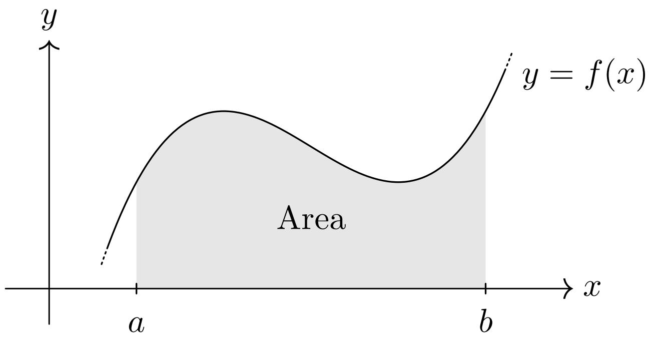
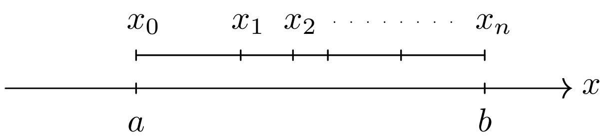
Integralens definition

Problem

Bestäm arean under kurvan $y = f(x)$ mellan $x = a$ och $x = b$.



Dela upp intervallet $[a, b]$ i n delintervall $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$ upp till $[x_{n-1}, x_n]$.

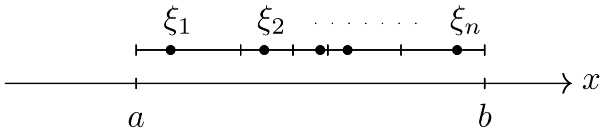


Delintervallens ändpunkter

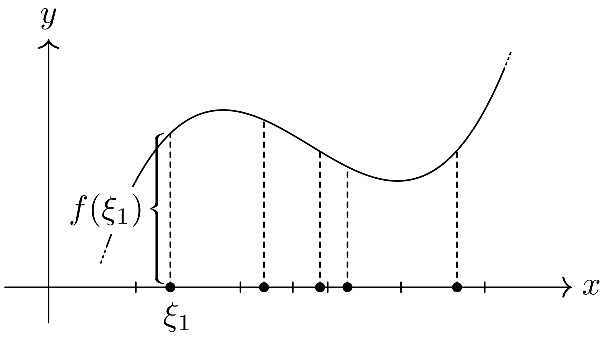
$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

kallas för en partition av $[a, b]$. Längden av det längsta delintervallet kallas för partitionens diameter $\|P\|$.

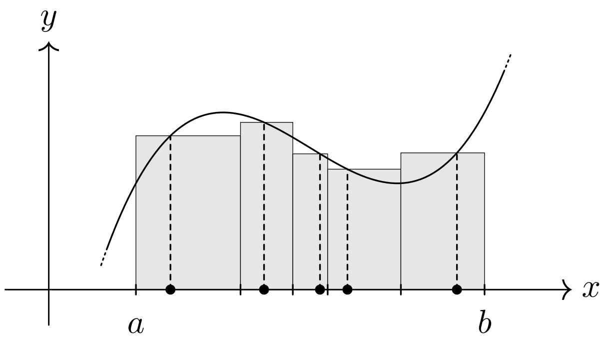
I varje delintervall väljer vi en ξ-punkt.



För varje ξ-punkt räknar vi ut funktionsvärdet.



Vi approximerar arean inom delintervallet $[x_{i-1}, x_i]$ med en rektangel vars höjd är $f(\xi_i)$.



En delrektangel har arean

$$A_i = \text{basen} \cdot \text{höjden} = \Delta x_i \cdot f(\xi_i),$$

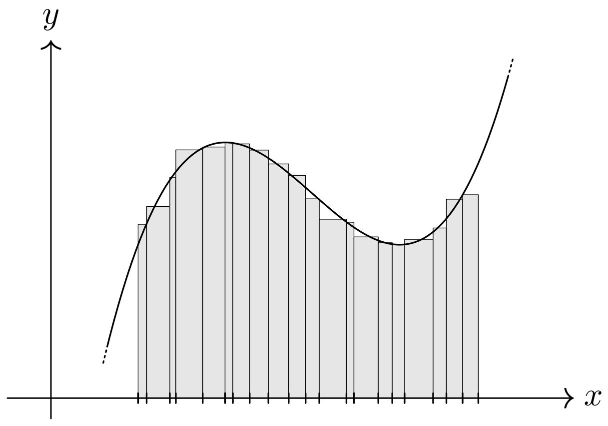
där $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Den totala arean approximeras av delrektanglarnas sammanlagda area,

$$\text{Area} \approx S(f, a, b, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Ovanstående summa kallas för en Riemannsumma.

Om vi väljer allt finare partition av $[a,b]$ (d.v.s. allt mindre partitionsdiameter) så borde Riemannsummorna konvergera mot den sanna arean,

$$\text{Area} = \lim_{\|P\|\to 0} S(f,a,b,P,\xi_P).$$



Definition

Antag att funktionen f är definierad i intervallet $[a,b]$. Om det gäller att för varje följd $\{P_1, P_2, \dots\}$ av partitioner med diameter som går mot noll, $\|P_n\| \to 0$ då $n\to\infty$, så konvergerar motsvarande Riemannsummor S_n, då säger vi att f är integrabel på intervallet $[a,b]$ och Riemannsummornas gränsvärde betecknas

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

och kallas för den bestämda integralen av f över intervallet $[a,b]$.

Egenskaper hos integraler

Antag att $a \le b \le c$ och att A, B är konstanter.
Då gäller att

- $\displaystyle\int_a^b = -\int_b^a$ (teckenkonvention)
- $\displaystyle\int (Af + Bg) = A\int f + B\int g$ (linjäritet)
- $\displaystyle\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$ (additivitet)
- $\displaystyle f \le g \quad\Rightarrow\quad \int f \le \int g$ (monotonicitet)
- $\displaystyle\left|\int f\right| \le \int |f|$ (triangelolikheten)

Integralkalkylens huvudsats

En funktion F kallas för en primitiv funktion till funktionen f på intervallet $[a,b]$ om F är deriverbar och

$$F'(x) = f(x) \quad \text{för alla } x \in [a,b].$$

(Tag vänster- och högerderivata i respektive ändpunkt.)

Sats Om f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ och F är en primitiv funktion till f, då är

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\,F(x)\,\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Tabell över primitiva funktioner

Funktion	En primitiv funktion
x^α	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \text{om } \alpha \neq -1$
$\dfrac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
e^x	e^x
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}, \quad \text{om } a > 0$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+1}\,\right\rvert$
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert$

Variabelsubstitution

Antag att $u = u(x)$ är deriverbar på $[a, b]$ och att f är kontinuerlig i u:s värdemängd. Då är

$$\int_a^b f\big(u(x)\big)u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.$$

Partiell integration

Om f är kontinuerlig och g är kontinuerligt deriverbar, då gäller att

$$\int f \cdot g\,dx = F \cdot g - \int F \cdot g'\,dx,$$

där F är en primitiv funktion till f.

Inverssubstitution

Antag att $x = g(t)$ är deriverbar och strängt monoton på $[g^{-1}(a), g^{-1}(b)]$ och att f är kontinuerlig på $[a, b]$. Då är

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big\{x = g(t);\ dx = g'(t)\,dt,\ t\colon g^{-1}(a) \to g^{-1}(b)\Big\}$$
$$= \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt.$$

Rationell integrand

En rationell funktion är en funktion med utseendet

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n}.$$

Vi ska nu beskriva en algoritm för hur man integrerar rationella funktioner.

Steg 1 (Polynomdivision)

Om täljaren har högre eller samma gradtal som nämnaren kan vi med en polynomdivision skriva kvoten som

$$c_0+c_1x+\cdots+c_{m-n}x^{m-n}+\frac{d_0+d_1x+\cdots+d_{n-1}x^{n-1}}{b_0+b_1x+\cdots b_nx^n}.$$

De första polynomtermerna är enkla att integrera så vi koncentrerar oss på bråket.

Steg 2 (Faktorisering av nämnaren)

Eftersom nämnaren är ett reellt polynom har den reella rötter $\alpha_1,\ldots,\alpha_i$ och komplexkonjugerade rötter $\beta_1\pm i\gamma_1,\ldots,\beta_j\pm i\gamma_j$. Enligt faktorsatsen kan kvoten skrivas som

$$\frac{\text{täljare}}{(x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_i)^{m_i}\big((x-\beta_1)^2+\gamma_1^2\big)^{n_1}\cdots\big((x-\beta_j)^2+\gamma_j^2\big)^{n_j}},$$

där $m_1,\ldots,m_i$ och $n_1,\ldots,n_j$ är rötternas multipliciteter.

Steg 3 (Partialbråkuppdelning)

Den rationella funktionen ovan kan nu delas upp i en summa av enklare kvoter, en s.k. partialbråkuppdelning. Antag för enkelhets skull att bråket har utseendet

$$\frac{\text{täljare}}{(x-3)(x+2)^3\big((x+1)^2+1\big)(x^2+4)^2}.$$

Varje faktor i nämnaren kommer ge upphov till termer i partialbråkuppdelningen.

Vi börjar med den vänstra enkla faktorn $(x-3)$. Den ger oss en term i uppdelningen

$$\begin{aligned}&\frac{\text{täljare}}{(x-3)\,(x+2)^3\big((x+1)^2+1\big)(x^2+4)^2}\\&\quad=\frac{A}{x-3}+\cdots\end{aligned}$$

Talet A är en konstant som senare måste bestämmas.

Den andra faktorn $(x+2)^3$ har exponenten 3 och det ger oss tre termer i uppdelningen där vi stegvis minskar exponenten till 1,

$$\begin{aligned}&\frac{\text{täljare}}{(x-3)\,(x+2)^3\,\big((x+1)^2+1\big)(x^2+4)^2}\\&\quad=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x+2)^3}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+2}+\cdots\end{aligned}$$

Den tredje faktorn $\bigl((x+1)^2+1\bigr)$ svarar mot två enkla komplexkonjugerade rötter $(-1 \pm i)$. Denna faktor ger oss en term i uppdelningen. Denna gång har vi inte en konstant i täljaren utan ett förstagradsuttryck,

$$\begin{aligned} &\frac{\text{täljare}}{(x-3)(x+2)^3\bigl((x+1)^2+1\bigr)(x^2+4)^2} \\ &\qquad = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x+2)^3} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+2} + \cdots \\ &\qquad\quad + \frac{Ex+F}{(x+1)^2+1} + \cdots \end{aligned}$$

Den sista faktorn $(x^2+4)^2$ svarar mot två multipla (dubbla) komplexkonjugerade rötter $(\pm 2i)$ och ger upphov till två termer där vi stegvis minskar exponenten från 2 till 1 (på motsvarande sätt som vi gjorde för faktor nummer två),

$$\begin{aligned} &\frac{\text{täljare}}{(x-3)(x+2)^3\bigl((x+1)^2+1\bigr)(x^2+4)^2} \\ &\qquad = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x+2)^3} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+2} + \cdots \\ &\qquad\quad + \frac{Ex+F}{(x+1)^2+1} + \frac{Gx+H}{(x^2+4)^2} + \frac{Ix+J}{x^2+4}. \end{aligned}$$

Detta är uttryckets partialbråkuppdelning.

Steg 4 (Integrering av termerna)

Om vi skjuter upp frågan hur vi bestämmer konstanterna som dyker upp i partialbråkuppdelningen så återstår bara att integrera de enskilda termerna i partialbråkuppdelningen. För detta behöver vi kunna behandla följande integraltyper

α) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m},$

β) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x-\beta)^2+\gamma^2},$

γ) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{\bigl((x-\beta)^2+\gamma^2\bigr)^m}\,dx,\quad$ där $m>1$.

Typ α

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m} = -\frac{1}{m+1}\frac{1}{(x-\alpha)^{m+1}} + C$$

Typ β

Vi skriver om integrandens täljare så att dess första term blir nämnarens derivata

$$\frac{Ax+B}{(x-\beta)^2+\gamma^2} = D\,\frac{2(x-\beta)}{(x-\beta)^2+\gamma^2} + E\,\frac{1}{(x-\beta)^2+\gamma^2}.$$

Den första termen har då en logaritmisk primitiv funktion,

$$\int \frac{2(x-\beta)}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\,dx = \ln\bigl|(x-\beta)^2+\gamma^2\bigr| + C.$$

Den andra termen ger en arctan-integral,

$$\int \frac{dx}{(x-\beta)^2+\gamma^2} = \frac{1}{\gamma^2}\int \frac{dx}{\left(\dfrac{x-\beta}{\gamma}\right)^2+1} = \left\{ s = \frac{x-\beta}{\gamma} \right\}$$

$$= \frac{1}{\gamma}\int \frac{ds}{s^2+1} = \frac{1}{\gamma}\arctan s + C = \frac{1}{\gamma}\arctan\frac{x-\beta}{\gamma} + C.$$

Typ γ

Denna typ undviker man med Hermites metod (ingår inte i kursen).

