Avsnitt 5, Differentialkalkyl II

401 Avgör om funktionen $\boldsymbol{f}$ respektive $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{h}$ är linjär. Om så är fallet, ange funktionens matris (t betyder transponering).

a) $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$,

c) $\boldsymbol{f}(x,y) = (2x+y, y-x)^t$,

e) $\boldsymbol{f}(x,y) = (x^2+y, x+y)^t$,

g) $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{h}$, där $\boldsymbol{g}(x,y) = (x+y, y-x)^t$ och $\boldsymbol{h}(u,v) = (u-v, u+v)^t$.

En funktion $\boldsymbol{f}(x_1,\ldots,x_n)$ från $\boldsymbol{R}^n$ till $\boldsymbol{R}^m$ är linjär om den kan skrivas i formen

$$\boldsymbol{f}(x_1,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix},$$

där a_{ij}:na är konstanta koefficienter. Vi kan sen skriva funktionen $\boldsymbol{f}$ som en matrisprodukt mellan koefficienterna a_{ij} och variablerna x_j,

$$\boldsymbol{f}(x_1,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Koefficientmatrisen kallas för funktionen $\boldsymbol{f}$:s matris.

a) I detta fall är f en funktion av tre variabler x, y och z, och ger reella tal som funktionsvärden, d.v.s. f är en funktion från $\boldsymbol{R}^3$ till $\boldsymbol{R}$. Funktionen f är en linjär funktion eftersom den just är en linjärkombination av variablerna,

$$f(x,y,z) = (x + 2y + 3z).$$

Med matriser kan f skrivas som

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

där 1×3-matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ är f:s matris.

c) Funktionen $\boldsymbol{f}$ beror av två variabler x och y, och ger funktionsvärden i $\boldsymbol{R}^2$. Vi har alltså en funktion från $\boldsymbol{R}^2$ till $\boldsymbol{R}^2$. Eftersom $\boldsymbol{f}$:s båda komponenter

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ -x+y \end{pmatrix}$$

är linjärkombinationer av x och y är $\boldsymbol{f}$ en linjär funktion. I matrisform kan $\boldsymbol{f}$ skrivas som

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{f}$:s matris är alltså $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

e) Funktionen $\boldsymbol{f}$, som är en funktion från $\boldsymbol{R}^2$ till $\boldsymbol{R}^2$, är inte linjär eftersom dess första komponent innehåller x^2.

g) Både $\boldsymbol{g}$ och $\boldsymbol{h}$ är funktioner från $\boldsymbol{R}^2$ till $\boldsymbol{R}^2$. De är också linjära funktioner eftersom deras komponenter är linjärkombinationer av variablerna,

$$\boldsymbol{g}(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{h}(u,v) = \begin{pmatrix} u-v \\ u+v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Sammansättningen $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{h}$ blir då en linjär funktion som har $\boldsymbol{g}$:s matris multiplicerat med $\boldsymbol{h}$:s matris som matris,

$$\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{h}(u,v) = \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{h}(u,v)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(u,v) \\ h_2(u,v) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

d.v.s. $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{h}$ har matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notera ordningen i matrisprodukten. Eftersom $\boldsymbol{h}$ utförs först i sammansättningen $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{h}$ hamnar $\boldsymbol{h}$:s matris längst till höger.

405 Bestäm Jacobimatriserna till följande funktioner

a) $\boldsymbol{f}(x,y) = (2x+y, 3x+2y)$,

c) $\boldsymbol{f}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, och

e) $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x+2y+3z, xyz)$ i punkten $(x,y,z) = (1,2,3)$.

a) Vi skriver först om funktionen $\boldsymbol{f}$ i kolumnform

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 3x+2y \end{pmatrix},$$

där vi infört f_1 och f_2 som beteckningar för $\boldsymbol{f}$:s komponenter. Eftersom $\boldsymbol{f}$ är en funktion från $\boldsymbol{R}^2$ till $\boldsymbol{R}^2$ har den 2×2-matrisen

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

som Jacobimatris. Partialderivatorna är

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x+y) = 2, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x+y) = 1,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x+2y) = 3, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x+2y) = 2.$$

Alltså är Jacobimatrisen

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Funktionen $\boldsymbol{f}$ beskriver en parameterkurva i $\boldsymbol{R}^3$, men är samtidigt en funktion från $\boldsymbol{R}$ till $\boldsymbol{R}^3$,

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}.$$

Jacobimatrisen till $\boldsymbol{f}$ är 3×1-matrisen

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial t} \\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial t} \\[2mm] \dfrac{\partial f_3}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial t}\cos t \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial t}\sin t \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial t}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notera att Jacobimatrisen är lika med kurvans riktningsvektor (fast i kolumnform).

e) Jacobimatrisen till funktionen

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ xyz \end{pmatrix}$$

är 2×3-matrisen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y,z)} &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(x+2y+3z) & \dfrac{\partial}{\partial y}(x+2y+3z) & \dfrac{\partial}{\partial z}(x+2y+3z) \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial x}(xyz) & \dfrac{\partial}{\partial y}(xyz) & \dfrac{\partial}{\partial z}(xyz) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

I punkten $(1,2,3)$ har Jacobimatrisen värdet

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y,z)}(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2\cdot 3 & 1\cdot 3 & 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Anm. I närheten av punkten $(1,2,3)$ har alltså $\boldsymbol{f}$ den linjära approximationen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}(1+h_1, 2+h_2, 3+h_3) &= \boldsymbol{f}(1,2,3) + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y,z)}(1,2,3)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} + O(\|\boldsymbol{h}\|)^2 \\ &= \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} + O(\|\boldsymbol{h}\|)^2. \end{aligned}$$

