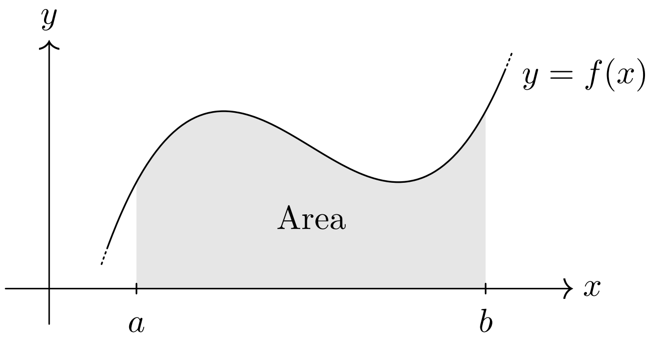
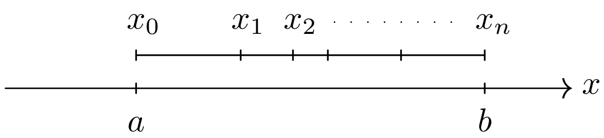
Integralens definition

Problem

Bestäm arean under kurvan $y = f(x)$ mellan $x = a$ och $x = b$.



Dela upp intervallet $[a, b]$ i n delintervall $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$ upp till $[x_{n-1}, x_n]$.

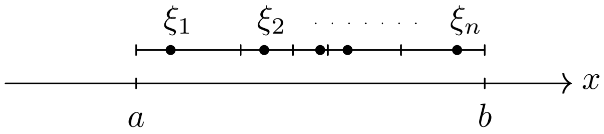


Delintervallens ändpunkter

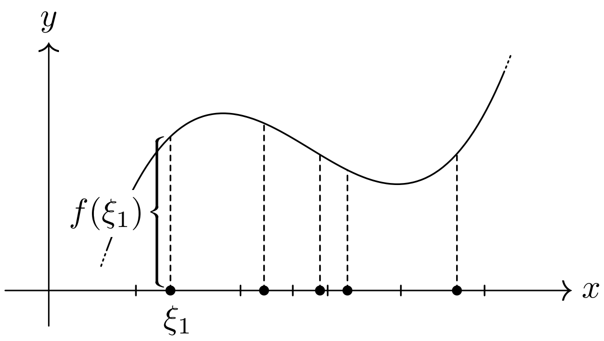
$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

kallas för en partition av $[a, b]$. Längden av det längsta delintervallet kallas för partitionens diameter $\|P\|$.

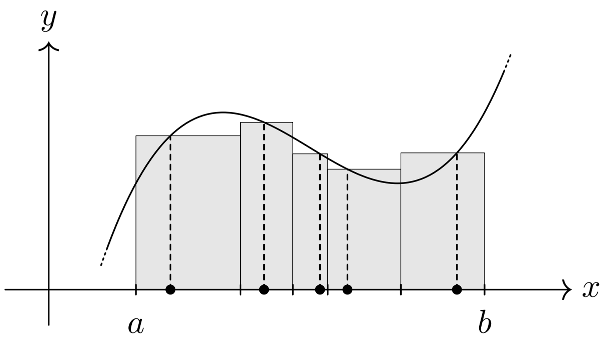
I varje delintervall väljer vi en ξ-punkt.



För varje ξ-punkt räknar vi ut funktionsvärdet.



Vi approximerar arean inom delintervallet $[x_{i-1}, x_i]$ med en rektangel vars höjd är $f(\xi_i)$.



En delrektangel har arean

$$A_i = \text{basen} \cdot \text{höjden} = \Delta x_i \cdot f(\xi_i),$$

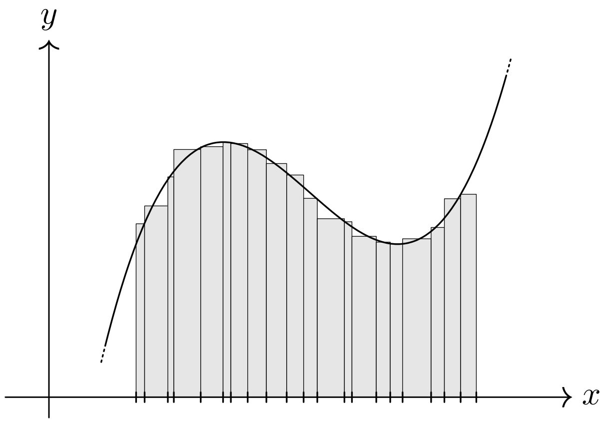
där $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Den totala arean approximeras av delrektanglarnas sammanlagda area,

$$\text{Area} \approx S(f, a, b, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Ovanstående summa kallas för en Riemannsumma.