Bestämning av konstanterna

Metod 1 (Identifikation av koefficienter)

Vi illustrerar med ett exempel. Säg att vi har partialbråkuppdelningen

$$\frac{x^2-7x+8}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Vi skriver högerledet med gemensam nämnare,

$$\begin{aligned} &= \frac{A(x+1)^2 + B(x-1) + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)^2} \\ &= \frac{(A+C)x^2 + (2A+B)x + (A-B-C)}{(x-1)(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Eftersom täljarna i båda led ska vara identiska måste koefficienterna vara lika,

$$\begin{aligned} 1 &= A + C \\ -7 &= 2A + B \\ 8 &= A - B - C \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} A &= 1/2, \\ B &= -8, \\ C &= 1/2. \end{aligned}$$

Metod 2 (Handpåläggning)

Denna metod fungerar på termer med enkla nämnare och termer med multipel nämnare av maximal grad. I partialbråkuppdelningen

$$\frac{x^4}{(x-1)\big((x+1)^2+1\big)(x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{(x+1)^2+1} + \frac{D}{(x+3)^2} + \frac{E}{x+3}$$

kan vi bestämma A och D med handpåläggning. För att bestämma A täcker vi över den faktor som i vänsterledet svarar mot A,

$$\frac{x^4}{\qquad \big((x+1)^2+1\big)(x+3)^2},$$

och stoppar istället för x in det x-värde som gör den övertäckta faktorn noll, d.v.s. $x = 1$,

$$A = \frac{1^4}{\qquad \big((1+1)^2+1\big)(1+3)^2} = \frac{1}{80}.$$

Konstanten D bestäms på motsvarande sätt

$$D = \frac{(-3)^4}{(-3-1)\big((-3+1)^2+1\big) \qquad} = -\frac{81}{20}.$$

Övriga konstanter bestäms t.ex. med metod 1.

Generaliserade integraler

Det finns två typer av generaliserade integraler,

- Integrationsområdet obegränsat,

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx,$$
$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^a f(x)\,dx.$$

- Integranden obegränsad. Om $|f(x)| \to \infty$ då $x \to a^+$ då definieras

$$\int_a f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon} f(x)\,dx,$$
$$\int^a f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int^{a-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

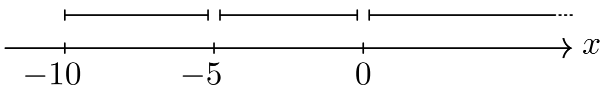
Om det finns flera typer av singulariteter i en generaliserad integral delas integrationsområdet upp i delintervall så att varje del endast har singulariteter i ändpunkterna.

Exempel

Integralen

$$\int_{-10}^{\infty}\frac{dx}{x|x+5|^{1/3}}$$

delas upp i nedanstående intervall.



Majorantprincipen

Om $0 \le f(x) \le g(x)$ i en omgivning av a. Då är

- $\int^a g(x)\,dx$ konvergent $\quad\Rightarrow\quad \int^a f(x)\,dx$ konvergent.
- $\int^a f(x)\,dx$ divergent $\quad\Rightarrow\quad \int^a g(x)\,dx$ divergent.

Jämförelseprincipen

Om $f(x)$ och $g(x) > 0$ i en omgivning av a och

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = A \ne 0,$$

då konvergerar och divergerar integralerna

$$\int^a f(x)\,dx \quad \text{och} \quad \int^a g(x)\,dx$$

samtidigt.

p-integraler

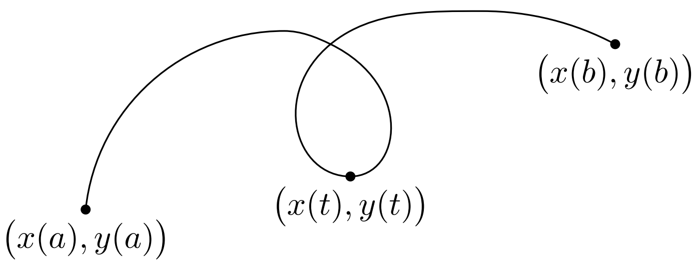
Sats
$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \begin{cases}\text{konvergent,} & \text{om } p > 1,\\ \text{divergent,} & \text{om } p \le 1.\end{cases}$$
$$\int_0^{1}\frac{dx}{x^p} = \begin{cases}\text{konvergent,} & \text{om } p < 1,\\ \text{divergent,} & \text{om } p \ge 1.\end{cases}$$

Parameterkurvor

Uttrycket

$$
\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{aligned} \qquad (a \le t \le b), \qquad (*)
$$

definierar en kurva i planet. För varje t-värde ger $(*)$ en punkt $(x, y) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ på kurvan.

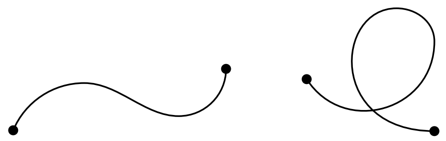


När t går från a till b så genomlöper punkten kurvan från startpunkten $\bigl(x(a), y(a)\bigr)$ till slutpunkten $\bigl(x(b), y(b)\bigr)$.

Några begrepp

Enkel

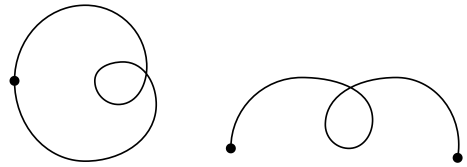
En kurva är enkel om kurvan inte skär sig själv.



enkel ej enkel

Sluten

En kurva är sluten om startpunkten och slutpunkten sammanfaller.



sluten ej sluten

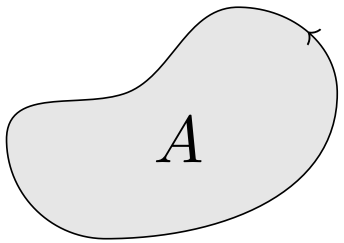
Positivt led

En sluten kurva som genomlöps moturs sägs vara genomlöpt i positivt led.

Areaformeln

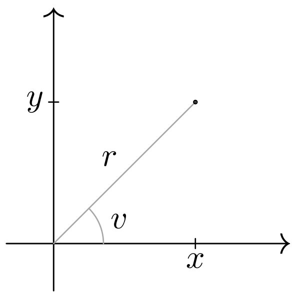
Om $\bigl(x(t), y(t)\bigr)$, $a \le t \le b$, är en enkel sluten kurva som genomlöps i positivt led, då ges arean som kurvan innesluter av

$$
\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2} \int_a^b (x\dot{y} - \dot{x}y)\, dt \\ &= \int_a^b x\dot{y}\, dt = -\int_a^b \dot{x}y\, dt. \end{aligned}
$$



Polära koordinater

En punkts läge i planet kan anges av dess avstånd r till origo och den vinkel v som punkten bildar med x-axeln.



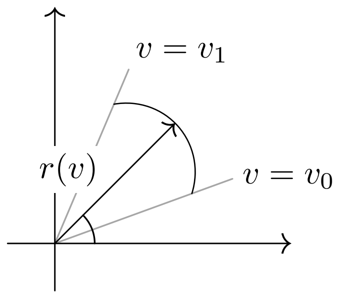
Talparet (r, v) kallas för punktens polära koordinater.

Kurvor givna i polär form

Om vi till varje vinkel v i ett vinkelområde $v_1 \leq v \leq v_2$ ordnar en radie

$$r = r(v),$$

så kommer detta att beskriva en kurva i planet.

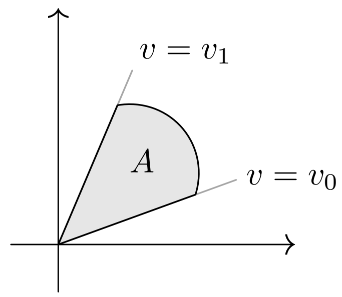


Om $r(v) < 0$ hamnar kurvan på den motsatta sidan om vinkel v.

Areaformeln

Arean av området som innesluts av vinkellinjerna $v = v_1$ och $v = v_2$ samt kurvan $r = r(v)$, $(v_1 \leq v \leq v_2)$, ges av

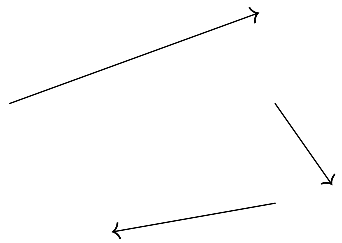
$$A = \tfrac{1}{2} \int_{v_1}^{v_2} r(v)^2 \, dv.$$



Vektorer

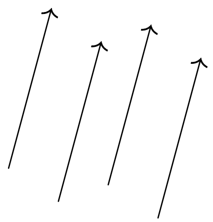
En vektor anger en riktning i rummet (eller planet) och en längd (belopp).

Vektorer brukar ritas som pilar,



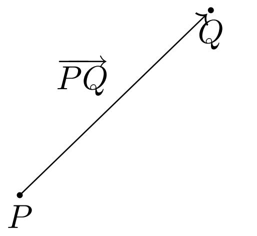
och betecknas med bokstäver i fet stil $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{r}, \ldots$.

Notera att en vektor inte har någon förankringspunkt i rummet utan alla vektorer som pekar i samma riktning och är lika långa är samma vektor.



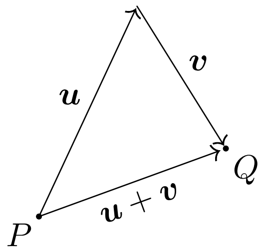
Längden av en vektor $\boldsymbol{v}$ betecknas $\|\boldsymbol{v}\|$. En vektor som har längd 1 kallas för en enhetsvektor.

Vektorn som när den placeras i punkten P får sin spets i punkten Q betecknas $\overrightarrow{PQ}$.



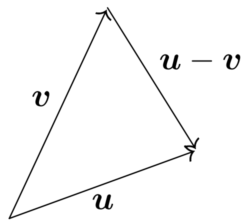
Vektoraddition

Summan av två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ får vi på följande vis: Placera $\boldsymbol{u}$ i punkten P och placera $\boldsymbol{v}$ i den punkt $\boldsymbol{u}$:s spets hamnar. Då har $\boldsymbol{v}$ sin spets i en punkt Q. Summan $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ är vektorn $\overrightarrow{PQ}$.



Vektorsubtraktion

Differensvektorn $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ är den vektor som när vi lägger till $\boldsymbol{v}$ får $\boldsymbol{u}$.

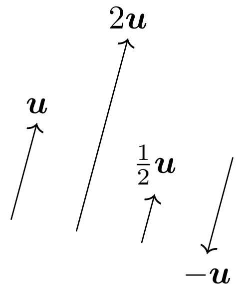


$(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$

Multiplikation med skalär

Om $k > 0$ pekar vektorn $k\boldsymbol{u}$ i samma riktning som $\boldsymbol{u}$ men har längd k gånger $\boldsymbol{u}$:s längd.

Om $k < 0$ pekar vektorn $k\boldsymbol{u}$ i motsatt riktning som $\boldsymbol{u}$ och har längd $|k|$ gånger $\boldsymbol{u}$:s längd.



Polär uppdelning

En vektor $\boldsymbol{u}$ kan skrivas som

$$\boldsymbol{u} = \|\boldsymbol{u}\|\, \boldsymbol{e}_u,$$

där $\boldsymbol{e}_u$ är enhetsvektorn som pekar i $\boldsymbol{u}$-riktningen.

Detta är alltså en uppdelning av vektorn $\boldsymbol{u}$ i dess belopp (längd) $\|\boldsymbol{u}\|$ och dess riktning $\boldsymbol{e}_v$.

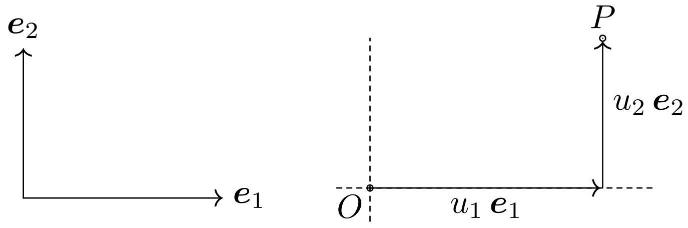
Räkneregler

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} && \text{(Kommutativa lagen)}\\
\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) &= (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} && \text{(Associativa lagen)}\\
k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= k\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{v} && \text{(Distributiva lagen)}\\
(k+\ell)\boldsymbol{u} &= k\boldsymbol{u}+\ell\boldsymbol{u} && \text{(Distributiva lagen)}\\
k(\ell\boldsymbol{u}) &= (k\ell)\boldsymbol{u}
\end{aligned}$$

Koordinatsystem

I planet

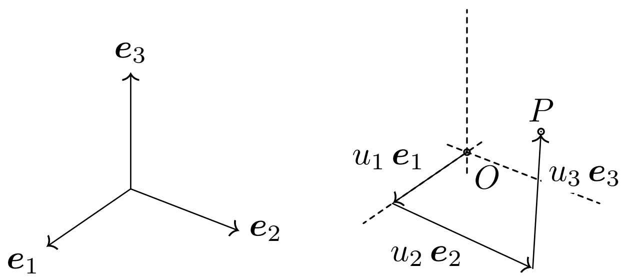
Om vi har givet två icke-parallella vektorer $\boldsymbol{e}_1$ och $\boldsymbol{e}_2$ i planet, då kan vi beskriva varje punkt P i planet på följande sätt: Utgående från en baspunkt O anger vi sträckor u_1 och u_2 vi ska gå i respektive vektorriktning $\boldsymbol{e}_1$ och $\boldsymbol{e}_2$ för att komma till punkten.