407 Bestäm Jacobimatriserna till funktionerna

a) $x = r\cos v,$
$y = r\sin v,$

b) $x = u - 2v + 3w,$
$y = 2u - w.$

a) Vi har en funktion som tar två tal r och v, och ger två värden x och y, d.v.s. en funktion från $\boldsymbol{R}^2$ till $\boldsymbol{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r,v) \\ y(r,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos v \\ r\sin v \end{pmatrix}.$$

Jacobimatrisen till denna funktion ges av 2×2-matrisen

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r}(r\cos v) & \dfrac{\partial}{\partial v}(r\cos v) \\ \dfrac{\partial}{\partial r}(r\sin v) & \dfrac{\partial}{\partial v}(r\sin v) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos v & -r\sin v \\ \sin v & r\cos v \end{pmatrix}.$$

b) Funktionen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - 2v + 3w \\ 2u - w \end{pmatrix}$$

går från $\boldsymbol{R}^3$ till $\boldsymbol{R}^2$ och har Jacobimatrisen

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v,w)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u}(u-2v+3w) & \dfrac{\partial}{\partial v}(u-2v+3w) & \dfrac{\partial}{\partial w}(u-2v+3w) \\ \dfrac{\partial}{\partial u}(2u-w) & \dfrac{\partial}{\partial v}(2u-w) & \dfrac{\partial}{\partial w}(2u-w) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

408 Bestäm Jacobimatriserna till

c) sammansättningen $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ i punkten $(x,y) = (1,-1)$ då $\boldsymbol{g}(x,y) = (xy, x^2)$ och $\boldsymbol{f}(u,v) = (uv, u+v)$,

d) sammansättningen $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ då $\boldsymbol{g}(x,y) = (x\sin y, y\cos x)$ och $\boldsymbol{f}(u,v) = (\sin v, \cos v\sin u)$ i punkten $(x,y) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

c) Vi ska bestämma Jacobimatrisen med två olika metoder.

Metod 1 (Derivera den sammansatta funktionen)

Vi räkna ut vad den sammansatta funktionen blir

$$\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}(x,y) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{g}(x,y)\big) = \begin{pmatrix} f_1\big(g(x,y)\big) \\ f_2\big(g(x,y)\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(xy,x^2) \\ f_2(xy,x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy\cdot x^2 \\ xy + x^2 \end{pmatrix}.$$

Jacobimatrisen till den sammansatta funktionen blir därför

$$\frac{\partial(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\big(xy\cdot x^2\big) & \dfrac{\partial}{\partial y}\big(xy\cdot x^2\big) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\big(xy+x^2\big) & \dfrac{\partial}{\partial y}\big(xy+x^2\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y & x^3 \\ y+2x & x \end{pmatrix}.$$

I punkten $(x,y) = (1,-1)$ har den värdet

$$\frac{\partial(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})}{\partial(x,y)}(1,-1) = \begin{pmatrix} 3\cdot 1^2\cdot(-1) & 1^3 \\ -1+2\cdot 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Metod 2 (Kedjeregeln)

Jacobimatriserna till $\boldsymbol{f}$ och $\boldsymbol{g}$ är respektive funktions linjära del. När vi bildar den sammansatta funktionen $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ så blir dess linjära del sammansättningen av $\boldsymbol{f}$ och $\boldsymbol{g}$:s linjära delar, m.a.o. produkten av deras Jacobimatriser,

$$\frac{\partial(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})}{\partial(x,y)} = \frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial(u,v)}\,\frac{\partial\boldsymbol{g}}{\partial(x,y)},$$

där den första faktorn i högerledet ska beräknas i punkten $(u,v) = \boldsymbol{g}(x,y)$. Fullt utskriven blir alltså kedjeregeln

$$\frac{\partial(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})}{\partial(x,y)}(x,y) = \frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial(u,v)}\big(\boldsymbol{g}(x,y)\big)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{g}}{\partial(x,y)}(x,y).$$

Vi har att

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u}(uv) & \dfrac{\partial}{\partial v}(uv) \\ \dfrac{\partial}{\partial u}(u+v) & \dfrac{\partial}{\partial v}(u+v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(xy) & \dfrac{\partial}{\partial y}(xy) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2) & \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}.$$

I punkten $(x,y) = (1,-1)$ är $\boldsymbol{g}(x,y) = \boldsymbol{g}(1,-1) = \big(1\cdot(-1), 1^2\big) = (-1,1)$ och vi får att

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})}{\partial(x,y)}(1,-1) &= \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(u,v)}(-1,1)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial(x,y)}(1,-1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) Den sammansatta funktionen $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ har enligt kedjeregeln Jacobimatrisen

$$\frac{\partial(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})}{\partial(x,y)}(x,y) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(u,v)}(u,v)\,\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial(x,y)}(x,y),$$

där $(u,v) = \boldsymbol{g}(x,y)$. Vi har att

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(u,v)} &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u}(\sin v) & \dfrac{\partial}{\partial v}(\sin v) \\ \dfrac{\partial}{\partial u}(\cos v\cdot\sin u) & \dfrac{\partial}{\partial v}(\cos v\cdot\sin u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \cos v \\ \cos v\cdot\cos u & -\sin v\cdot\sin u \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial(x,y)} &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(x\sin y) & \dfrac{\partial}{\partial y}(x\sin y) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(y\cos x) & \dfrac{\partial}{\partial y}(y\cos x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin y & x\cos y \\ -y\sin x & \cos x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

I punkten $(x,y) = \big(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big)$ är $(u,v) = \boldsymbol{g}\big(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big) = \big(\frac{\pi}{2},0\big)$ och vi får att

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})}{\partial(x,y)}\big(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\big) &= \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(u,v)}\big(\tfrac{\pi}{2},0\big)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial(x,y)}\big(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\big) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \cos 0 \\ \cos 0\cdot\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

450 Låt $f(x,y) = \ln(x+y)$, där $x > y > 0$. Vi betraktar f som en funktion av variablerna u och v, där $u = \sqrt{x}+\sqrt{y}$ och $v = \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$. Bestäm $\dfrac{\partial f}{\partial u}$.