Om vi väljer allt finare partition av $[a,b]$ (d.v.s. allt mindre partitionsdiameter) så borde Riemannsummorna konvergera mot den sanna arean,

$$\text{Area} = \lim_{\|P\|\to 0} S(f,a,b,P,\xi_P).$$



Definition

Antag att funktionen f är definierad i intervallet $[a,b]$. Om det gäller att för varje följd $\{P_1,P_2,\dots\}$ av partitioner med diameter som går mot noll, $\|P_n\|\to 0$ då $n\to\infty$, så konvergerar motsvarande Riemannsummor S_n, då säger vi att f är integrabel på intervallet $[a,b]$ och Riemannsummornas gränsvärde betecknas

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

och kallas för den bestämda integralen av f över intervallet $[a,b]$.

Egenskaper hos integraler

Antag att $a\le b\le c$ och att A, B är konstanter.
Då gäller att

- $\displaystyle\int_a^b = -\int_b^a$ (teckenkonvention)
- $\displaystyle\int (Af+Bg) = A\int f + B\int g$ (linjäritet)
- $\displaystyle\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$ (additivitet)
- $\displaystyle f\le g \quad\Rightarrow\quad \int f \le \int g$ (monotonicitet)
- $\displaystyle\left|\int f\right| \le \int |f|$ (triangelolikheten)

Integralkalkylens huvudsats

En funktion F kallas för en primitiv funktion till funktionen f på intervallet $[a,b]$ om F är deriverbar och

$$F'(x)=f(x)\quad\text{för alla } x\in[a,b].$$

(Tag vänster- och högerderivata i respektive ändpunkt.)

Sats Om f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ och F är en primitiv funktion till f, då är

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\,F(x)\,\Big]_a^b = F(b)-F(a).$$

Tabell över primitiva funktioner

Funktion	En primitiv funktion
x^α	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \text{om } \alpha \neq -1$
$\dfrac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
e^x	e^x
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}, \quad \text{om } a > 0$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$1+\tan^2 x$	$\tan x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+1}\,\right\rvert$
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert$

Variabelsubstitution

Antag att $u = u(x)$ är deriverbar på $[a, b]$ och att f är kontinuerlig i u:s värdemängd. Då är

$$\int_a^b f\big(u(x)\big)u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.$$

Partiell integration

Om f är kontinuerlig och g är kontinuerligt deriverbar, då gäller att

$$\int f\cdot g\,dx = F\cdot g - \int F\cdot g'\,dx,$$

där F är en primitiv funktion till f.

Inverssubstitution

Antag att $x = g(t)$ är deriverbar och strängt monoton på $[g^{-1}(a), g^{-1}(b)]$ och att f är kontinuerlig på $[a, b]$. Då är

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big\{x = g(t);\ dx = g'(t)\,dt,\ t\colon g^{-1}(a) \to g^{-1}(b)\Big\}$$
$$= \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt.$$

Rationell integrand

En rationell funktion är en funktion med utseendet

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n}.$$

Vi ska nu beskriva en algoritm för hur man integrerar rationella funktioner.

Steg 1 (Polynomdivision)

Om täljaren har högre eller samma gradtal som nämnaren kan vi med en polynomdivision skriva kvoten som

$$c_0 + c_1x + \cdots + c_{m-n}x^{m-n} + \frac{d_0 + d_1x + \cdots + d_{n-1}x^{n-1}}{b_0 + b_1x + \cdots b_nx^n}.$$

De första polynomtermerna är enkla att integrera så vi koncentrerar oss på bråket.