Talparet (u_1, u_2) kallas för punktens koordinater i koordinatsystemet $O\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

I rummet

Med tre vektorer $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ och $\boldsymbol{e}_3$ i rummet som inte ligger i ett plan kan vi uttrycka varje punkt i rummet genom att ange en baspunkt O och tre sträckor i $\boldsymbol{e}_1$-, $\boldsymbol{e}_2$- respektive $\boldsymbol{e}_3$-riktningen som tar oss till punkten.

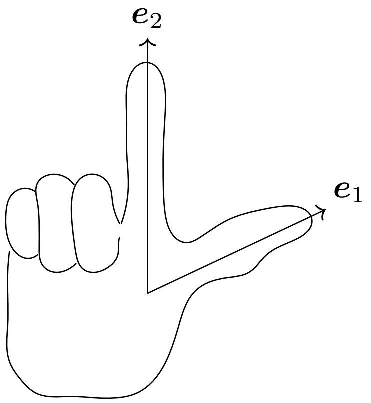


Taltrippeln (u_1, u_2, u_3) kallas för punktens koordinater i koordinatsystemet $O\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

Orientering

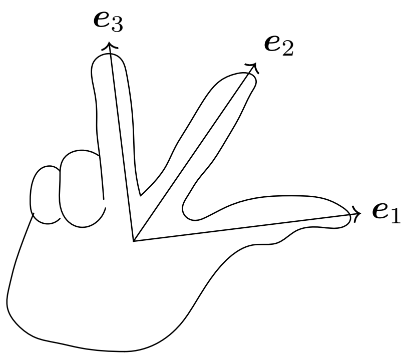
I planet

Ett koordinatsystem i planet är ett högerhandssystem om basvektorerna $\boldsymbol{e}_1$ och $\boldsymbol{e}_2$ har samma inbördes förhållande som högerhandens tumme och pekfinger.



I rummet

Ett koordinatsystem i rummet är ett högerhandssystem om basvektorerna $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ och $\boldsymbol{e}_3$ har samma inbördes förhållande som högerhandens tumme, pekfinger och långfinger.



Några begrepp

Komposant

Om $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i koordinatsystemet $O\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, d.v.s.

$$\boldsymbol{u} = u_1\,\boldsymbol{e}_1 + u_2\,\boldsymbol{e}_2 + u_3\,\boldsymbol{e}_3,$$

då kallas $u_1\boldsymbol{e}_1$, $u_2\boldsymbol{e}_2$ och $u_3\boldsymbol{e}_3$ för $\boldsymbol{u}$:s komposanter i $\boldsymbol{e}_1$-, $\boldsymbol{e}_2$- och $\boldsymbol{e}_3$-riktningen.

Linjärkombination

En summa i formen

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m,$$

där $c_1, \ldots, c_m$ är tal, kallas för en linjärkombination av $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$.

Linjärt beroende/oberoende

Om någon av vektorerna i samlingen $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ kan uttryckas som en linjärkombination av de övriga vektorerna då sägs vektorerna vara linjärt beroende, annars linjärt oberoende.

I en linjärt beroende samling vektorer finns alltså fler vektorer än antalet riktningar de beskriver.

Sats Vektorerna $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ är linjärt oberoende om följande implikation gäller

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \cdots = c_m = 0.$$

Bas

Om $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$ i planet är linjärt oberoende, då kan varje vektor i planet skrivas som en linjärkombination av $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$. $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ kallas därför för en bas till planet.

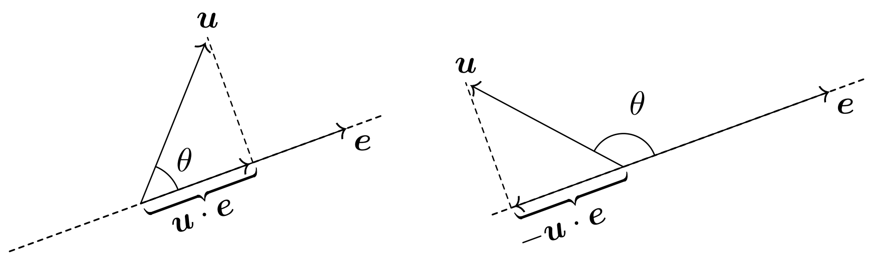
Om $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{u}_3$ i rummet är linjärt oberoende, då kan varje vektor i rummet skrivas som en linjärkombination av $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{u}_3$. $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ kallas för en bas till rummet.

ON-bas

Om basvektorerna i en bas är sinsemellan vinkelräta och har längd 1, då sägs basen vara en ON-bas (ortonormerad bas).

Skalärprodukt

Skalärprodukten $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}$ mellan en vektor $\boldsymbol{u}$ och en enhetsvektor $\boldsymbol{e}$ är längden av vektorn $\boldsymbol{u}$:s komposant i riktningen $\boldsymbol{e}$.



Pekar $\boldsymbol{u}$:s komposant och $\boldsymbol{e}$ i motsatta riktningar är skalärprodukten negativ.

Om θ är vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{e}$, då är

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e} = \|\boldsymbol{u}\|\,\cos\theta.$$

Skalärprodukten mellan två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ definieras som

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cdot\big(\|\boldsymbol{v}\|\boldsymbol{e}_v\big) = \|\boldsymbol{v}\|\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_v = \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|\,\cos\theta.$$

Sats $\quad \boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är vinkelräta $\quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0.$

Koordinatform

Om $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ i ett ON-system, då är

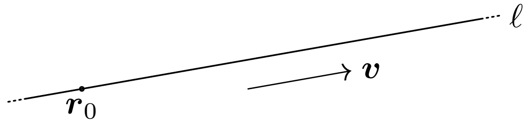
$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Räkneregler

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} && \text{(Kommutativa lagen)}\\ \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) &= \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} && \text{(Distributiva lagen)}\\ k(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) &= (k\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cdot(k\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

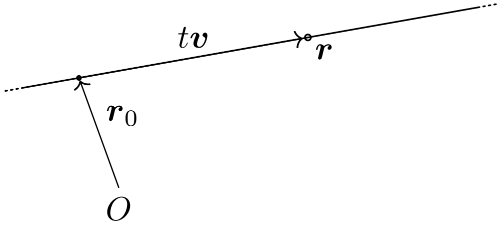
Linje

Låt ℓ vara linjen som går genom punkten $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och är parallell med riktningsvektorn $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$.



Parameterform

Varje punkts läge på linjen kan beskrivas som att vi först går till $\boldsymbol{r}_0$ och sen en viss sträcka utmed $\boldsymbol{v}$-riktningen,



$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\,\boldsymbol{v}$$

Parametern t bestämmer punktens avstånd från punkten $\boldsymbol{r}_0$.

Utskrivet i koordinatform får vi

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at, \\ y &= y_0 + bt, \\ z &= z_0 + ct. \end{aligned}$$

Ekvation

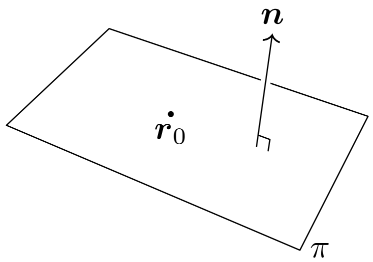
Linjen kan också beskrivas med ekvationen

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (\text{om } a, b, c \neq 0).$$

En punkt (x, y, z) ligger på linjen om den uppfyller ekvationen.

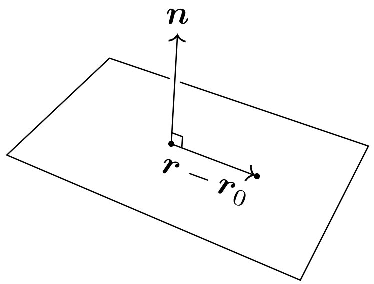
Plan

Ett plan π kan beskrivas genom att ange en punkt $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i planet och en vektor $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ som är vinkelrät mot planet, en s.k. normalvektor.



Ekvation

En punkt $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ ligger i planet om vektorn $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ (från $\boldsymbol{r}_0$ till $\boldsymbol{r}$) är parallell med planet, vilket är detsamma som att $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ är vinkelrät mot $\boldsymbol{n}$,



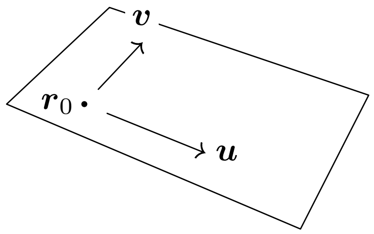
$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0.$$

I koordinatform blir ekvationen

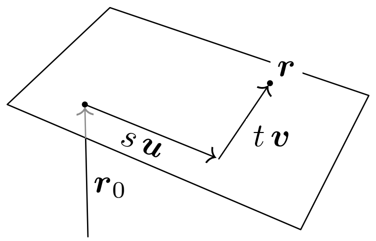
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Parameterform

Ett plan kan också beskrivas genom att ange en punkt $\boldsymbol{r}_0$ i planet och två linjärt oberoende vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ som är parallella med planet.



Varje punkt i planet kan då beskrivas som att vi först går till $\boldsymbol{r}_0$ och sedan en viss sträcka i $\boldsymbol{u}$-riktningen följt av en viss sträcka i $\boldsymbol{v}$-riktningen,

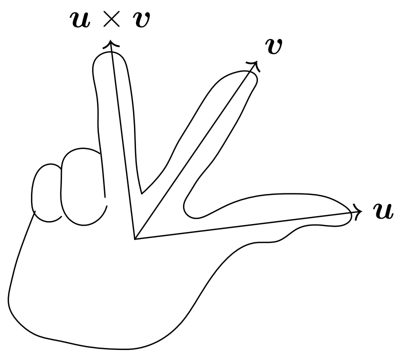


$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + s\,\boldsymbol{u} + t\,\boldsymbol{v}.$$

Parametrarna s och t anger den sträcka vi rör oss i respektive riktning.

Kryssprodukt

Kryssprodukten $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ av två icke-parallella vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ definieras som den vektor som har en riktning som är vinkelrät mot $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ enligt högerhandsregeln,



och har beloppet

$$\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|\,\sin\theta.$$

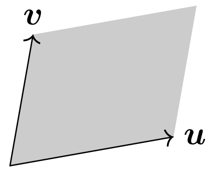
Koordinatform

Om $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ i ett högerhänt ON-system, då är

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \bigl(u_2 v_3 - u_3 v_2, -u_1 v_3 + u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1\bigr).$$

Geometrisk tolkning

Om vi tolkar $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ som kantvektorer i ett parallellogram,



då är

$$\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = \text{arean av parallellogrammet.}$$

Räkneregler

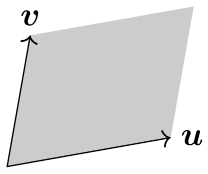
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} &= -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} && \text{(Antikommutativa lagen)}\\
\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) &= \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} && \text{(Distributiva lagar)}\\
(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u} &&\\
k(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) &= (k\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \times (k\boldsymbol{v}) &&
\end{aligned}$$

Observera att $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) \neq (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w}$ i allmänhet. Den associativa lagen gäller alltså inte.

Determinanter

2 × 2-determinanter

Två vektorer $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ och $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ i planet spänner upp ett parallellogram.



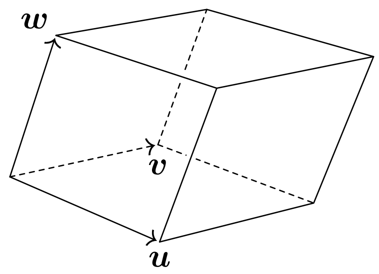
Arean av detta parallellogram är beloppet av determinanten

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} + & & - \\ u_1 & \times & u_2 \\ v_1 & & v_2 \end{matrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Determinanten är alltså en area med tecken.

3 × 3-determinanter

Tre vektorer $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ i rummet spänner upp en parallellepiped.