I uppgiften använder vi två koordinatsystem för att beskriva punkter i planet, dels de vanliga x,y-koordinaterna, dels kroklinjiga u,v-koordinater. Mellan de två koordinatsystemen har vi ”översättningsformeln”

$$\begin{cases} u = \sqrt{x}+\sqrt{y}, \\ v = \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}. \end{cases} \tag{$*$}$$

Vi har därför två sätt att representera funktionen f på, $f = f(x,y)$ och $f = f(u,v)$. Vi kan uttrycka sambandet mellan $f = f(x,y)$ och $f = f(u,v)$ med hjälp av koordinatsambandet $(*)$,

$$f(x,y) = f\big(u(x,y), v(x,y)\big).$$

Notera att i vänsterledet är f en funktion av x,y medan i högerledet är f en funktion av u,v. Kedjeregeln ger att

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \frac{\partial f}{\partial(u,v)}\,\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},$$

vilket i komponentform blir

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Vi har att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\bigl(\ln(x+y)\bigr) = \frac{1}{x+y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\bigl(\ln(x+y)\bigr) = \frac{1}{x+y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\bigl(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,\bigr) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\bigl(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,\bigr) = \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Bigl(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Bigr) = \frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Bigl(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Bigr) = -\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x},$$

varför kedjeregeln blir

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{x+y} & \dfrac{1}{x+y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2} & -\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{x} \end{pmatrix}$$

och från denna likhet kan vi lösa ut den sökta partialderivatan $\frac{\partial f}{\partial u}$.

Om vi transponerar båda led får vi ett mer välbekant utseende på ekvationen

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{x+y} \\ \dfrac{1}{x+y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}} & \dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Eftersom vi har flera bokstavsuttryck i båda led är det nog enklast att använda Cramers regel för att bestämma $\frac{\partial f}{\partial u}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{1}{x+y} & \dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2} \\ \dfrac{1}{x+y} & \dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}} & \dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y^2} \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{1}{x+y}\Bigl(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y^2}\Bigr) - \dfrac{1}{x+y}\Bigl(\dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2}\Bigr)}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Bigl(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y^2}\Bigr) - \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\Bigl(\dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2}\Bigr)} \\
&= \frac{\dfrac{1}{x+y}\Bigl(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{y}{x^2}\Bigr)}{\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{2y^2}-\dfrac{1}{2y\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{2x^2}} = \bigl\{\text{ förläng med } 2x^2y^2\sqrt{xy}\,\bigr\} \\
&= \frac{2\sqrt{xy}\bigl(xy^2-x^3-x^2y+y^3\bigr)}{(x+y)\bigl(xy^2\sqrt{y}-x^3\sqrt{y}-x^2y\sqrt{y}+y^3\sqrt{x}\,\bigr)} \\
&= \frac{2\sqrt{xy}\bigl(-xy(x-y)-(x^3-y^3)\bigr)}{(x+y)\bigl(-x\sqrt{y}(x^2-y^2)-y\sqrt{x}(x^2-y^2)\bigr)} \\
&= \bigl\{\, x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) \,\bigr\} \\
&= \frac{2\sqrt{xy}(x-y)(xy+x^2+xy+y^2)}{(x+y)(x^2-y^2)\bigl(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\,\bigr)} \\
&= \frac{2\sqrt{xy}(x+y)^2}{(x+y)^2\bigl(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\,\bigr)} = \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.
\end{aligned}$$

Eftersom partialderivatan $\frac{\partial f}{\partial u}$ är en partialderivata i u,v-systemet är det naturligare att ge svaret i dessa koordinater

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{2}{u}.$$

451 Betrakta funktionen $f(x,y)=x^y$. Genom variabelsambandet

$$\begin{aligned} u &= x+\ln y,\\ v &= x-\ln y, \end{aligned}$$

definieras en ny funktion g av u och v så att $g(u,v)=f\bigl(x(u,v),y(u,v)\bigr)$. Beräkna g'_u och g'_v då $u=v=2$.

Funktionen g är f sammansatt med $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$. Kedjeregeln ger därför att

$$\frac{\partial g}{\partial(u,v)} = \frac{\partial f}{\partial(x,y)}\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}. \qquad (*)$$

Eftersom vi i variabelsambandet har u,v uttryckt i x,y (och inte tvärt om) skriver vi om derivatan $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ med inversformeln

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \Bigl(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Bigr)^{-1},$$

och $(*)$ blir då

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial(u,v)} &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v}\end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial(x,y)}\Bigl(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Bigr)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y\ln x\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{y}\\[2mm] 1 & -\dfrac{1}{y}\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y\ln x\end{pmatrix} \frac{1}{1\cdot(-\frac{1}{y})-1\cdot\frac{1}{y}} \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{y} & -\dfrac{1}{y}\\[2mm] -1 & 1\end{pmatrix}\\
&= -\tfrac{1}{2}y\begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y\ln x\end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{y} & -\dfrac{1}{y}\\[2mm] -1 & 1\end{pmatrix}\\
&= -\tfrac{1}{2}y\begin{pmatrix} yx^{y-1}\Bigl(-\dfrac{1}{y}\Bigr)+x^y\ln x\cdot(-1) & yx^{y-1}\Bigl(-\dfrac{1}{y}\Bigr)+x^y\ln x\cdot 1\end{pmatrix}\\
&= -\tfrac{1}{2}x^y y\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{x}-\ln x & -\dfrac{1}{x}+\ln x\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

d.v.s.