Steg 2 (Faktorisering av nämnaren)

Eftersom nämnaren är ett reellt polynom har den reella rötter $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ och komplexkonjugerade rötter $\beta_1 \pm i\gamma_1, \ldots, \beta_j \pm i\gamma_j$. Enligt faktorsatsen kan kvoten skrivas som

$$\frac{\text{täljare}}{(x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_i)^{m_i}\big((x-\beta_1)^2+\gamma_1^2\big)^{n_1}\cdots\big((x-\beta_j)^2+\gamma_j^2\big)^{n_j}},$$

där $m_1, \ldots, m_i$ och $n_1, \ldots, n_j$ är rötternas multipliciteter.

Steg 3 (Partialbråkuppdelning)

Den rationella funktionen ovan kan nu delas upp i en summa av enklare kvoter, en s.k. partialbråkuppdelning. Antag för enkelhets skull att bråket har utseendet

$$\frac{\text{täljare}}{(x-3)(x+2)^3\big((x+1)^2+1\big)(x^2+4)^2}.$$

Varje faktor i nämnaren kommer ge upphov till termer i partialbråkuppdelningen.

Vi börjar med den vänstra enkla faktorn $(x-3)$. Den ger oss en term i uppdelningen

$$\frac{\text{täljare}}{(x-3)\,(x+2)^3\big((x+1)^2+1\big)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-3} + \cdots$$

Talet A är en konstant som senare måste bestämmas.

Den andra faktorn $(x+2)^3$ har exponenten 3 och det ger oss tre termer i uppdelningen där vi stegvis minskar exponenten till 1,

$$\frac{\text{täljare}}{(x-3)\,(x+2)^3\,\big((x+1)^2+1\big)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x+2)^3} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+2} + \cdots$$

Den tredje faktorn $\big((x+1)^2+1\big)$ svarar mot två enkla komplexkonjugerade rötter $(-1 \pm i)$. Denna faktor ger oss en term i uppdelningen. Denna gång har vi inte en konstant i täljaren utan ett förstagradsuttryck,

$$\begin{aligned}&\frac{\text{täljare}}{(x-3)(x+2)^3\,\boxed{\big((x+1)^2+1\big)}\,(x^2+4)^2}\\&\quad=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x+2)^3}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+2}+\cdots\\&\qquad+\boxed{\frac{Ex+F}{(x+1)^2+1}}+\cdots\end{aligned}$$

Den sista faktorn $(x^2+4)^2$ svarar mot två multipla (dubbla) komplexkonjugerade rötter $(\pm 2i)$ och ger upphov till två termer där vi stegvis minskar exponenten från 2 till 1 (på motsvarande sätt som vi gjorde för faktor nummer två),

$$\begin{aligned}&\frac{\text{täljare}}{(x-3)(x+2)^3\big((x+1)^2+1\big)\,\boxed{(x^2+4)^2}}\\&\quad=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x+2)^3}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+2}+\cdots\\&\qquad+\frac{Ex+F}{(x+1)^2+1}+\boxed{\frac{Gx+H}{(x^2+4)^2}+\frac{Ix+J}{x^2+4}}\,.\end{aligned}$$

Detta är uttryckets partialbråkuppdelning.

Steg 4 (Integrering av termerna)

Om vi skjuter upp frågan hur vi bestämmer konstanterna som dyker upp i partialbråkuppdelningen så återstår bara att integrera de enskilda termerna i partialbråkuppdelningen. För detta behöver vi kunna behandla följande integraltyper

α) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m},$

β) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x-\beta)^2+\gamma^2},$

γ) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{\big((x-\beta)^2+\gamma^2\big)^m}\,dx,\quad$ där $m>1$.

Typ α

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m} = -\frac{1}{m+1}\,\frac{1}{(x-\alpha)^{m+1}}+C$$

Typ β

Vi skriver om integrandens täljare så att dess första term blir nämnarens derivata

$$\frac{Ax+B}{(x-\beta)^2+\gamma^2} = D\,\frac{2(x-\beta)}{(x-\beta)^2+\gamma^2}+E\,\frac{1}{(x-\beta)^2+\gamma^2}.$$

Den första termen har då en logaritmisk primitiv funktion,

$$\int \frac{2(x-\beta)}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\,dx = \ln\big|(x-\beta)^2+\gamma^2\big|+C.$$