Volymen av denna parallellepiped är beloppet av determinanten

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Kofaktorutveckling längs första raden

En 3 × 3-determinant kan beräknas med kofaktorutveckling längs första raden.

Vi illustrerar med ett exempel,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Varje element i första raden ger en term i kofaktorutvecklingen.

Vi börjar med det vänstra elementet och stryker den rad och den kolumn elementet befinner sig i.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Determinanten av de tal som återstår kallas för en minor. Den första termen i kofaktorutvecklingen är elementet gånger denna minor,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} + \cdots$$

När vi går vidare till nästa element i första raden strycker vi på samma sätt den rad och den kolumn elementet befinner sig i,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Den andra termen i utvecklingen är elementet gånger den nya minor vi får av de icke strukna talen. Denna term har dock ett minustecken framför sig,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + \cdots$$

För det sista elementet i raden stryker vi raden och kolumnen elementet befinner sig i,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Den sista termen i utvecklingen blir elementet gånger motsvarande minor (med plustecken),

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 10 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Detta är kofaktorutvecklingen av determinanten längs första raden. 2×2-minorerna i utvecklingen räknar man sen ut med den vanliga formeln.

Determinantformel för kryssprodukten

Kryssprodukten $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ kan beräknas med följande formel

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

där determinanten beräknas med kofaktorutveckling längs första raden,

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Skalär trippelprodukt

Den skalära trippelprodukten definieras som

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

Sats $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$ är linjärt beroende $\quad \Leftrightarrow \quad [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = 0$.

Bevis Vektorerna $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$ är linjärt beroende omm (om och endast om) de ligger i ett plan, vilket är detsamma som att parallellepipeden de spänner upp har volym noll, d.v.s. $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = 0$.

Avståndsproblem

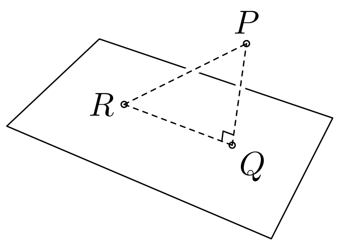
Problem

Bestäm det kortaste avståndet mellan en punkt/linje/plan och en punkt/linje/plan.

Gemensamt för alla dessa avståndsproblem är att det kortaste avståndet ges av det vinkelräta avståndet.

Låt oss visa detta för avståndsproblemet mellan en punkt P och ett plan.

Låt Q vara den punkt i planet som gör att vektorn $\overrightarrow{PQ}$ är vinkelrät mot planet och låt R vara någon punkt i planet.



PQR bildar då en rätvinklig triangel och Pythagoras sats ger att

$$\|\overrightarrow{PR}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 + \|\overrightarrow{QR}\|^2 \geq \|\overrightarrow{PQ}\|^2.$$

Detta visar att $\|\overrightarrow{PR}\| \geq \|\overrightarrow{PQ}\|$, d.v.s. att $\|\overrightarrow{PQ}\|$ är det kortaste avståndet.

De möjliga avståndsproblemen är

Avstånd mellan	punkt	linje	plan
punkt	1	2	3
linje		4	5
plan			6

Vi visar nu hur man löser varje typproblem.

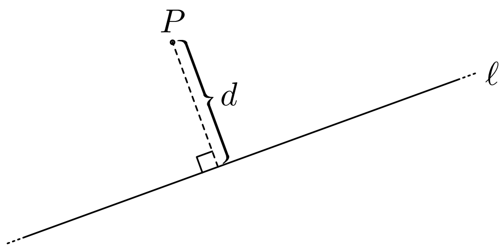
1. Punkt-punkt

Avståndet mellan punkterna $P = (p_1, p_2, p_3)$ och $Q = (q_1, q_2, q_3)$ ges av avståndsformeln

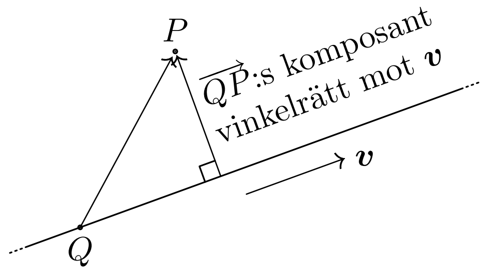
$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}.$$

2. Punkt-linje

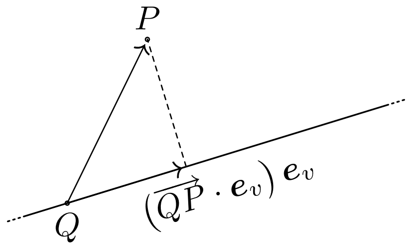
Avståndet mellan punkten P och linjen ℓ ges av det vinkelräta avståndet.



Tag en punkt Q på ℓ. Då ges avståndet av längden av vektorn $\overrightarrow{QP}$:s komposant vinkelrätt mot linjens riktning $\boldsymbol{v}$.



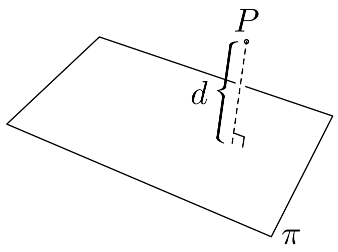
Vi får denna komposant som differensen mellan $\overrightarrow{QP}$ och $\overrightarrow{QP}$:s komposant i $\boldsymbol{v}$-riktningen,



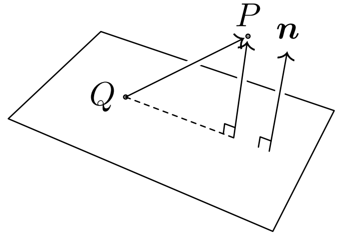
$$d = \|\overrightarrow{QP} - (\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{e}_v)\boldsymbol{e}_v\|.$$

3. Punkt-plan

Avståndet mellan punkten P och planet π ges av det vinkelräta avståndet.



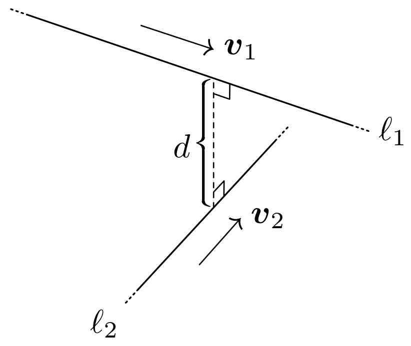
Tag en punkt Q på π. Då ges avståndet d av längden av vektorn $\overrightarrow{QP}$:s komposant i planets normalriktning $\boldsymbol{n}$.



$$d = \|(\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n\| = |\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{e}_n|.$$

4. Linje-linje

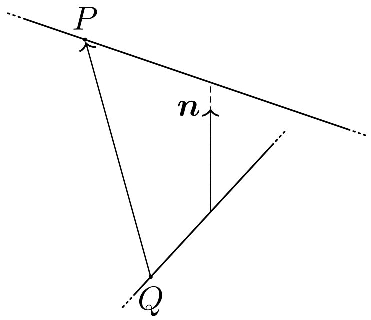
Avståndet mellan linjen ℓ_1 och linjen ℓ_2 ges av det vinkelräta avståndet.



Avståndsvektorn är parallell med vektorn

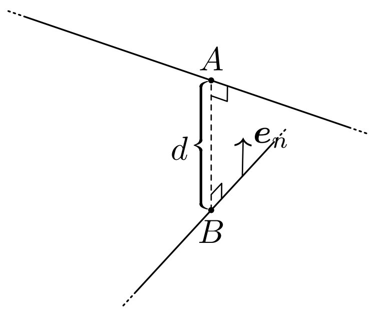
$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2,$$

som just är vinkelrät mot linjernas riktningar $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$. Tag en punkt P på ℓ_1 och en punkt Q på ℓ_2. Då ges avståndet d av längden av vektorn $\overrightarrow{QP}$:s komposant i $\boldsymbol{n}$-riktningen.

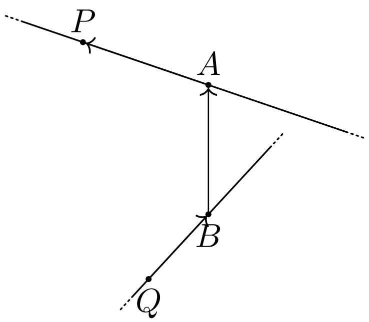


$$d = \|(\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n\| = |\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{e}_n|$$

Vi kan inse detta med följande resonemang. Låt A och B vara de punkter på respektive linje som ger det kortaste avståndet.



Då är $d = \|\overrightarrow{BA}\| = |\overrightarrow{BA} \cdot \boldsymbol{e}_n|$. Dela upp vektorn $\overrightarrow{QP}$ genom att gå via B och A.



$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}$$

Vi har nu att

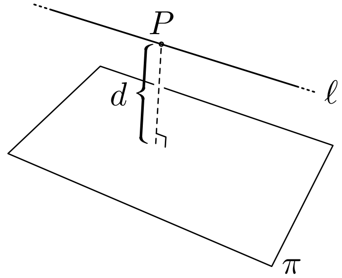
$$\begin{aligned} |\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{e}_n| &= |(\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}) \cdot \boldsymbol{e}_n| \\ &= \big|\, \overrightarrow{QB} \cdot \boldsymbol{e}_n + \overrightarrow{BA} \cdot \boldsymbol{e}_n + \overrightarrow{AP} \cdot \boldsymbol{e}_n \,\big| \end{aligned}$$

De gråfärgade termerna blir noll eftersom $\overrightarrow{QB}$ och $\overrightarrow{AP}$ är parallella med respektive linje och därmed vinkelrät mot $\boldsymbol{e}_n$.

$$= |0 + \overrightarrow{BA} \cdot \boldsymbol{e}_n + 0| = |\overrightarrow{BA} \cdot \boldsymbol{e}_n| = \|\overrightarrow{BA}\| = d.$$

5. Linje-plan

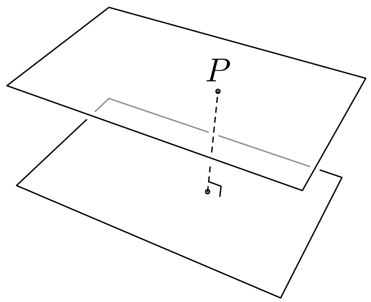
Linjen ℓ och planet π måste vara parallella för att problemet ska vara meningsfullt (annars skär de varandra och avståndet är noll). Tag en punkt P på linjen.



Då är avståndet mellan linjen och planet lika med avståndet mellan punkten P och planet. Detta är ett punkt-plan-problem (se fall 3).

6. Plan-plan

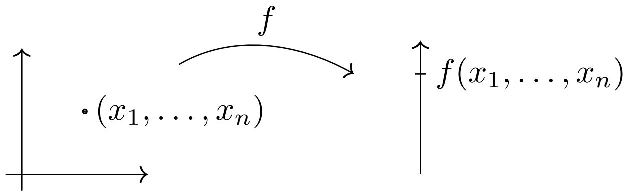
De två planen måste vara parallella för att problemet ska vara meningsfullt (annars skär de varandra och avståndet är noll). Tag en punkt P i det en planet.



Då är avståndet mellan planen lika med avståndet mellan punkten P och det andra planet. Detta är ett punkt-plan-problem (se fall 3).

Reellvärda funktioner

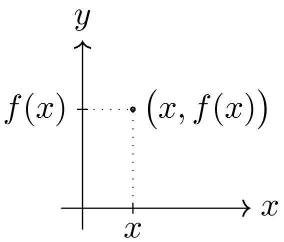
En funktion f som avbildar punkter $(x_1, \ldots, x_n)$ i $\boldsymbol{R}^n$ till värden i $\boldsymbol{R}$ kallas för en reellvärd funktion av n variabler, vilket brukar skrivas $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$.

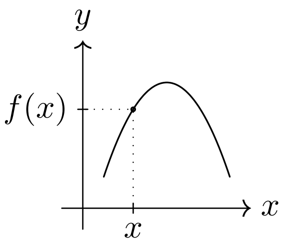


Funktionsgraf

$\boldsymbol{y = f(x)}$

För varje punkt x på x-axeln markerar vi punkten $\big(x, f(x)\big)$.

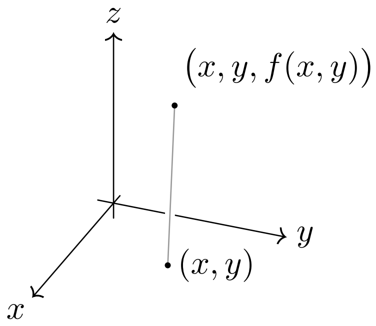


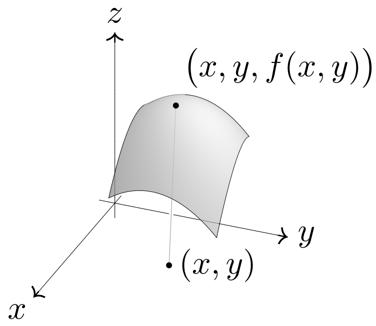


När detta görs för alla x i definitionsmängden uppstår en kurva som kallas för funktionen f:s graf.