$$\begin{aligned}
g'_u &= \frac{\partial g}{\partial u} = \tfrac{1}{2}x^y y\Bigl(\frac{1}{x}+\ln x\Bigr),\\
g'_v &= \frac{\partial g}{\partial v} = \tfrac{1}{2}x^y y\Bigl(\frac{1}{x}-\ln x\Bigr).
\end{aligned}$$

I punkten $u=v=2$ ger variabelsambandet

$$\begin{aligned} 2 &= x+\ln y,\\ 2 &= x-\ln y, \end{aligned}$$

att motsvarande x,y-koordinater är $x=2$ och $y=1$. Partialderivatorna blir då

$$\begin{aligned}
g'_u(2,2) &= \tfrac{1}{2}\cdot 2^1\cdot 1\bigl(\tfrac{1}{2}+\ln 2\bigr) = \tfrac{1}{2}+\ln 2,\\
g'_v(2,2) &= \tfrac{1}{2}\cdot 2^1\cdot 1\bigl(\tfrac{1}{2}-\ln 2\bigr) = \tfrac{1}{2}-\ln 2.
\end{aligned}$$

452a Beräkna $\frac{\partial f}{\partial v}$ om $f(x,y)=x^2+y^2$, $u=x-y+\sqrt{x-y}$ och $v=x+y$.

Om vi betraktar f som en funktion av u,v-koordinaterna så har vi

$$f(u,v)=f\bigl(x(u,v),y(u,v)\bigr).$$

Med f menar vi alltså $f=f(u,v)$ i vänsterledet och $f=f(x,y)$ i högerledet. Kedjeregeln ger att

$$\frac{\partial f}{\partial(u,v)} = \frac{\partial f}{\partial(x,y)}\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

Om vi använder inverssambandet

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \Bigl(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Bigr)^{-1}$$

så ger kedjeregeln alltså att

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}^{-1}\\ &= \begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\frac{1}{\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial v}{\partial y} & -\dfrac{\partial u}{\partial y}\\ -\dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial x}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} * & \dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}}\end{pmatrix}. \qquad (* = \text{ointressant})\end{aligned}$$

Vi har därmed att

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}} = \frac{-2x\cdot\Bigl(-1-\dfrac{1}{2\sqrt{x-y}}\Bigr)+2y\cdot\Bigl(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x-y}}\Bigr)}{\Bigl(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x-y}}\Bigr)\cdot 1-\Bigl(-1-\dfrac{1}{2\sqrt{x-y}}\Bigr)\cdot 1}\\ &= \frac{2(x+y)-\dfrac{x+y}{\sqrt{x-y}}}{2+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}} = x+y = v.\end{aligned}$$

455 Bestäm genom att införa variablerna

$$\begin{cases} u=(x+y)e^{-z},\\ v=(x-y)e^{z},\\ w=z,\end{cases}$$

den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$yf'_x + xf'_y + f'_z = 0.$$

När vi byter koordinater till u, v, w ska vi omvandla alla uttryck i differentialekvationen till u, v, w-koordinater. Från sambandet

$$f(x,y,z) = f\bigl(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)\bigr)$$

ger kedjeregeln att

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y,z)} = \frac{\partial f}{\partial(u,v,w)}\,\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)},$$

d.v.s.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial w}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z}\\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial w}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-z} & e^{-z} & -(x+y)e^{-z}\\ e^{z} & -e^{z} & (x-y)e^{z}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \Bigl(\;\frac{\partial f}{\partial u}e^{-z}+\frac{\partial f}{\partial v}e^{z} \quad \frac{\partial f}{\partial u}e^{-z}-\frac{\partial f}{\partial v}e^{z}\\ &\qquad -\frac{\partial f}{\partial u}\cdot(x+y)e^{-z}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot(x-y)e^{z}+\frac{\partial f}{\partial w}\;\Bigr).\end{aligned}$$

Differentialekvationen blir då

$$
\begin{aligned}
yf'_x + xf'_y + f'_z &= y\big(f'_u e^{-z} + f'_v e^{z}\big) + x\big(f'_u e^{-z} - f'_v e^{z}\big) \\
&\quad + \big(-f'_u \cdot (x+y)e^{-z} + f'_v \cdot (x-y)e^{z} + f'_w\big) \\
&= \big(ye^{-z} + xe^{-z} - (x+y)e^{-z}\big)f'_u + \big(ye^{z} - xe^{z} + (x-y)e^{z}\big)f'_v + f'_w \\
&= f'_w = 0.
\end{aligned}
$$

Differentialekvationen har därför lösningarna

$$f(u,v,w) = g(u,v),$$

där g är en godtycklig deriverbar funktion. I x, y, z-koordinater blir lösningarna

$$f(x,y,z) = g\big((x+y)e^{-z}, (x-y)e^{z}\big).$$

456a Transformera följande uttryck

$$\frac{dz}{dx} \quad \text{då } z = z(x),$$

med variabelbytet $x = u + u^3$.