Den andra termen ger en arctan-integral,

$$\int \frac{dx}{(x-\beta)^2+\gamma^2} = \frac{1}{\gamma^2}\int \frac{dx}{\left(\dfrac{x-\beta}{\gamma}\right)^2+1} = \left\{ s = \frac{x-\beta}{\gamma} \right\}$$

$$= \frac{1}{\gamma}\int \frac{ds}{s^2+1} = \frac{1}{\gamma}\arctan s + C = \frac{1}{\gamma}\arctan\frac{x-\beta}{\gamma} + C.$$

Typ γ

Denna typ undviker man med Hermites metod (ingår inte i kursen).

Bestämning av konstanterna

Metod 1 (Identifikation av koefficienter)

Vi illustrerar med ett exempel. Säg att vi har partialbråkuppdelningen

$$\frac{x^2-7x+8}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Vi skriver högerledet med gemensam nämnare,

$$\begin{aligned} &= \frac{A(x+1)^2 + B(x-1) + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)^2} \\ &= \frac{(A+C)x^2 + (2A+B)x + (A-B-C)}{(x-1)(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Eftersom täljarna i båda led ska vara identiska måste koefficienterna vara lika,

$$\begin{aligned} 1 &= A + C \\ -7 &= 2A + B \\ 8 &= A - B - C \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} A &= 1/2, \\ B &= -8, \\ C &= 1/2. \end{aligned}$$

Metod 2 (Handpåläggning)

Denna metod fungerar på termer med enkla nämnare och termer med multipel nämnare av maximal grad. I partialbråkuppdelningen

$$\frac{x^4}{(x-1)\big((x+1)^2+1\big)(x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{(x+1)^2+1} + \frac{D}{(x+3)^2} + \frac{E}{x+3}$$

kan vi bestämma A och D med handpåläggning. För att bestämma A täcker vi över den faktor som i vänsterledet svarar mot A,

$$\frac{x^4}{\qquad\big((x+1)^2+1\big)(x+3)^2},$$

och stoppar istället för x in det x-värde som gör den övertäckta faktorn noll, d.v.s. $x = 1$,

$$A = \frac{1^4}{\qquad\big((1+1)^2+1\big)(1+3)^2} = \frac{1}{80}.$$

Konstanten D bestäms på motsvarande sätt

$$D = \frac{(-3)^4}{(-3-1)\big((-3+1)^2+1\big)\qquad} = -\frac{81}{20}.$$

Övriga konstanter bestäms t.ex. med metod 1.

Generaliserade integraler

Det finns två typer av generaliserade integraler,

- Integrationsområdet obegränsat,

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx,$$
$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^a f(x)\,dx.$$

- Integranden obegränsad. Om $|f(x)| \to \infty$ då $x \to a^+$ då definieras

$$\int_a f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon} f(x)\,dx,$$
$$\int^a f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int^{a-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

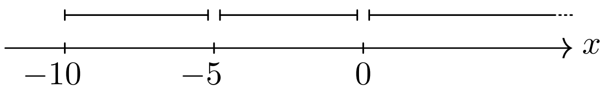
Om det finns flera typer av singulariteter i en generaliserad integral delas integrationsområdet upp i delintervall så att varje del endast har singulariteter i ändpunkterna.

Exempel

Integralen

$$\int_{-10}^\infty \frac{dx}{x|x+5|^{1/3}}$$

delas upp i nedanstående intervall.



Majorantprincipen

Om $0 \le f(x) \le g(x)$ i en omgivning av a. Då är

- $\int^a g(x)\,dx$ konvergent $\Rightarrow$ $\int^a f(x)\,dx$ konvergent.
- $\int^a f(x)\,dx$ divergent $\Rightarrow$ $\int^a g(x)\,dx$ divergent.