$\boldsymbol{z = f(x, y)}$

För varje punkt (x, y) i x, y-planet markerar vi punkten $\big(x, y, f(x, y)\big)$.





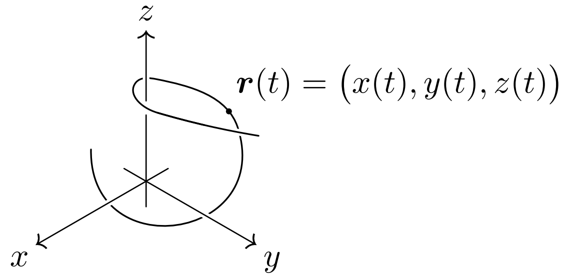
När detta görs för alla (x, y) i definitionsmängden uppstår en yta som kallas för funktionen f:s graf.

Parameterkurvor

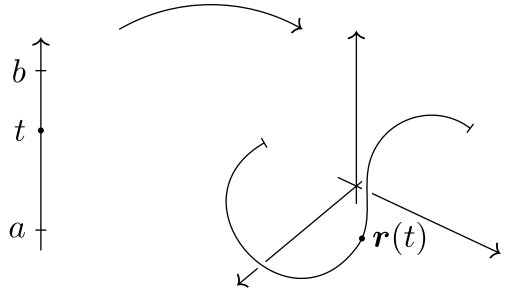
Uttrycket

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t) \\ x_2 &= x_2(t) \\ &\cdots \\ x_n &= x_n(t) \end{aligned} \qquad (a \le t \le b)$$

definierar en parameterkurva i $\boldsymbol{R}^n$. Varje t-värde ger en punkt $\boldsymbol{r}(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$ på kurvan.

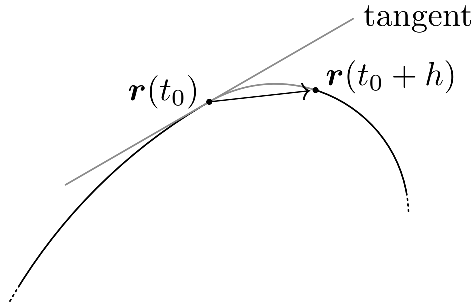


Parameterkurvan är alltså en funktion $t \mapsto \boldsymbol{r}(t)$ som avbildar t-värden i $\boldsymbol{r}$ till punkter på kurvan i $\boldsymbol{R}^n$.



Riktningsvektor

Om vi tar två parametervärden t_0 och $t_0 + h$ nära varandra så kommer vektorn mellan motsvarande punkter $\boldsymbol{r}(t_0)$ och $\boldsymbol{r}(t_0 + h)$ på kurvan, d.v.s. vektorn $\boldsymbol{r}(t_0+h)-\boldsymbol{r}(t_0)$, att ha en riktning som nästan är parallell med kurvans tangent i $\boldsymbol{r}(t_0)$.

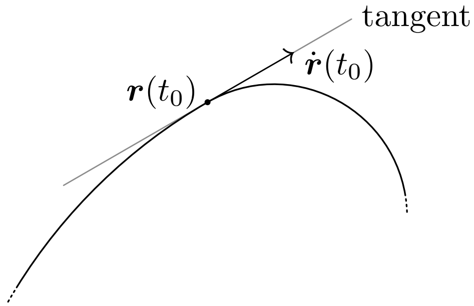


Låter vi $h \to 0$ kommer riktningen hos $\boldsymbol{r}(t_0 + h) - \boldsymbol{r}(t_0)$ att konvergera mot tangentens riktning.

Derivatavektorn

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t_0) = \big(\dot{x}_1(t_0), \ldots, \dot{x}_n(t_0)\big) = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_0 + h) - \boldsymbol{r}(t_0)}{h}$$

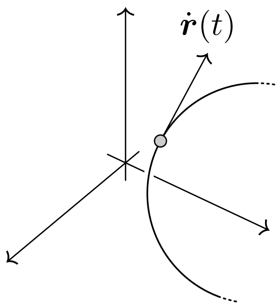
är därför en vektor som pekar i tangentens riktning i punkten $\boldsymbol{r}(t_0)$. Vektorn $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ kallas för kurvans riktningsvektor i punkten.



En mekanisk tolkning

Om en partikels läge beskrivs av parameterkurvan $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, där t är tiden, då är

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}}(t_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sträcka}}{\text{tid}} \\
&= \text{Partikelns hastighet vid tiden } t_0, \\
\|\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\| &= \text{Partikelns fart vid tiden } t.
\end{aligned}$$



Regulär kurva

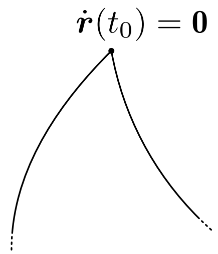
Löst uttryck är en regulär kurva en kurva som är slät och utan hörn.

För en parameterkurva $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ finns två typer av punkter där kurvan inte är regulär:

1. Punkter där derivatan $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ antingen inte existerar eller inte är kontinuerlig, och
2. punkter där $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0) = \boldsymbol{0}$.

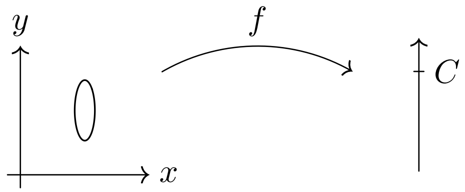
Dessa undantagspunkter kallas för singulära punkter.

Fall 2 svarar mot att parameterkurvan saktar ner och ”stannar upp” i punkten. Efter passagen kan kurvan fortsätta i en annan riktning utan att kurvan för den skull blir icke-deriverbar i punkten. Kurvan har då en s.k. spets i punkten.



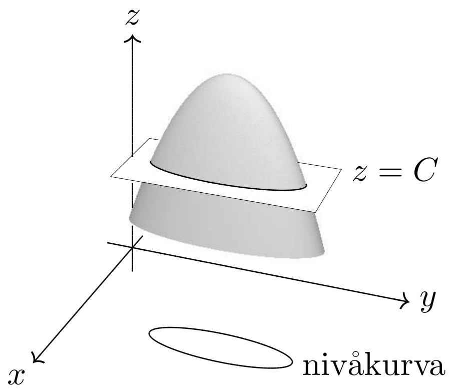
Nivåkurvor

Om vi har givet en funktion $f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ och betraktar alla punkter i $\boldsymbol{R}^2$ som avbildas på ett fixt värde C, så får vi vanligtvis en kurva i planet.



Alla punkter på kurvan har samma funktionsvärde C. Detta kallas för en nivåkurva.

Ritar vi upp funktionens graf så är nivåkurvan den kurva i x,y-planet ovanför vilken funktionsytan skär planet $z = C$.



Gränsvärde

Innan vi definierar gränsvärde för en funktion $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ repeterar vi definitionen av

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

när $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$.

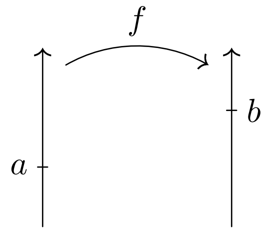
$\boldsymbol{f\colon R \to R}$

Med gränsvärdet

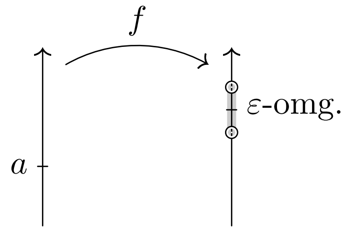
$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

menar vi intuitivt att när x närmar sig a så närmar sig $f(x)$ värdet b.

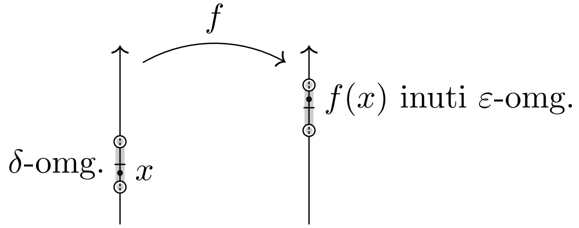
Funktionen f kan vi illustrera med figuren



Om vi väljer en ε-omgivning kring värdet b,



så ska det finnas en δ-omgivning kring a så att alla punkter (utom a) i δ-omgivningen avbildas inom ε-omgivningen av b.



Punkter δ-nära a avbildas alltså ε-nära b. När vi krymper ε måste vi givetvis välja δ mindre, men oavsett hur liten ε-omgivning vi väljer ska det alltid vara möjligt att hitta en sådan δ-omgivning.

Mera formellt lyder definitionen

För alla $\varepsilon > 0$ måste det finnas ett $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att

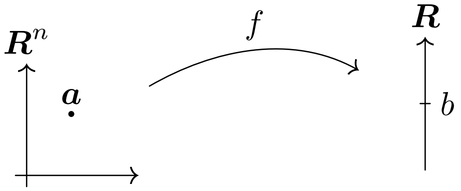
$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{för alla } x \neq a \text{ i intervallet } (a-\delta, a+\delta).$$

$f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$

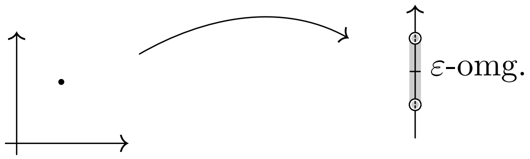
Om $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ så definierar vi gränsvärdet

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = b$$

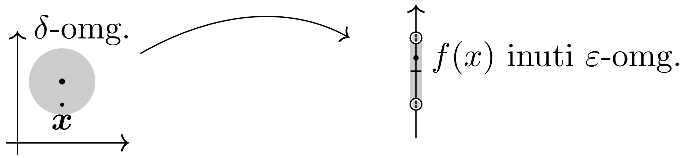
på ett liknande sätt.



Om vi väljer en ε-omgivning av värdet b,



så ska det finnas en δ-omgivning kring $\boldsymbol{a}$ så att alla punkter (utom $\boldsymbol{a}$) i δ-omgivningen avbildas inom ε-omgivningen av $\boldsymbol{b}$.



Oavsett hur litet $\varepsilon > 0$ är ska det finnas ett sådant $\delta > 0$.

Gränsvärdet definieras som:

För alla $\varepsilon > 0$ måste det finnas ett $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att

$$|f(\boldsymbol{x}) - b| < \varepsilon \quad \text{för alla } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a} \text{ som uppfyller } \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta.$$

Räkneregler

Om $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})$ och $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$ existerar, då är

1. $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \big(f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})\big) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) + \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$,
2. $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \big(f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})\big) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) - \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$,
3. $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) = \big(\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})\big) \cdot \big(\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})\big)$,
4. $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \dfrac{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})}{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})}, \qquad$ om $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x}) \neq 0$.

Instängningsprincipen

Om

$$f(\boldsymbol{x}) \le g(\boldsymbol{x}) \le h(\boldsymbol{x})$$

och $f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x}) \to b$ då $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, då gäller att

$$g(\boldsymbol{x}) \to b \quad \text{då } \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}.$$

Kontinuitet

En funktion $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ är kontinuerlig i punkten $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ om

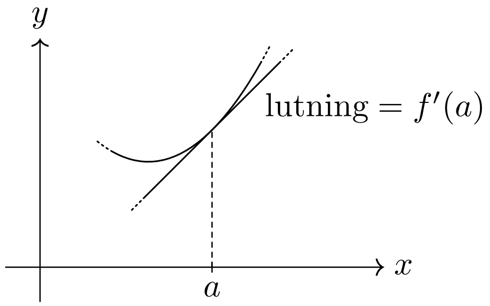
$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}).$$

Sats Funktioner uppbyggda av elementära funktioner är kontinuerliga.

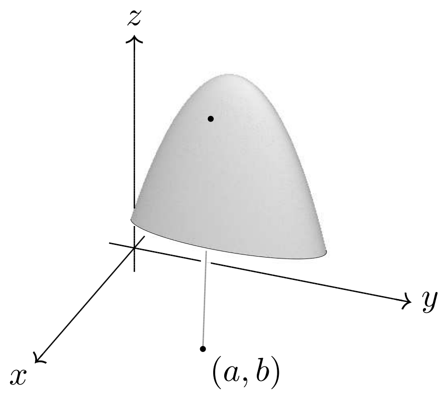
Partialderivata

Derivatan av en funktion $y = f(x)$ i en punkt $x = a$ mäter ändringstakten av f i punkten.

Ritar vi grafen till f är derivatan $f'(a)$ lutningen hos f:s tangentlinje i $x = a$.