Kedjeregeln ger att $\quad \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{du}\,\dfrac{du}{dx} = \dfrac{dz}{du}\Big(\dfrac{dx}{du}\Big)^{-1} = \dfrac{dz}{du}\cdot\dfrac{1}{1+3u^2}.$

457b Transformera uttrycket

$$x\,z'_x + y\,z'_y$$

med variabelbytet $\begin{cases} x = r\cos v, \\ y = r\sin v. \end{cases}$

Vi skriver om partialderivatorna i uttrycket i r, v-koordinater med hjälp av kedjeregeln,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial(x,y)} &= \begin{pmatrix} z'_x & z'_y \end{pmatrix} = \frac{\partial z}{\partial(r,v)}\,\frac{\partial(r,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial z}{\partial(r,v)}\Big(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,v)}\Big)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} z'_r & z'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} z'_r & z'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos v & -r\sin v \\ \sin v & r\cos v \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} z'_r & z'_v \end{pmatrix} \frac{1}{r\cos^2 v + r\sin^2 v} \begin{pmatrix} r\cos v & r\sin v \\ -\sin v & \cos v \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r}\begin{pmatrix} z'_r \cdot r\cos v - z'_v \sin v & z'_r \cdot r\sin v + z'_v \cos v \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow \qquad
\begin{aligned}
z'_x &= z'_r \cos v - z'_v\,\frac{1}{r}\sin v, \\
z'_y &= z'_r \sin v + z'_v\,\frac{1}{r}\cos v.
\end{aligned}
$$

Uttrycket blir därför

$$
\begin{aligned}
xz'_x + yz'_y &= r\cos v \cdot \Big(z'_r\cos v - z'_v\,\frac{1}{r}\sin v\Big) + r\sin v \cdot \Big(z'_r \sin v + z'_v\,\frac{1}{r}\cos v\Big) \\
&= \big(r\cos^2 v + r\sin^2 v\big)z'_r + \big(-\cos v\cdot\sin v + \sin v\cdot\cos v\big)z'_v = r\,z'_r.
\end{aligned}
$$

461 Transformera följande uttryck med angivet variabelbyte,

c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\qquad \begin{cases} x=u+v,\\ y=u-v,\end{cases}$

n) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2},\qquad \begin{cases} u=x\cos a-y\sin a,\\ v=x\sin a+y\cos a.\end{cases}$

c) Vi ska skriva om uttrycken i u,v-koordinater. Med hjälp av kedjeregeln kan vi uttryck sambanden mellan första ordningens partialderivator

$$\frac{\partial z}{\partial(x,y)}=\frac{\partial z}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial z}{\partial(u,v)}\Big(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big)^{-1},$$

d.v.s.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}\\
&=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\frac{1}{1\cdot(-1)-1\cdot 1}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\
&=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{\partial z}{\partial v} & -\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\qquad \begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\Big),\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\Big).\end{aligned}$$

Detta samband gäller för alla kontinuerligt deriverbara z. Vi har därför egentligen ett samband mellan deriveringsoperatorerna i x,y- och u,v-koordinater,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}&=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\Big),\\ \frac{\partial}{\partial y}&=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}\Big).\end{aligned}$$

Med de vanliga deriveringsreglerna får vi

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}z=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\Big)\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\Big)z\\
&=\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\Big)z\\
&=\tfrac{1}{4}\big(z''_{uu}+2z''_{uv}+z''_{vv}\big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}z=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}\Big)\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}\Big)z\\
&=\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\Big)z\\
&=\tfrac{1}{4}\big(z''_{uu}-2z''_{uv}+z''_{vv}\big).\end{aligned}$$

I de nya koordinaterna blir alltså uttrycket lika med

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}&=\tfrac{1}{4}\big(z''_{uu}+2z''_{uv}+z''_{vv}\big)\\
&\quad-\tfrac{1}{4}\big(z''_{uu}-2z''_{uv}+z''_{vv}\big)-\tfrac{1}{2}\big(z'_u+z'_v\big)+\tfrac{1}{2}\big(z'_u-z'_v\big)\\
&=z''_{uv}-z'_v=0.\end{aligned}$$

n) Vi härleder först operatorformler för deriveringar i de två koordinatsystemen med hjälp av kedjeregeln,

$$\frac{\partial z}{\partial(x,y)}=\frac{\partial z}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\qquad \begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos a & -\sin a\\ \sin a & \cos a\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\cos a\cdot\dfrac{\partial z}{\partial u}+\sin a\cdot\dfrac{\partial z}{\partial v} & -\sin a\cdot\dfrac{\partial z}{\partial u}+\cos a\cdot\dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\qquad \begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\cos a\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\sin a\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=-\sin a\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\cos a\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\end{aligned}$$

Operatorformlerna blir alltså

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \cos a\,\frac{\partial}{\partial u} + \sin a\,\frac{\partial}{\partial v},\\ \frac{\partial}{\partial y} &= -\sin a\,\frac{\partial}{\partial u} + \cos a\,\frac{\partial}{\partial v}.\end{aligned}$$

Vi får nu att

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \Big(\cos a\,\frac{\partial}{\partial u} + \sin a\,\frac{\partial}{\partial v}\Big)\Big(\cos a\,\frac{\partial}{\partial u} + \sin a\,\frac{\partial}{\partial v}\Big)z\\ &= \Big(\cos^2 a\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\partial}{\partial u} + \cos a\,\sin a\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\partial}{\partial v}\\ &\qquad + \sin a\,\cos a\,\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\partial}{\partial u} + \sin^2 a\,\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\partial}{\partial v}\Big)z\\ &= \cos^2 a\,z''_{uu} + 2\cos a\sin a\,z''_{uv} + \sin^2 a\,z''_{vv},\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \Big(-\sin a\,\frac{\partial}{\partial u} + \cos a\,\frac{\partial}{\partial v}\Big)\Big(-\sin a\,\frac{\partial}{\partial u} + \cos a\,\frac{\partial}{\partial v}\Big)z\\ &= \Big(\sin^2 a\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\partial}{\partial u} - \sin a\,\cos a\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\partial}{\partial v}\\ &\qquad - \cos a\,\sin a\,\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\partial}{\partial u} + \cos^2 a\,\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\partial}{\partial v}\Big)z\\ &= \sin^2 a\,z''_{uu} - 2\cos a\sin a\,z''_{uv} + \sin^2 a\,z''_{vv},\end{aligned}$$

