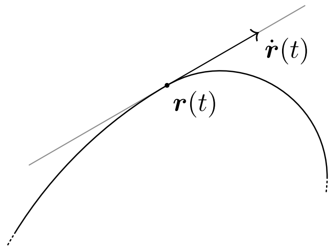
Avsnitt 3, Differentialkalkyl I

303b Beräkna derivatan av $\boldsymbol{r}(t) = \bigl(\arcsin t, \sqrt{t}\,\bigr)$.

Uttrycket

$$\boldsymbol{r}(t) = \bigl(\arcsin t, \sqrt{t}\,\bigr)$$

beskriver en parameterkurva i planet. Dess derivata $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ är kurvans tangentriktning i punkten $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$.



Vi får derivatan genom att derivera $\boldsymbol{r}(t)$ komponentvis,

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \Bigl(\frac{d}{dt}\arcsin t, \frac{d}{dt}\sqrt{t}\Bigr) = \Bigl(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \frac{1}{2\sqrt{t}}\Bigr).$$

304 Funktionen $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t, \cos t, \cos 2t)$, $0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$, beskriver en partikels rörelse, där t betecknar tiden. I vilken punkt är partikelns fart störst?

Farten $v(t)$ är beloppet av partikelns hastighet,

$$v(t) = \|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\|.$$

Farten är alltså bara ett mått på hur stor hastigheten är, medan hastighetsvektorn dessutom anger i vilken riktning rörelsen sker. Partikelns hastighet är

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{d}{dt}\bigl(\sin t, \cos t, \cos 2t\bigr) = \bigl(\cos t, -\sin t, -2\sin 2t\bigr)$$

och partikelns fart blir

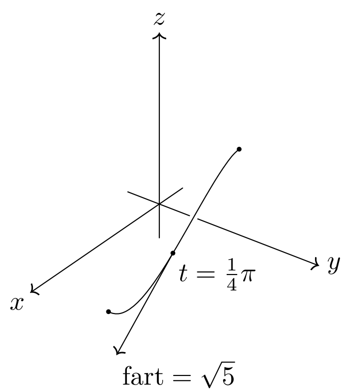
$$\begin{aligned} v(t) = \|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\| &= \sqrt{(\cos t)^2 + (-\sin t)^2 + (-2\sin 2t)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 4\sin^2 2t} = \sqrt{1 + 4\sin^2 2t}. \end{aligned}$$

Vi ska nu bestämma vid vilken tidpunkt farten är som störst, d.v.s. lösa problemet:

$$\text{Maximera} \quad v(t) = \sqrt{1 + 4\sin^2 2t}, \quad \text{när } 0 \le t \le \tfrac{1}{2}\pi.$$

Här ser vi direkt att farten blir störst när $\sin 2t = \pm 1$. Eftersom $0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$ sker detta endast när $t = \frac{1}{4}\pi$. Vi denna tidpunkt befinner sig partikeln i punkten

$$\boldsymbol{r}\bigl(\tfrac{\pi}{4}\bigr) = \bigl(\sin\tfrac{\pi}{4}, \cos\tfrac{\pi}{4}, \cos\tfrac{\pi}{2}\bigr) = \bigl(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\bigr).$$



305 Bestäm tangenten till kurvan $\boldsymbol{r}(t) = (t^3 - t^2, t^2, t^2)$

a) i punkten $(0, 1, 1)$,

b) i punkten $(0, 0, 0)$.

För att bestämma tangentlinjen behöver vi en punkt $\boldsymbol{r}_0$ på linjen och linjens riktning $\boldsymbol{v}$. Tangentlinjen kan då skrivas i parameterformen

$$\boldsymbol{r}_{\text{tang}}(s) = \boldsymbol{r}_0 + s\,\boldsymbol{v}.$$

a) Som punkt på linjen väljer vi tangeringspunkten $\boldsymbol{r}_0 = (0, 1, 1)$. Eftersom vi söker tangentlinjen är linjens riktning lika med kurvans riktningsvektor i tangeringspunkten

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}(t_0),$$

där t_0 är parametervärdet som svarar mot punkten $(0, 1, 1)$, d.v.s. $t_0 = 1$. Vi får

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}(1) = (3t^2 - 2t, 2t, 2t)\Big|_{t=1} = (1, 2, 2).$$

Den sökta tangentlinjen är alltså

$$\boldsymbol{r}_{\text{tang}}(s) = (0, 1, 1) + s\,(1, 2, 2).$$

b) Vi väljer tangeringspunkten som punkt på linjen $\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, 0)$. Linjens riktning är lika med kurvans riktning i tangeringspunkten,