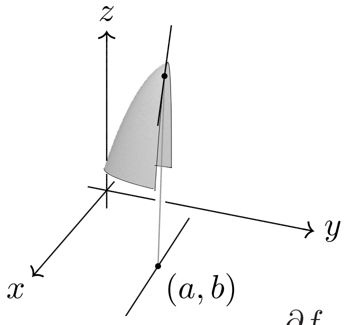
Betrakta vi nu en funktion $z = f(x, y)$ av två variabler så är den definierad i x, y-planet.



För att beskriva ändringstakten av f i en punkt (a, b) så behöver vi ange derivatan av f i två linjärt oberoende riktningar. Det är naturligt att välja dessa riktningar som x- och y-riktningarna.

Om vi håller y-variabeln fix och deriverar $f(x, y)$ med avseende på x, då får vi partialderivatan av f med avseende på x,

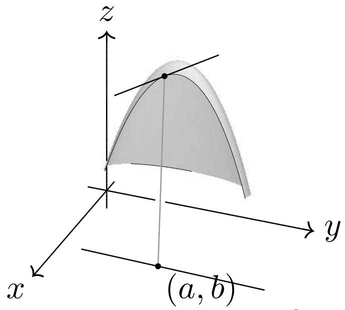
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}.$$



Tangentens lutning $= \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$

Om vi håller x-variabeln fix och deriverar $f(x, y)$ med avseende på y, då får vi partialderivatan av f med avseende på y,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}.$$



Tangentens lutning $= \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$

Har vi en funktion $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ av n variabler så definieras n st partialderivator i punkten $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$ som

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1+h, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h},$$
$$\dots$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n+h) - f(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)}{h}.$$

Olika beteckningar

Det finns andra beteckningar för partialderivatorna,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \text{skrivs även som } f'_x,\ D_x f,\ f'_1.$$

Högre ordningars partialderivator

Om partialderivatorna deriveras i sin tur får vi andraderivator

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big), \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big), \quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) \quad \text{och} \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big).$$

Dessa derivator betecknas mer kortfattat som

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \quad \text{respektive} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Alternativa beteckningar är

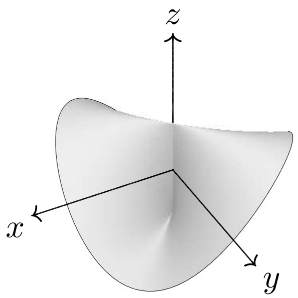
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = D_x\, D_y\, f = f''_{11},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = f''_{yx} = D_x\, D_y\, f = f''_{21} \quad \text{(notera ordningen hos indexen).}$$

Differentierbarhet

En funktion f är deriverbar i en punkt om dess partialderivator existerar i punkten.

Bara för att en funktion är deriverbar i en punkt så är det inte ett tecken på att funktionen är "regulär" i punkten. Exempelvis har funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-xy}{x^2+y^2}, & \text{om } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{om } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$



partialderivator i origo men funktionen är inte ens kontinuerlig där.

Ett bättre mått på en funktions regularitet är om funktionen är differentierbar. En funktion f är differentierbar i en punkt $\boldsymbol{p}$ om den lokalt kan beskrivas som en linjär funktion, d.v.s.

$$f(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{p}) + a_1 h_1 + \dots + a_n h_n + R(\boldsymbol{p},\boldsymbol{h})\|\boldsymbol{h}\|,$$

där resttermen uppfyller $\lim\limits_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} R(\boldsymbol{p},\boldsymbol{h}) = 0$.

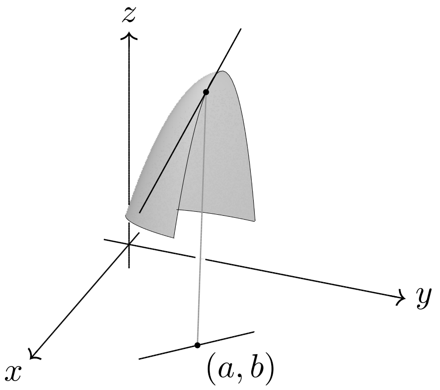
Sats Om alla partiella derivator av f är kontinuerliga en omgivning av en punkt, så är f differentierbar i omgivningen.

Sats Om en funktion ges av elementära uttryck, då är funktionen kontinuerlig i de punkter där den är definierad.

Riktningsderivata

Istället som för partialderivatorna mäta hur funktionen ändrar sig i axelparallella riktningar kan vi mäta f:s ändringstakt längs en linje med enhetsriktningen $\boldsymbol{v} = (c, d)$,

$$\boldsymbol{r}(t) = (a, b) + t\,(c, d),$$



d.v.s. betrakta

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + ch, b + dh) - f(a, b)}{h}.$$

Detta kallas för f:s riktningsderivata i riktningen $\boldsymbol{v}$.

Vektorn

$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big)$$

kallas för gradienten till f.

Sats Om f är differentierbar i punkten (a, b) och $\boldsymbol{v}$ är en enhetsvektor, då är

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \boldsymbol{v}.$$

Av ovanstående sats ser vi att riktningsderivatan är som störst då $\boldsymbol{v}$ pekar i samma riktning som ∇f. Gradienten ∇f är alltså den riktning i vilken funktionen växer mest.

Kedjeregeln

Kedjeregeln har det formella utseendet

Om $f(x_1, \ldots, x_n)$ och $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ är differentierbara funktioner, då är

$$\frac{d}{dt} f\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

Som ett exempel på kedjeregeln ska vi beräkna derivatan

$$\frac{d}{dx} \frac{e^{\arctan x}}{\sin x + \log \tan x}.$$

Vi kan förenkla uttrycket genom att införa deluttryck,

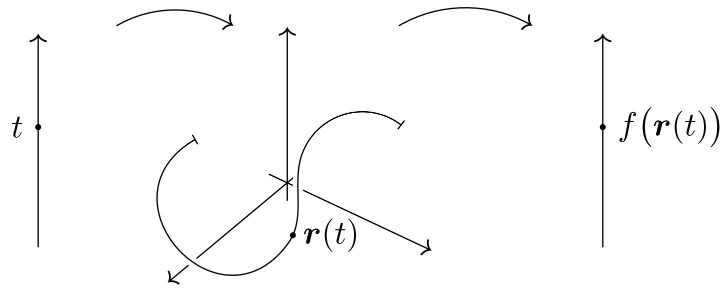
$$\frac{e^{\arctan x}}{\sin x + \log \tan x} = \frac{e^u}{\sin x + \log \tan x} = \frac{e^u}{v + \log \tan x} = \frac{e^u}{v + \log w},$$

där $u = \arctan x$, $v = \sin x$ och $w = \tan x$. Kedjeregeln ger nu att

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\,\frac{e^{\arctan x}}{\sin x + \log\tan x}
&= \frac{\partial}{\partial u}\,\frac{e^u}{v+\log w}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{e^u}{v+\log w}\cdot\frac{dv}{dx} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial w}\,\frac{e^u}{v+\log w}\cdot\frac{dw}{dx} \\
&= \frac{e^u}{v+\log w}\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{e^u}{(v+\log w)^2}\cdot\cos x \\
&\quad - \frac{e^u}{(v+\log w)^2}\cdot\frac{1}{w}\cdot\bigl(1+\tan^2 x\bigr) \\
&= \frac{e^{\arctan x}}{\sin x+\log\tan x}\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{e^{\arctan x}}{\bigl(\sin x+\log\tan x\bigr)^2}\cdot\cos x \\
&\quad - \frac{e^{\arctan x}}{\bigl(\sin x+\log\tan x\bigr)^2}\cdot\frac{1}{\tan x}\cdot\bigl(1+\tan^2 x\bigr).
\end{aligned}
$$

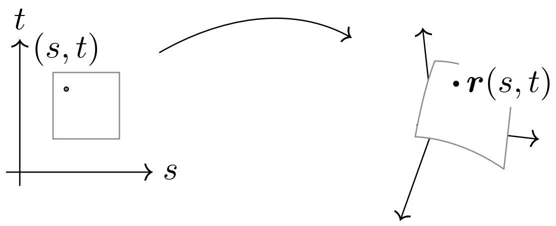
Vi kan också se kedjeregeln som en deriveringsregel för sammansatta funktioner.

Funktionen $\boldsymbol{r}(t) = \bigl(x_1(t),\dots,x_n(t)\bigr)$ är en funktion från $\boldsymbol{R}$ till $\boldsymbol{R}^n$ (parameterkurva) och $f(x_1,\dots,x_n)$ är en funktion från $\boldsymbol{R}^n$ till $\boldsymbol{R}$.



Parameterytor

En parameteryta är en funktion $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s,t)$ som avbildar parameterpunkter (s,t) i en 2-dimensionell parametermängd till en yta.



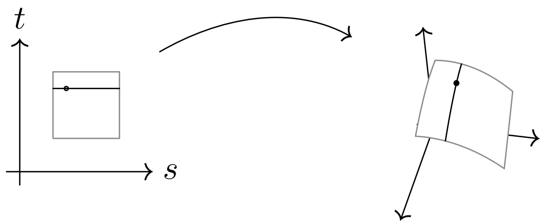
I koordinatform kan parameterytan skrivas som

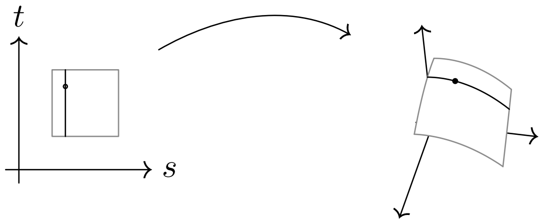
$$
\begin{aligned}
x &= x(s,t),\\
y &= y(s,t),\\
z &= z(s,t).
\end{aligned}
$$

Varje värde på s och t ger en punkt på ytan. När s och t varierar över parametermängden så varierar $\boldsymbol{r}(s,t)$ över ytan.

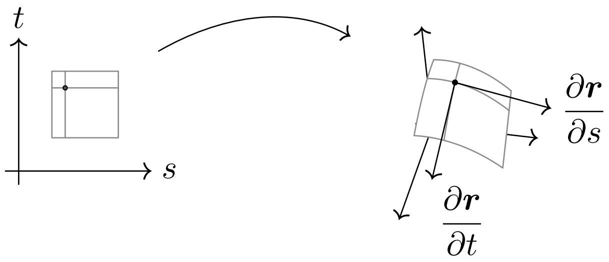
Normalvektor

Om vi i parametermängden låter (s,t) variera längs en axelparallell linje genom en punkt (s_0,t_0) så får vi en kurva som ligger på parameterytan och går genom punkten $\boldsymbol{r}(s_0,t_0)$.





I detta fall har vi alltså en parameterkurva eftersom vi endast tillåts variera en av parametrarna (vi har en funktion $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n$).



I ytan kommer derivatorna $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}(s_0, t_0)$ och $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(s_0, t_0)$ vara riktningsvektorer till respektive parameterkurva, d.v.s. derivatavektorerna är två vektorer parallella med ytan. En normalvektor till ytan blir därför

$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}.$$

Regulär parameteryta

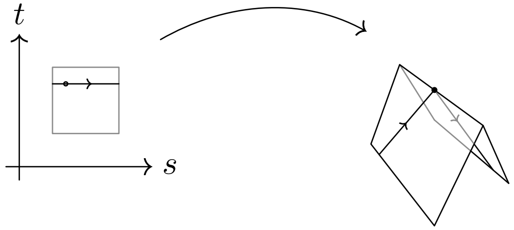
En regulär yta är en yta som är slät och saknar hörn och kanter.

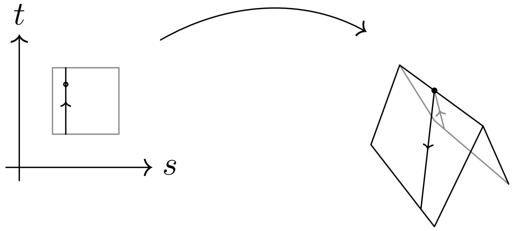
När vi har en parameteryta $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s, t)$ så finns det två typer av punkter där ytan inte är regulär:

1. Punkter där $\boldsymbol{r}$:s partialderivator inte existerar eller inte är kontinuerliga, och
2. punkter där normalvektorn $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} = \mathbf{0}$.

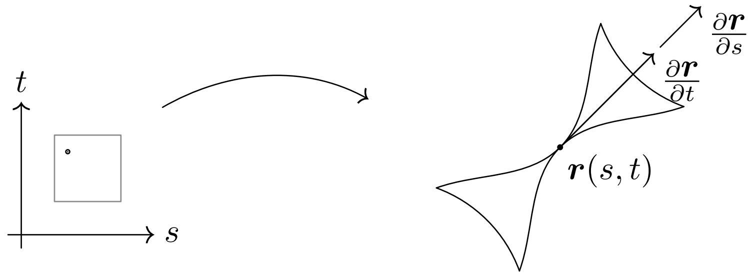
Sådana punkter kallas för singulära punkter till parameterytan.