vilket betyder att

$$\begin{aligned}z''_{xx} + z''_{yy} &= \big(\cos^2 a + \sin^2 a\big)z''_{uu} + \big(2\cos a\sin a - 2\cos a\sin a\big)z''_{uv}\\ &\quad + \big(\sin^2 a + \cos^2 a\big)z''_{vv} = z''_{uu} + z''_{vv}.\end{aligned}$$

501 Undersök om $\boldsymbol{f}$ har en differentierbar invers i någon omgivning av punkten P om

b) $\boldsymbol{f}(x,y) = (xy, x+y)$ och $P = (1,-1)$,

d) $\boldsymbol{f}(x,y) = (x^2 - y^2, \arctan xy)$ och $P \neq (0,0)$.

En differentierbar funktion $\boldsymbol{f}$ är lokalt inverterbar med differentierbar invers i en punkt P omm (om och endast om) dess linjära del är inverterbar i punkten, d.v.s. om Jacobimatrisen

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)}(P) \quad \text{är inverterbar,}$$

vilket är detsamma som att

$$\det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)}(P)\Big) \neq 0.$$

b) Vi har att

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

I punkten $P = (1,-1)$ är

$$\det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)}(P)\Big) = \begin{vmatrix} -1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Alltså har $\boldsymbol{f}$ en differentierbar lokal invers i punkten $P = (1,-1)$.

d) I detta fall blir Jacobimatrisen

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y\\ \dfrac{y}{1+(xy)^2} & \dfrac{x}{1+(xy)^2}\end{pmatrix}$$

om dess determinant har värdet

$$\begin{aligned}\det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)}\Big) &= \begin{vmatrix} 2x & -2y\\ \dfrac{y}{1+(xy)^2} & \dfrac{x}{1+(xy)^2}\end{vmatrix}\\ &= \frac{2x^2}{1+(xy)^2} - \frac{-2y^2}{1+(xy)^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{1+(xy)^2}\end{aligned}$$

som är skild från noll när $(x, y) \neq (0,0)$ (täljaren är summan av två kvadrater).

Funktionen $\boldsymbol{f}$ har alltså en differentierbar lokal invers i alla punkter $P \neq (0,0)$.

505 Bestäm alla punkter P, för vilka det finns en omgivning av P, där funktionen $\boldsymbol{f}$ har en differentierbar invers, om

b) $\boldsymbol{f}(x, y) = (x\cos y, x\sin y)$,

c) $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (xy, yz, xz)$.

Det finns en differentierbar lokal invers till $\boldsymbol{f}$ i en punkt P omm $\boldsymbol{f}$:s linjära del i punkten är inverterbar, d.v.s. omm Jacobimatrisen till $\boldsymbol{f}$ har determinanten skild från noll.

b) Jacobimatrisen

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix}$$

och determinanten blir

$$\det\Bigl(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)}\Bigr) = \begin{vmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{vmatrix} = x\cos^2 y + x\sin^2 y = x.$$

Determinanten är alltså skild från noll i alla punkter utom på y-axeln.

Svaret blir att $\boldsymbol{f}$ har en differentierbar invers i en omgivning av alla punkter utom de på y-axeln.

c) Determinanten av Jacobimatrisen är

$$\det\Bigl(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y,z)}\Bigr) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y} & \dfrac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= \{\,\text{Sarrus regel}\,\} = yzx + xyz + 0 - 0 - 0 - 0 = 2xyz.$$

Denna determinant är skild från noll överallt utom på koordinatplanen. Funktionen har alltså en differentierbar invers i en omgivning av alla punkter utom för punkter på koordinatplanen $x = 0$, $y = 0$ eller $z = 0$.

506 Visa att funktionen

$$\boldsymbol{f}\colon \begin{cases} u = x + e^y \\ v = y - e^x \end{cases}$$

är lokalt inverterbar och beräkna de partiella derivatorna $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ och $\frac{\partial y}{\partial v}$ svarande mot punkten $(x, y) = (0,0)$.

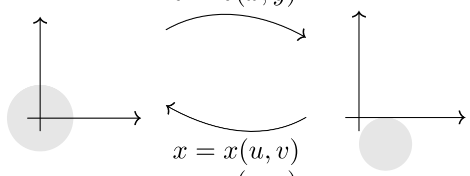
Beräkna även inversens Jacobimatris svarande mot denna punkt.

Vi börjar med att undersöka den lokala inverterbarheten. Funktionen $\boldsymbol{f}$ är lokalt inverterbar om determinanten av dess Jacobimatris är nollskild,

$$\det\Bigl(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)}\Bigr) = \det\Bigl(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Bigr) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & e^y \\ -e^x & 1 \end{vmatrix} = 1 + e^{x+y}.$$

Eftersom exponentialfunktionen alltid är positiv är determinanten nollskild för alla punkter i planet, d.v.s. $\boldsymbol{f}$ är lokalt inverterbar överallt.