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}(0),$$

där $t = 0$ svara mot punkten $(0, 0, 0)$. Alltså,

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}(0) = \big(3t^2 - 2t, 2t, 2t\big)\Big|_{t=0} = (0, 0, 0).$$

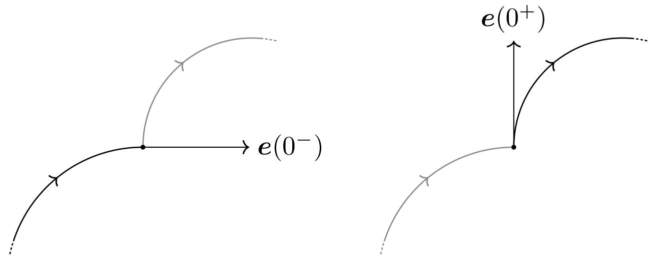
Att kurvan har nollvektorn som riktningsvektor betyder att parameterkurvan är singulär i punkten.

Detta beror på att kurvan (eller snarare parametriseringen) saktar ner och passerar punkten med fart noll. För att ändå få en uppfattning av kurvans riktning i punkten kan vi normalisera riktningsvektorn

$$\boldsymbol{e}(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\|}$$

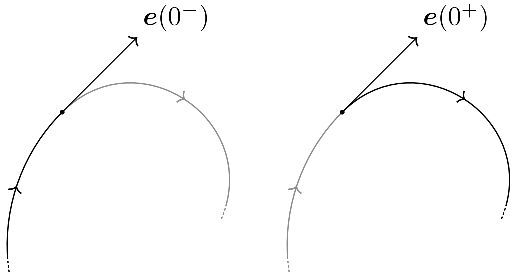
och bara betrakta hur riktningens enhetsvektor uppträder när $t \to 0$.

Det kan vara så att efter passagen fortsätter kurvan i en annan riktning.



Då kan vi givetvis inte tala om någon tangentriktning till kurvan; kurvan har en s.k. spets i punkten.

Men om det är så att kurvan fortsätter i samma riktning efter passagen, då är det meningsfullt att tala om en riktning hos kurvan i punkten.



Kurvans riktning ges alltså av

$$\lim_{t\to 0} \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\|}$$

om gränsvärdet existerar. Vi har att

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{\big(3t^2 - 2t, 2t, 2t\big)}{\big\|(3t^2 - 2t, 2t, 2t)\big\|} &= \lim_{t\to 0} \frac{(3t^2 - 2t, 2t, 2t)}{\sqrt{(3t^2 - 2t)^2 + (2t)^2 + (2t)^2}} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t(3t - 2, 2, 2)}{|t|\sqrt{(3t-2)^2 + 4 + 4}}\end{aligned}$$

Detta gränsvärde existerar inte eftersom vänster- och högergränsvärdena är olika (kom ihåg: $|t| = -t$ när $t < 0$ och $|t| = +t$ när $t > 0$),

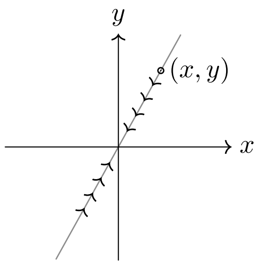
$$\lim_{t\to 0^-} \frac{t(3t-2,2,2)}{-t\sqrt{(3t-2)^2+4+4}} = -\big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\big),$$
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t(3t-2,2,2)}{+t\sqrt{(3t-2)^2+4+4}} = +\big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\big).$$

Svaret är alltså att det inte finns någon tangentlinje.

310a Sök gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x+y}$.

För att gränsvärdet ska existera måste gränsvärdesuttrycket närma sig ett och samma värde oavsett hur vi låter $(x,y) \to (0,0)$.

Ett första test kan därför vara att låta (x,y) närma sig origo längs en rät linje.



En rät linje genom origo kan allmänt skrivas i parameterformen

$$(x,y) = t\,(a,b) \qquad (t \text{ parameter}),$$

där (a,b) är riktningsvektorn för linjen och $t = 0$ svarar mot origo. När vi närmar oss origo längs denna linje blir gränsvärdet

$$\lim_{t\to 0} \frac{(at)^3+(bt)^3}{at+bt} = \lim_{t\to 0} t^2 \cdot \frac{a^3+b^3}{a+b} = 0.$$

Eftersom detta gränsvärde är oberoende av a och b spelar det ingen roll i vilken riktning vi närmar oss origo. Detta betyder *inte* att gränsvärdet måste existera (se övning 3.4 i Petermann II) men *om* gränsvärdet existerar är det lika med noll.