När fall 2 inträffar kan det bero på att ytan har en kant eller hörn i punkten. Just i sådana punkter ändrar ytan plötsligt riktning och för att detta ska kunna ske utan att fall 1 inträffar så måste parametriseringen ”stanna upp” i punkten, d.v.s. åtminstone en av riktningsvektorerna $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}$ och $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}$ blir en nollvektor.





Det är också möjligt att tänka sig punkter där $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}$ och $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}$ blir linjärt beroende, d.v.s. parallella. I sådana punkter kan ytan vara degenererad.



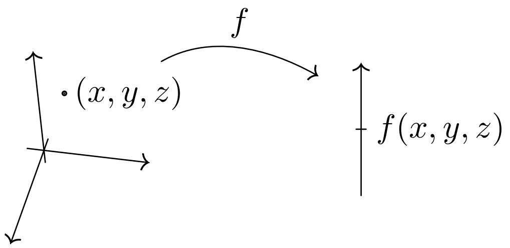
Det är alltså endast i punkter där $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}$ och $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}$ är linjärt oberoende, d.v.s.

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \neq \mathbf{0}$$

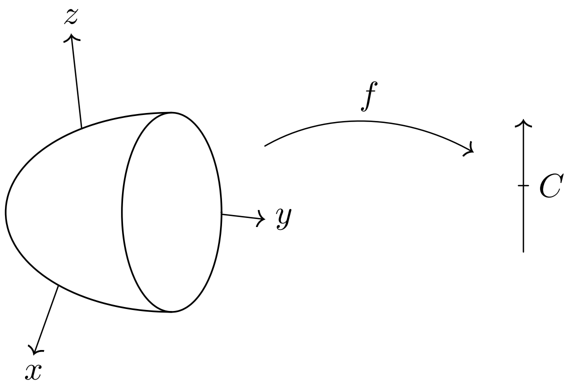
som vi kan garantera att ytan är regulär.

Nivåytor

Säg att vi har en funktion $f\colon \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, d.v.s. en reellvärd funktion av tre variabler.



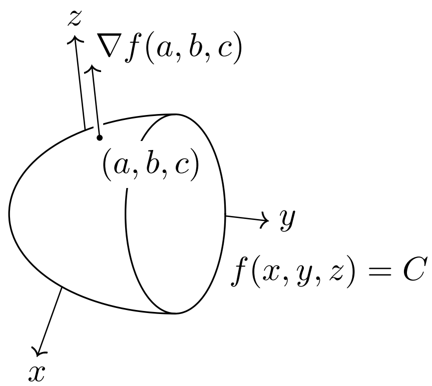
Om vi betraktar alla punkter (x, y, z) som avbildas på ett fixt värde C, så får vi vanligtvis en yta i rummet.



Alla punkter på denna yta har samma funktionsvärde C. Detta kallas för en nivåyta.

Gradient

Om vi har givet en nivåyta $f(x, y, z) = C$ som går genom punkten (a, b, c), då är gradienten $\nabla f(a, b, c)$ vinkelrät mot ytan i punkten (a, b, c).



Tar vi nämligen en riktning $\boldsymbol{v}$ som är parallell med nivåytan så är riktningsderivatan

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(a, b, c) = \nabla f(a, b, c) \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

eftersom f inte ändrar värde längs nivåytan. Detta visar att ∇f är vinkelrät mot nivåytan.

Regulär nivåyta

En regulär yta är en yta som är slät och saknar hörn och kanter.

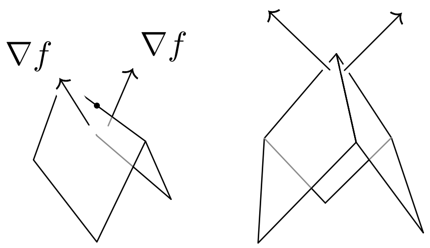
En nivåyta $f(x, y, z) = C$ har två typer av punkter där den inte är regulär:

1. Punkter där f:s partialderivator inte existerar eller inte är kontinuerliga, och

2. punkter där $\nabla f = \mathbf{0}$.

Sådana punkter kallas för singulära punkter till nivåytan.

Fall 2 inträffar i punkter där nivåytan har en kant eller hörn (och fall 1 inte inträffar). På olika sidor om punkten har då ytan en gradient som pekar i olika riktningar men eftersom ∇f är kontinuerlig måste $\nabla f = \mathbf{0}$ i punkten för att bevara kontinuiteten.



Matriser

En matris är en rektangulär tabell av tal,

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 17 \\ -4 & -3 & 2 \\ 14 & 4 & 0 \\ 6 & 100 & -2 \end{pmatrix}$$

Om matrisen har m rader och n kolumner så säger vi att matrisen har storlek $m \times n$.

Index

Vi indexerar elementen i matrisen genom att införa matrisen i ett koordinatsystem.

kolumn

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 17 \\ -4 & -3 & 2 \\ 14 & 4 & 0 \\ 6 & 100 & -2 \end{pmatrix}$$

rad

(i, j)-elementet är talet på rad i och kolumn j.

Matrisalgebra

Addition

Vi definierar summan av två matriser med samma storlek genom att summera matriserna komponentvis,

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & -3+(-4) \\ -1+0 & 7+5 \\ 0+1 & 5+1 \end{pmatrix}.$$

Subtraktion

Differensen av två lika stora matriser är den komponentvisa differensen,

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-0 & -3-(-4) \\ -1-0 & 7-5 \\ 0-1 & 5-1 \end{pmatrix}.$$

Multiplikation med skalär

När vi multiplicerar en matris med ett tal multiplicerar vi varje element i matrisen med talet,

$$3\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 4 & 3\cdot(-3) \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 7 \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 5 \end{pmatrix}.$$

Räkneregler

Eftersom vi definierat räkneoperationerna komponentvis ärver vi samma räkneregler från de reella talen.

Om A, B är matriser och a, b är skalärer, då gäller att

Kommutativa lagen $\quad A + B = B + A$

Associativa lagen $\quad A + (B + C) = (A + B) + C$

Distributiva lagar

$$\begin{aligned} a(A + B) &= aA + aB \\ (a + b)A &= aA + bA \\ a(bA) &= (ab)A \\ a(AB) &= (aA)B = A(aB) \end{aligned}$$

Matrismultiplikation

Produkt av en rad med en kolumn

Vi ska införa en speciell produkt för uttryck av typen

$$ax + by + cz,$$

genom att definiera

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z.$$

Med denna produkt separerar vi naturligt koefficienterna a, b, c och variablerna x, y, z i två faktorer.

För uttryck av typen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

inför vi motsvarande produkt

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Produkt av rader med en kolumn

Ofta har vi, t.ex. i ekvationssystem, flera uttryck med samma variabler men olika koefficienter,

$$\begin{aligned} &ax + by + cz, \\ &dx + ey + fz. \end{aligned}$$

Genom att vi i den tidigare produkten skrev koefficienterna som en rad kan vi införa ett kompakt beteckningssätt för ovanstående uttryck genom att stapla koefficienterna på höjden,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z \\ d \cdot x + e \cdot y + f \cdot z \end{pmatrix}$$

I denna utvidgade produkt verkar alltså raderna i den vänstra matrisfaktorn oberoende av varandra.

Mer allmänt låter vi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

betyda

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Produkt av rader med kolumner

Det förekommer också att koefficienterna är desamma, men att variablerna är olika. Exempelvis gäller detta när vi har samma ekvationssystem men olika högerled,

$$\begin{aligned} ax+by+cz&=g\\ dx+ey+fz&=h \end{aligned} \qquad \text{och} \qquad \begin{aligned} au+bv+cw&=i\\ du+ev+fw&=j \end{aligned}$$

Ekvationerna kan då skrivas som

$$\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g\\ h \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u\\ v\\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i\\ j \end{pmatrix}.$$

Ett sådant system av ekvationssystem kan vi sammanfatta genom att i sidled rada upp kolumnerna,

$$\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u\\ y & v\\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g & i\\ h & j \end{pmatrix},$$

och med detta skrivsätt mena att raderna i den vänstra matrisen multipliceras med kolumnerna i den högra matrisfaktorn,

$$\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u\\ y & v\\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by+cz & au+bv+cw\\ dx+ey+fz & du+ev+fw \end{pmatrix}.$$

Räkneregler

Om A, B, C är matriser och a är en skalär, då gäller att

Associativa lagen	$A(BC)=(AB)C$
Distributiva lagar	$A(B+C)=AB+AC$ $(B+C)A=BA+CA$
Potenser	$A^n=A\cdot A\cdots A$ (n faktorer) $A^{m+n}=A^mA^n$ $(A^m)^n=A^{mn}$

Obs! $AB\neq BA$ i allmänhet!

Transponat

Transponatet A^t av en matris A är den matris vi får när vi i matrisen A låter rader bli kolumner

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10\\ 2 & 5 & 8 & 11\\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Om matrisen A har storleken $m\times n$ så har alltså A^t storleken $n\times m$.

Räkneregler

Om A, B är matriser och a är en skalär, då gäller att

$$\begin{aligned} A^{tt}&=A\\ (A+B)^t&=A^t+B^t\\ (aA)^t&=aA^t\\ (AB)^t&=B^tA^t \end{aligned}$$

Några speciella matriser

Nollmatris

Nollmatrisen som bara består av nollor,

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

fungerar som 0:a i matrisalgebran,

$$A + O = A.$$

Enhetsmatrisen

Enhetsmatrisen med ettor på diagonalen och nollor annars,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

fungerar som 1:a i matrisalgebran,

$$EA = AE = A.$$

Inversmatris

Inversen till en matris A är en matris B som uppfyller

$$AB = BA = E,$$

och betecknas A^{-1}.

Inverser finns bara till kvadratiska matriser, men inte till alla kvadratiska matriser.

Triangulär matris

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Övertriangulär, eller högertriangulär

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Undertriangulär, eller vänstertriangulär

Diagonalmatris

En kvadratisk matris med nollelement utanför diagonalen,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kallas för en diagonalmatris.

Symmetrisk matris

En kvadratisk matris är symmetrisk om spegelbilderna av elementen i diagonalen är lika

$$\begin{pmatrix} 3 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & \boxed{0} \\ 1 & 4 & -1 \\ \boxed{0} & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \boxed{-1} \\ 0 & \boxed{-1} & 2 \end{pmatrix}$$

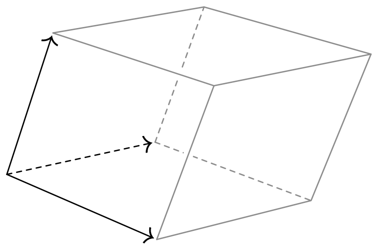
Matematiskt uttryckt är en matris A symmetrisk om $A^t = A$.

Determinant av ordning n

Vektorerna

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \\ \boldsymbol{a}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \\ &\vdots \\ \boldsymbol{a}_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}), \end{aligned}$$

spänner upp en hyperparallellepiped i rummet $\boldsymbol{R}^n$.



Exempel när $n = 3$

Volymen av denna parallellepiped är beloppet av determinanten

$$\begin{vmatrix} \text{——} & \boldsymbol{a}_1 & \text{——} \\ \text{——} & \boldsymbol{a}_2 & \text{——} \\ & \vdots & \\ \text{——} & \boldsymbol{a}_n & \text{——} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Vi ska inte gå in på hur man egentligen definierar volym i $\boldsymbol{R}^n$.

Sarrus regel

Sarrus regel är en minnesregel för beräkning av 3×3-determinanter.

Vi placerar de två första kolumnerna till höger om determinanten

$$\left|\begin{matrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{matrix}$$

och ritar ut höger- och vänsterdiagonaler,

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 7 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 3 & 6 \end{matrix}$$

Determinantens värde får vi genom att lägga ihop högerdiagonalprodukterna och dra ifrån vänsterdiagonalprodukterna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1 & 4 & 7 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 3 & 6 \\ - & - & -\ + & + & + \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 6 \\ &\quad - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 6 \cdot 8 \cdot 1 - 9 \cdot 2 \cdot 4 = 0. \end{aligned}$$

Observera att denna regel endast gäller för 3×3-determinanter.

Kofaktorutveckling

Vi kan beräkna en determinant genom kofaktorutveckling längs en rad eller en kolumn. Vi illustrerar med ett exempel,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -14 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 9 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}.$$

Utveckling längs en rad

Vi väljer en rad i determinanten (vilken som helst), t.ex. rad 3,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -14 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 9 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

Varje element i raden ger upphov till en term i utvecklingen.