$u = u(x,y)$
$v = v(x,y)$



$x = x(u,v)$
$y = y(u,v)$

Partialderivatorna av x, y med avseende på u, v, d.v.s. inversens partialderivator, får vi enklast genom sambandet

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \Bigl(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Bigr)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & e^y \\ -e^x & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1+e^{x+y}}\begin{pmatrix} 1 & -e^y \\ e^x & 1 \end{pmatrix}.$$

I punkten som svarar mot $(x,y) = (0,0)$ (d.v.s. $(u,v) = (1,-1)$) antar denna Jacobimatris för inversen värdet

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(1,-1) = \frac{1}{1+e^{0+0}}\begin{pmatrix} 1 & -e^0 \\ e^0 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ur matrisen kan vi också avläsa de sökta partialderivatornas värde i punkten

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \tfrac{1}{2}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\tfrac{1}{2},$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = \tfrac{1}{2}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \tfrac{1}{2}.$$

509 Som synes är $(x,y) = (0,0)$ en lösning till ekvationssystemet

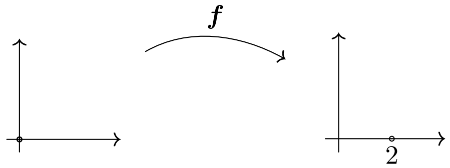
$$\begin{aligned} e^x + xy + e^y &= 2, \\ x^3 - x + y + y^3 &= 0. \end{aligned}$$

Visa att i en tillräckligt liten omgivning av $(0,0)$ finns det inte någon annan lösning.

Definiera funktionen

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} e^x + xy + e^y \\ x^3 - x + y + y^3 \end{pmatrix}.$$

Då är $\boldsymbol{f}(0,0) = (2,0)^t$ precis som det står i uppgiftstexten.



Om vi lyckas visa att $\boldsymbol{f}$ är lokalt inverterbar i $(0,0)$, då finns en omgivning av $(0,0)$ där $\boldsymbol{f}$ är 1:1. I den omgivningen finns då bara högst en punkt som kan avbildas på $(2,0)$, nämligen $(0,0)$. Detta betyder alltså att ekvationssystemet

$$\begin{aligned} e^x + xy + e^y &= 2, \\ x^3 - x + y + y^3 &= 0, \end{aligned}$$

endast har lösningen $(0,0)$ i den omgivningen.

Funktionen $\boldsymbol{f}$ är lokalt inverterbar i $(0,0)$ om determinanten av dess Jacobimatris i punkten är nollskild. Vi har att

$$\det\Bigl(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)}(0,0)\Bigr) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}_{x=y=0} = \begin{vmatrix} e^x + y & x + e^y \\ 3x^2 - 1 & 1 + 3y^2 \end{vmatrix}_{x=y=0}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Alltså är $\boldsymbol{f}$ lokalt inverterbar i punkten enligt inversa funktionssatsen, vilket betyder att ekvationssystemet i en omgivning av $(0,0)$ endast har $(0,0)$ som lösning.

518 En yta definieras genom ekvationen $3xyz - z^3 = 10$. Visa att det finns en omgivning av punkten $(1,3,2)$ där ytan kan uppfattas som en graf till en kontinuerligt deriverbar funktion $z = z(x,y)$. Bestäm z'_x och z'_y i punkten $(1,3)$.

Definiera funktionen

$$f(x,y,z) = 3xyz - z^3 - 10.$$

Då är ytan 0-nivåytan till f. Vi kan se ytan som en funktionsyta $z = z(x,y)$ lokalt kring alla punkter där ytans tangentplan inte är lodrätt, d.v.s. där ytans normalvektor ∇f inte är horisontell. Vi har att gradienten till f är

$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\Big) = \big(3yz, 3xz, 3xy - 3z^2\big).$$

I punkten $(1,3,2)$ är den lika med

$$\nabla f(1,3,2) = \big(3 \cdot 3 \cdot 2, 3 \cdot 1 \cdot 2, 3 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 2^2\big) = (18, 6, -3).$$

Eftersom z-koordinaten är skild från noll är $\nabla f(1,3,2)$ inte horisontell och ytan är därmed lokalt kring $(1,3,2)$ en funktionsyta $z = z(x,y)$.

I en omgivning av $(x,y) = (1,3)$ har vi alltså att

$$f\big(x,y,z(x,y)\big) \equiv 0.$$

('$\equiv$' betyder att vänsterledet är identiskt noll i omgivningen). Med kedjeregeln får vi

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y,z)}\,\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x,y)} = \mathbf{0},$$

vilket i komponentform blir

$$\begin{aligned}
(0 \quad 0) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial x}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \big(3yz \quad 3xz \quad 3xy - 3z^2\big) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \Big(3yz + (3xy - 3z^2)\,\frac{\partial z}{\partial x} \quad 3xz + (3xy - 3z^2)\,\frac{\partial z}{\partial y}\Big)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} 3yz + (3xy - 3z^2)\,\frac{\partial z}{\partial x} &= 0, \\ 3xz + (3xy - 3z^2)\,\frac{\partial z}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{yz}{z^2 - xy}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{xz}{z^2 - xy}. \end{aligned}$$

I punkten $(x,y) = (1,3)$ är $z(1,3) = 2$ och partialderivatorna får värdena

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(1,3) &= \frac{3 \cdot 2}{2^2 - 1 \cdot 3} = 6, \\ \frac{\partial x}{\partial y}(1,3) &= \frac{1 \cdot 2}{2^2 - 1 \cdot 3} = 2. \end{aligned}$$

521 Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2e^x - e^y - e^z = 0, \\ xyz = 1, \end{cases}$$

definierar i en omgivning av punkten $(1,1,1)$ precis två kontinuerligt deriverbara funktioner $x = x(z)$ och $y = y(z)$. Beräkna $x'(1)$.