För att beräkna gränsvärdet ska vi skriva om gränsvärdet. Betraktar vi i gränsvärdeskvoten

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}$$

y som en konstant, så ser vi att nämnaren har ett nollställe i $x = -y$ och att täljaren också har en rot i $x = -y$. Faktorsatsen ger då att $x + y$ är en faktor i täljarpolynomet,

$$x^3+y^3 = (x+y)(x^2+Ax+B).$$

Den andra faktorn i högerledet får vi med en polynomdivision.

$$\begin{array}{l|l}
x^2 - xy \;+ y^2 & \\
\hline
x^3 + y^3 & \;x+y \\
\cline{2-2}
\underline{x^3 + x^2y} & \\
\quad - x^2y + y^3 & \\
\quad \underline{- x^2y - xy^2} & \\
\qquad\quad xy^2 + y^3 & \\
\qquad\quad \underline{xy^2 + y^3} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Alltså är

$$\frac{x^3+y^3}{x+y} = x^2 - xy + y^2.$$

Notera att högerledet är ett enkelt polynomuttryck som vi enkelt kan räkna ut gränsvärdet för,

$$\begin{aligned}\lim_{x,y\to 0} \frac{x^3+y^3}{x+y} &= \lim_{x,y\to 0} \big(x^2 - xy + y^2\big) = \lim_{x,y\to 0} x^2 - \lim_{x,y\to 0} xy + \lim_{x,y\to 0} y^2 \\ &= 0 - 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

310c Sök gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$.

Vi börjar med att undersöka gränsvärdet när vi låter (x,y) närmar sig origo längs en rät linje.

En allmän linje genom origo kan i parameterform skrivas som $(x,y) = t\,(a,b)$. När punkten närmar sig origo längs denna linje blir gränsvärdet

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0} \frac{at+bt}{(at)^2+at\cdot bt+(bt)^2}\\ &\qquad = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\cdot\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \begin{cases} 0, & \text{om } a+b=0,\\ \text{divergent}, & \text{annars.}\end{cases}\end{aligned}$$

Alltså existerar inte gränsvärdet.

310e Sök gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}$.

Som ett första test låter vi $(x,y)\to(0,0)$ längs en rät linje. En parametrisering av en linje genom origo är i formen $(x,y) = t\,(a,b)$. Gränsvärdet blir då

$$\lim_{t\to 0}\bigl((at)^2+(bt)^2\bigr)\,\sin\frac{1}{at\cdot bt} = \lim_{t\to 0} t^2\cdot(a^2+b^2)\sin\frac{1}{abt^2} = 0.$$

Gränsvärdet är alltså oberoende av a och b, d.v.s. oberoende av i vilken riktning punkten närmar sig origo. Precis som sagts tidigare innebär inte detta att gränsvärdet existerar. Testet kan bara användas för att sortera bort gränsvärden som inte existerar.

I gränsvärdesuttrycket ser vi att sinusfaktorn uppfyller

$$-1 \le \sin\frac{1}{xy} \le +1$$

så hela uttrycket uppfyller

$$-\bigl(x^2+y^2\bigr) \le \bigl(x^2+y^2\bigr)\,\sin\frac{1}{xy} \le \bigl(x^2+y^2\bigr)$$

och eftersom både vänster- och högerledet går mot noll då $(x,y)\to(0,0)$, går även mittenledet mot noll enligt instängningsprincipen. Alltså är

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\,\sin\frac{1}{xy} = 0.$$

415 Bestäm gradienten till funktionen

a) $z = x^2y^3 - 2x^2y$,

b) $z = \arctan\dfrac{y}{x}$, $x \ne 0$.

Gradienten till en funktion $z = z(x,y)$ är vektorn

$$\Bigl(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\Bigr).$$

När vi beräknar partialderivatan $\frac{\partial z}{\partial x}$ betraktar vi y som en konstant och deriverar z med avseende på x,

a) $\displaystyle \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\bigl(x^2y^3-2x^2y\bigr) = 2xy^3 - 4xy,$

b) $\displaystyle \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{1+\bigl(\frac{y}{x}\bigr)^2}\cdot\Bigl(-\frac{y}{x^2}\Bigr) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$

Partialderivatan $\frac{\partial z}{\partial y}$ beräknar vi på motsvarande sätt. Vi betraktar x som en konstant och deriverar med avseende på y,

a) $\displaystyle \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\bigl(x^2y^3-2x^2y\bigr) = x^2\cdot 3y^2 - 2x^2\cdot 1 = 3x^2y^2 - 2x^2,$

b) $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Gradientvektorn är alltså

a) $\bigl(2xy^3-4xy, 3x^2y^2-2x^2\bigr)$,

b) $\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$.