Termen som svarar mot det första elementet -1 får vi som elementet gånger motsvarande minor, d.v.s. determinanten av de tal som återstår när vi stryker den rad och kolumn elementet befinner sig i.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -14 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 9 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = +(-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 & -14 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \cdots$$

Termen har också ett tecken som ges av motsvarande element i följande teckenmatris

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ \boxed{+} & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Alternerande teckenmatris

Nästa term i utvecklingen bildas på motsvarande sätt

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -14 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 9 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= +(-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 & -14 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} - 9\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 & -14 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

där vi nu har ett minustecken i teckenmatrisen

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & \boxed{-} & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

De andra två elementen på raden ger de två sista termerna i utvecklingen

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -14 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 9 & \boxed{4} & \boxed{-3} \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= +(-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 & -14 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} - 9\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 & -14 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+\ 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 & -14 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} - (-3)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

Utveckling längs en kolumn

Kofaktorutveckling längs en kolumn går till på samma sätt som för en rad. Vi väljer en kolumn i matrisen, t.ex. kolumn 2,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -14 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 9 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}.$$

Varje element i kolumnen ger en term i utvecklingen.

Den första termen är det första elementet gånger motsvarande minor. Tecknet framför termen får vi från motsvarande element i teckenmatrisen

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Den första termen är alltså

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -14 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 9 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \cdots$$

Övriga element i kolumnen ger resten av termerna,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -14 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 9 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} &= -4 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} \\ &\quad + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & -14 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & -14 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} \\ &\quad + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & -14 \\ 6 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Elementära radoperationer

Det finns tre elementära radoperationer.

1. Multiplicera en rad med en nollskild konstant.

$$\text{Före:}\quad \begin{pmatrix} \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ \\ \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ 2 \\ \\ \end{array}$$

$$\text{Efter:}\quad \begin{pmatrix} \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & 2\cdot 5 \\ \\ \end{pmatrix}$$

2. Addera en multipel av en rad till en annan rad.

$$\text{Före:}\quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{array}{c} -2 \\ \\ \end{array}$$

$$\text{Efter:}\quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6-2\cdot 2 & 7-2\cdot 3 & 8-2\cdot 4 & 9-2\cdot 5 \end{pmatrix}$$

3. Byta plats på två rader.

$$\text{Före:}\quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Efter:}\quad \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Determinantberäkning med radoperationer

Om vi utför en elementär radoperation på en matris så ändras dess determinants värde enligt följande regler:

1. $|A| = |A|$,
2. $|A| = \frac{1}{a}|A\, a|$, $\quad$ (där $a \neq 0$),
3. $|A| = -|A|$.

Strategin är att vi med radoperationer omvandlar matrisen till en matris vars determinant är enkel att beräkna, t.ex. en triangulär matris.

Sats
$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & t_{nn} \end{vmatrix} = t_{11}t_{22}\cdots t_{nn}.$$

Bevis Kofaktorutveckla hela tiden första kolumnen,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & t_{nn} \end{vmatrix} &= t_{11}\begin{vmatrix} t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & t_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \cdots + 0 \\ &= t_{11}t_{22}\begin{vmatrix} t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & t_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \cdots + 0 \\ &= \quad \text{o.s.v.} \quad = t_{11}t_{22}\cdots t_{nn}. \end{aligned}$$

Vi illustrerar med ett exempel,

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & -9 & -13 \end{vmatrix}.$$

Först byter vi plats på rad 1 och 2 för att få ett nollskilt tal i position $(1,1)$. Detta steg gör att determinanten byter tecken,

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & -9 & -13 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & -9 & -13 \end{vmatrix}.$$

Sedan vill vi ha nollor under $(1,1)$-elementet, och det får vi genom att addera 1 gånger första raden till tredje raden,

$$-\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & -9 & -13 \end{vmatrix} + = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3+3 & -9+1 & -13+(-2) \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & -8 & -15 \end{vmatrix}.$$

Denna radoperation ändrade inte determinantens värde.

Sen flyttar vi uppmärksamheten till diagonalelementet $(2,2)$. För att få en nolla under 4:an adderar vi 2 gånger andra raden till tredje raden,

$$-\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & -8 & -15 \end{vmatrix} 2 = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0+2\cdot 0 & -8+2\cdot 4 & -15+2\cdot 7 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Notera att eftersom vi hade en 0:a i andra radens första kolumn så påverkade inte denna radoperation den första kolumnen. Vi lyckades alltså behålla den kolumnen intakt.

Vi har nu en triangulär determinant vars värde är produkten av diagonalelementen,

$$-\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3\cdot 4\cdot(-1) = 12.$$

Determinantregler

Om A och B är $n \times n$-matriser, och a är en skalär, då gäller att

1. $\det(aA) = a^n \det A$,
2. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$,
3. $\det(A^t) = \det A$,
4. $\det(A^{-1}) = \big(\det A\big)^{-1}$.

Eftersom radoperationer blir kolumnoperationer när vi transponerar en matris ger $\det A = \det A^t$ följande regler för kolumnoperationer

- $|A| = |A|$,
- $|A| = \frac{1}{a}|A|$,
- $|A| = -|A|$.

Adjunktformeln

Vi ska härleda en allmän formel för inversen till en matris A. Denna formel kallas för adjunktformeln.

3×3-fallet

Kofaktorutveckla determinanten av matrisen A längs första kolumnen,

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= +a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Detta uttryck kan vi se som en produkt av en rad och en kolumn,

$$= \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\right)\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Betrakta nu determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

som har värdet noll eftersom de två första kolumnerna är lika. Kofaktorutveckling längs första kolumnen ger

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\qquad = +a_{12}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Detta uttryck kan vi skriva som

$$= \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\right)\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Notera att vi har samma radvektor som i (1).

Betrakta sen nolldeterminanten

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(första och tredje kolumnen lika) och kofaktorutveckla första kolumnen

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&\qquad = +a_{13}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&\qquad = \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\right)\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Eftersom vi har samma radvektor i (1), (2) och (3) kan vi rada upp kolumnvektorerna och sammanfatta de tre sambanden som

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\right)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Om vi istället kofaktorutvecklar $\det A$ längs den andra kolumnen och genomför ett liknande resonemang får vi sambanden

$$\begin{aligned}
&\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\right)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} 0 & \det A & 0 \end{pmatrix}. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Kofaktorutveckling av $\det A$ längs den tredje kolumnen ger slutligen följande tre samband

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \det A \end{pmatrix}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Vad (4), (5) och (6) har gemensamt är den andra faktorn A i vänsterledet. Med matrisprodukten kan vi sammanfatta alla dessa samband genom att stapla radvektorerna på varandra,

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}
+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\
+\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Genom att stuva om detta uttryck något och införa följande beteckning för minorerna

$$\begin{aligned} M_{ij} = {}& \text{determinanten av } A \text{ med rad } i \\ & \text{och kolumn } j \text{ borttagna.} \end{aligned}$$

har vi att

$$\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{21} & +M_{31} \\ -M_{12} & +M_{22} & -M_{32} \\ +M_{13} & -M_{23} & +M_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \quad A \quad \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \quad E \quad \\ \\ \end{pmatrix}.$$

Genomför vi sen hela detta resonemang med med radutveckling istället så fås

$$\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{21} & +M_{31} \\ -M_{12} & +M_{22} & -M_{32} \\ +M_{13} & -M_{23} & +M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & E & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Matrisen av minorer (även kallad adjunktmatrisen) delat med $\det A$ är alltså inversmatrisen till A. Lite mer minnesvänligt brukar man skriva

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{pmatrix}^T.$$

Allmänt fall

För en $n \times n$-matris A med $\det A \neq 0$ ges inversen av formeln

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} +M_{11} & \cdots & (-1)^{n+1} M_{1n} \\ -M_{21} & \cdots & (-1)^{n+2} M_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} M_{n1} & \cdots & (-1)^{n+n} M_{nn} \end{pmatrix}^T.$$

Sats A inverterbar $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

Bevis $\Rightarrow$ Om A är inverterbar ger determinantreglerna att

$$1 = \det E = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$$
$$\Rightarrow \quad \det A \neq 0.$$

$\Leftarrow$ Om $\det A \neq 0$ så ger adjunktformeln A^{-1}, som därmed existerar.

Linjära ekvationssystem

Ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{aligned} 3x - 4y + 7z - 3u &= 3, \\ 2x + y \phantom{{}+7z} + 4u &= 2, \end{aligned}$$

kan vi med matrisprodukten skriva som

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eller mer symboliskt

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Vi ska presentera tre metoder för att lösa linjära ekvationssystem varav de två första bara fungerar om koefficientmatrisen A är kvadratisk och inverterbar.

Inversmultiplikation

Vi vänstermultiplicerar ekvationen $Ax = b$ med A^{-1},

$$\begin{aligned} A^{-1}Ax = A^{-1}b \quad &\Leftrightarrow \quad Ex = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow \quad x = A^{-1}b. \end{aligned}$$

Inversen A^{-1} får vi från adjunktformeln.

Cramers regel

Systemet $Ax = b$, där A inverterbar, har lösningen

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad \text{för } i = 1, 2, \ldots, n,$$

där A_i är matrisen A med kolumn i ersatt med högerledet b.

Bevis

$x_i \cdot \det A$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,i-1} & a_{1i}x_i & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,i-1} & a_{2i}x_i & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,i-1} & a_{ni}x_i & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$x_1 \qquad x_{i-1} \qquad x_{i+1} \qquad x_n$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,i-1} & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,i-1} & a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,i-1} & a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A_i$$

Gausselimination

Vi ska använda elementära radoperationer och stegvis förenkla ekvationssystemet tills vi direkt kan avläsa lösningen. Den viktiga observation som ligger bakom denna metod är att en radoperation inte ändrar systemets lösningsmängd.

Strategin vid gausselimination liknar den vi använde vid determinantberäkning med radoperationer. Vi illustrerar med ett exempel,

$$\begin{aligned} 2y + 2z &= 8, \\ x + 6y - 2z &= 27, \\ -2x - 13y + 4z &= -57. \end{aligned}$$

För att uträkningen ska bli kompaktare och tydligare brukar man skriva systemet som en matris

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & 6 & -2 & 27 \\ -2 & -13 & 4 & -57 \end{array}\right)$$

I matrisen har vi rensat bort all överflödig information och bara behållt variabelkoefficienterna och högerledet.

Först ser vi till att få en 1:a i övre vänstra hörnet, t.ex. genom att byta plats på första och andra raden.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & 6 & -2 & 27 \\ -2 & -13 & 4 & -57 \end{array}\right)$$

Sedan ser vi till att vi får nollor under denna 1:a genom att addera 2 gånger första raden till tredje raden (i den andra raden har vi redan en nolla).

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -2 & 27 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ -2 & -13 & 4 & -57 \end{array}\right) 2 \quad \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -2 & 27 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ -2+2\cdot 1 & -13+2\cdot 6 & 4+2\cdot(-2) & -57+2\cdot 27 \end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -2 & 27 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right)
$$

Vi går sedan vidare till nästa diagonalelement $(2,2)$. Vi multiplicerar raden med $\frac{1}{2}$ för att få en 1:a,

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -2 & 27 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \tfrac{1}{2} \quad \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -2 & 27 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right)
$$

Vi adderar andra raden till tredje raden och adderar -6 gånger andra raden till första raden för att få nollor över och under 1:an.

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -2 & 27 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) + \;\; -6 \quad \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

Det sista steget är att vi ser till att få nollor ovanför det tredje diagonalelementet.

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) - \;\; 8 \quad \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

Nu är det bara att avläsa lösningen från sluttablån

$$
x = 11, \quad y = 3, \quad \text{och} \quad z = 1.
$$

Jacobis metod för matrisinvers

Sats $(A\cdot B)\text{♀} = (A\text{♀})\cdot B$
$(A\cdot B)\text{@} = (A\text{@})\cdot B$
$(A\cdot B)\text{⤸} = (A\text{⤸})\cdot B$

Antag att A är inverterbar. Utför radoperationer som tar A till enhetsmatrisen E,

$$A\,\text{♀}\circ\text{⤸}\cdots\text{♀} = E.$$

Utför samma radoperationer på E,

$$\begin{aligned} E\,\text{♀}\circ\text{⤸}\cdots\text{♀} &= (A\cdot A^{-1})\text{♀}\circ\text{⤸}\cdots\text{♀} \\ &= (A\,\text{♀}\circ\text{⤸}\cdots\text{♀})\cdot A^{-1} \\ &= E\cdot A^{-1} = A^{-1}. \end{aligned}$$

Ställer vi alltså upp A och E bredvid varandra och utför samma radoperationer på båda matriserna har vi räkneschemat

$$(A \mid E) \sim \cdots \sim (E \mid A^{-1}).$$

Om matrisen A inte är inverterbar går den inte att radreducera till E.

Andra räkneschema

$$\begin{gathered} (A \mid B) \sim \cdots \sim (E \mid A^{-1}B) \\ (A^t \mid B^t) \sim \cdots \sim \big(E \mid (BA^{-1})^t\big) \end{gathered}$$