Sätt

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^x - e^y - e^z \\ xyz - 1 \end{pmatrix}.$$

Enligt implicita funktionssatsen kan vi skriva två av variablerna x, y som funktion av den tredje variabeln z lokalt kring alla punkter som uppfyller

$$\det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)}\Big) \neq 0.$$

I vårt fall är

$$\det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)}\Big) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2e^x & -e^y \\ yz & xz \end{vmatrix} = 2xze^x + yze^y,$$

vilken i punkten $(1,1,1)$ antar värdet

$$\det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)}(1,1)\Big) = 2\cdot 1\cdot 1\cdot e^1 + 1\cdot 1\cdot e^1 = 3e \neq 0.$$

Alltså kan vi lokalt kring punkten $(1,1,1)$ från ekvationssystemet definiera $x = x(z)$ och $y = y(z)$.

I närheten av $(1,1,1)$ är därmed

$$\boldsymbol{f}(x(z), y(z), z) \equiv \mathbf{0}.$$

Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y,z)}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial z} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2e^x & -e^y & -e^z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2e^x\frac{\partial x}{\partial z} - e^y\frac{\partial y}{\partial z} &= e^z, \\ yz\frac{\partial x}{\partial z} + xz\frac{\partial y}{\partial z} &= -xy. \end{aligned}$$

Cramers regel ger att

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\begin{vmatrix} e^z & -e^y \\ -xy & xz \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2e^x & -e^y \\ yz & xz \end{vmatrix}} = \frac{xze^z - xye^y}{2xze^x + yze^y},$$

och i punkten $\big(x(1), y(1), 1\big) = (1,1,1)$ är

$$\frac{\partial x}{\partial z}(1) = \frac{1\cdot 1\cdot e^1 - 1\cdot 1\cdot e^1}{2\cdot 1\cdot 1\cdot e^1 + 1\cdot 1\cdot e^1} = 0.$$

528 Låt $f(x,y,z) = xy^2z^3$. Verifiera att det finns en omgivning av punkten $(1,1,1)$ där ekvationen $x^2+y^2+z^2-3xyz=0$ definierar precis en kontinuerlig deriverbar funktion

a) $z = z(x,y)$ och beräkna $\dfrac{\partial}{\partial x} f\bigl(x,y,z(x,y)\bigr)$ i punkten $(1,1)$,

b) $y = y(x,z)$ och beräkna $\dfrac{\partial}{\partial x} f\bigl(x,y(x,z),z\bigr)$ i punkten $(1,1)$.

a) Den lösningsmängd som definieras av ekvationen

$$x^2+y^2+z^2-3xyz=0$$

är 0-nivåytan till funktionen $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3xyz$. Enligt implicita funktionssatsen definierar ekvationen lokalt en funktion $z=z(x,y)$ i de punkter där

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 2z^2-3xy \neq 0.$$

I punkten $(1,1,1)$ är

$$\frac{\partial g}{\partial z}(1,1,1) = 2\cdot 1^2 - 3\cdot 1\cdot 1 = -1 \neq 0$$

varför vi har $z=z(x,y)$ lokalt kring $(x,y)=(1,1)$. Med kedjeregeln på $g\bigl(x,y,z(x,y)\bigr)=0$ får vi

$$0 = \frac{\partial g}{\partial(x,y,z)}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial x}{\partial y} \\ \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x-3yz & 2y-3xz & 2z-3xy\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x-3yz+(2z-3xy)\dfrac{\partial z}{\partial x} & * \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x+3yz}{2z-3xy}.$$

Partialderivatan i uppgiftstexten får vi med kedjeregeln

$$\frac{\partial}{\partial x} f\bigl(x,y,z(x,y)\bigr) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = y^2z^3 + 3xy^2z^2\cdot\left(\frac{-2x+3yz}{2z-3xy}\right).$$

I punkten $\bigl(x,y,z(x,y)\bigr)=(1,1,1)$ blir partialderivatans värde

$$\frac{\partial}{\partial x}\Bigl[f\bigl(x,y,z(x,y)\bigr)\Bigr]_{x=y=1} = 1^2\cdot 1^3 + 3\cdot 1\cdot 1^2\cdot 1^2\cdot\left(\frac{-2\cdot 1+3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 1-3\cdot 1\cdot 1}\right)$$
$$= 1+3\cdot\frac{+1}{-1} = -2.$$

b) Med implicita funktionssatsen får vi att ekvationen

$$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3xyz = 0$$

definierar lokalt en funktion $y=y(x,z)$ kring punkten $P=(1,1,1)$ om

$$\frac{\partial g}{\partial y}(P) = 2y-3xz\,\Big|_{x=y=z=1} = 2\cdot 1-3\cdot 1\cdot 1 = -1\neq 0.$$

Om vi deriverar

$$g\bigl(x,y(x,z),z\bigr)\equiv 0$$

med kedjeregeln fås

$$\frac{\partial g}{\partial(x,y,z)}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x,z)} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial z}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x-3yz & 2y-3xz & 2z-3xy\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \left(2x - 3yz + (2y - 3xz)\frac{\partial y}{\partial x} \qquad * \quad \right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-2x + 3yz}{2y - 3xz}.$$

Vi får nu med kedjeregeln att

$$\frac{\partial}{\partial x} f\big(x, y(x,z), z\big) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x} = y^2 z^3 + 2xyz^3 \cdot \frac{-2x + 3yz}{2y - 3xz}.$$

I punkten $\big(x, y(x,z), z\big) = (1,1,1)$ får derivatan värdet

$$\frac{\partial}{\partial x}\, f\big(x, y(x,z), z\big)\Big|_{x=y=z=1} = 1^2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1^3 \cdot \frac{-2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1}$$
$$= 1 + 2 \cdot \frac{1}{-1} = -1.$$