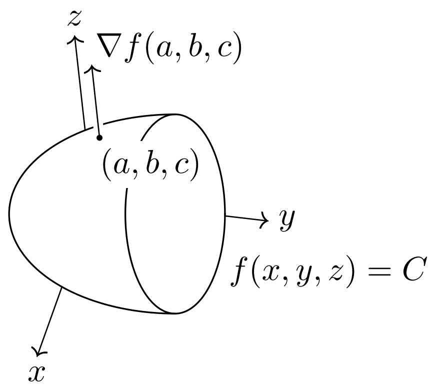
Om vi betraktar alla punkter (x, y, z) som avbildas på ett fixt värde C, så får vi vanligtvis en yta i rummet.



Alla punkter på denna yta har samma funktionsvärde C. Detta kallas för en nivåyta.

Gradient

Om vi har givet en nivåyta $f(x, y, z) = C$ som går genom punkten (a, b, c), då är gradienten $\nabla f(a, b, c)$ vinkelrät mot ytan i punkten (a, b, c).



Tar vi nämligen en riktning $\boldsymbol{v}$ som är parallell med nivåytan så är riktningsderivatan

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(a, b, c) = \nabla f(a, b, c) \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

eftersom f inte ändrar värde längs nivåytan. Detta visar att ∇f är vinkelrät mot nivåytan.

Regulär nivåyta

En regulär yta är en yta som är slät och saknar hörn och kanter.

En nivåyta $f(x, y, z) = C$ har två typer av punkter där den inte är regulär:

1. Punkter där f:s partialderivator inte existerar eller inte är kontinuerliga, och

2. punkter där $\nabla f = \mathbf{0}$.

Sådana punkter kallas för singulära punkter till nivåytan.

Fall 2 inträffar i punkter där nivåytan har en kant eller hörn (och fall 1 inte inträffar). På olika sidor om punkten har då ytan en gradient som pekar i olika riktningar men eftersom ∇f är kontinuerlig måste $\nabla f = \mathbf{0}$ i punkten för att bevara kontinuiteten.