Jämförelseprincipen

Om $f(x)$ och $g(x) > 0$ i en omgivning av a och

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0,$$

då konvergerar och divergerar integralerna

$$\int^a f(x)\,dx \quad \text{och} \quad \int^a g(x)\,dx$$

samtidigt.

p-integraler

Sats $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{konvergent,} & \text{om } p > 1, \\ \text{divergent,} & \text{om } p \le 1. \end{cases}$$

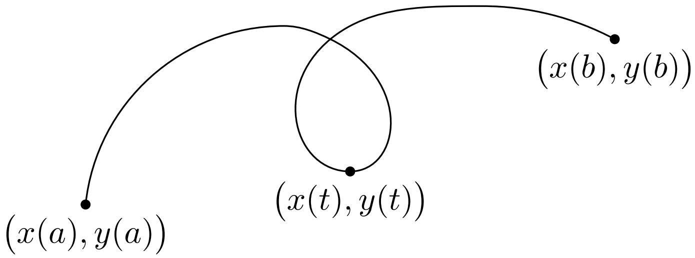
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{konvergent,} & \text{om } p < 1, \\ \text{divergent,} & \text{om } p \ge 1. \end{cases}$$

Parameterkurvor

Uttrycket

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{aligned} \qquad (a \le t \le b), \qquad (*)$$

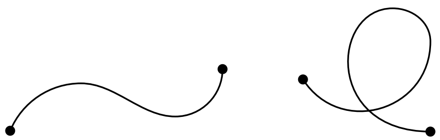
definierar en kurva i planet. För varje t-värde ger $(*)$ en punkt $(x, y) = \big(x(t), y(t)\big)$ på kurvan.



När t går från a till b så genomlöper punkten kurvan från startpunkten $\big(x(a), y(a)\big)$ till slutpunkten $\big(x(b), y(b)\big)$.

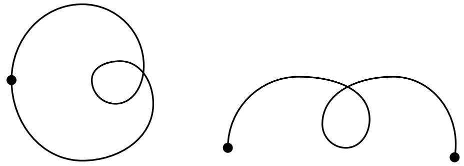
Några begrepp

Enkel — En kurva är enkel om kurvan inte skär sig själv.



enkel — ej enkel

Sluten — En kurva är sluten om startpunkten och slutpunkten sammanfaller.



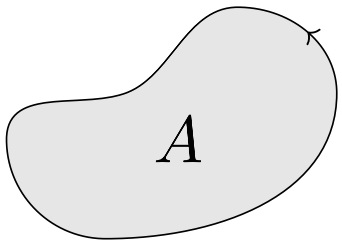
sluten — ej sluten

Positivt led — En sluten kurva som genomlöps moturs sägs vara genomlöpt i positivt led.

Areaformeln

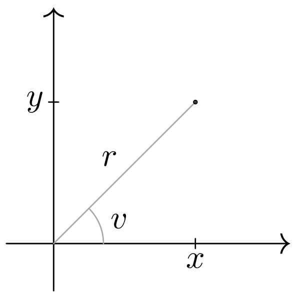
Om $\big(x(t), y(t)\big)$, $a \le t \le b$, är en enkel sluten kurva som genomlöps i positivt led, då ges arean som kurvan innesluter av

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2} \int_a^b (x\dot{y} - \dot{x}y)\, dt \\ &= \int_a^b x\dot{y}\, dt = -\int_a^b \dot{x}y\, dt. \end{aligned}$$



Polära koordinater

En punkts läge i planet kan anges av dess avstånd r till origo och den vinkel v som punkten bildar med x-axeln.



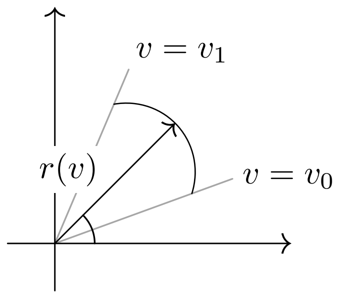
Talparet (r, v) kallas för punktens polära koordinater.

Kurvor givna i polär form

Om vi till varje vinkel v i ett vinkelområde $v_1 \leq v \leq v_2$ ordnar en radie

$$r = r(v),$$

så kommer detta att beskriva en kurva i planet.



Om $r(v) < 0$ hamnar kurvan på den motsatta sidan om vinkel v.

Areaformeln

Arean av området som innesluts av vinkellinjerna $v = v_1$ och $v = v_2$ samt kurvan $r = r(v)$, $(v_1 \leq v \leq v_2)$, ges av

$$A = \tfrac{1}{2} \int_{v_1}^{v_2} r(v)^2 \, dv.$$