416 Bestäm partialderivatorna av första och andra ordningen till

a) $z = 2xy^2 - x^2y$,

b) $z = \arcsin\dfrac{y}{x}$, där $x<0$, $x^2 \neq y^2$,

c) $z = x\,e^{xy}$.

Funktionen $z = z(x,y)$ har två partialderivator av första ordningen

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{och} \quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Dessa två derivator får vi fram genom att betrakta y som en konstant och derivera z med avseende på x i det första fallet, och ha x som en konstant och derivera z med avseende på y i det andra fallet.

a) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\bigl(2xy^2-x^2y\bigr) = 2y^2-2xy,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\bigl(2xy^2-x^2y\bigr) = 2x\cdot 2y - x^2\cdot 1 = 4xy-x^2,$$

b) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\arcsin\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2\cdot\dfrac{1}{|x|}\sqrt{x^2-y^2}}$$
$$= \frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\arcsin\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\cdot\dfrac{1}{|x|}\sqrt{x^2-y^2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Notera att vi får $|x| = -x$ eftersom $x<0$ enligt uppgiftstexten.

c) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\bigl(x\,e^{xy}\bigr) = 1\cdot e^{xy} + x\cdot e^{xy}y = (1+xy)e^{xy},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\bigl(x\,e^{xy}\bigr) = x\,e^{xy}\cdot x = x^2e^{xy}.$$

Andra ordningens partialderivator får vi genom att derivera förstaderivatorerna ytterligare en gång,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\quad \text{och}\quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Man brukar skriva dessa derivator som

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\quad \text{och}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Innan vi sätter igång och deriverar noterar vi att eftersom uttrycken i uppgiftstexten är elementära uttryck (uppbyggda av elementära funktioner) så är andraderivatorerna kontinuerliga och då är blandderivatorna lika,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}.$$

Vi får nu att

a) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\bigl(2y^2-2xy\bigr) = 0-2y = -2y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\bigl(2y^2-2xy\bigr) = 4y-2x,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\bigl(4xy-x^2\bigr) = 4x,$$

b)
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$$
$$= -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}} + \frac{1}{x}\cdot\frac{-\frac{1}{2}y}{\bigl(x^2-y^2\bigr)^{3/2}}\cdot 2x$$
$$= -\frac{y}{x^2\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{y}{\bigl(x^2-y^2\bigr)^{3/2}} = -\frac{y(x^2-y^2)+yx^2}{x^2\bigl(x^2-y^2\bigr)^{3/2}}$$
$$= -\frac{y(2x^2-y^2)}{x^2(x^2-y^2)^{3/2}},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$$
$$= \frac{1\cdot x\sqrt{x^2-y^2} - y\cdot x\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2-y^2}}(-2y)}{\bigl(x\sqrt{x^2+y^2}\,\bigr)^2}$$
$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\bigl(x(x^2-y^2)+xy^2\bigr)}{x^2(x^2-y^2)} = \frac{x}{(x^2-y^2)^{3/2}},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{-1}{\sqrt{x^2-y^2}}$$
$$= -\frac{-\frac{1}{2}}{(x^2-y^2)^{3/2}}\cdot(-2y) = \frac{-y}{\bigl(x^2-y^2\bigr)^{3/2}},$$

c)
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Bigl((1+xy)e^{xy}\Bigr) = y\cdot e^{xy} + (1+xy)\cdot e^{xy}y$$
$$= y(2+xy)e^{xy},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\Bigl((1+xy)e^{xy}\Bigr)$$
$$= x\cdot e^{xy} + (1+xy)\cdot e^{xy}x = x(2+xy)e^{xy},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\bigl(x^2e^{xy}\bigr) = x^2e^{xy}\cdot x = x^3e^{xy}.$$

417 Beräkna i punkten $(1, \frac{1}{4}\pi)$ partialderivatorna av första ordningen av

a) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$,

b) $f(x,y) = \ln\tan\dfrac{y}{x}$.

Vi beräknar partialderivatorna och stoppar sedan in $x=1$ och $y=\frac{1}{4}\pi$.

a)
$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(1,\tfrac{1}{4}\pi\bigr) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)\Big|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}} = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x\,\Big|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}} = \frac{2}{1+\pi^2/16},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(1,\tfrac{1}{4}\pi\bigr) = \frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2+y^2)\Big|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}} = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y\,\Big|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}} = \frac{\pi/2}{1+\pi^2/16}.$$

b)
$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(1,\tfrac{1}{4}\pi\bigr) = \frac{\partial}{\partial x}\ln\tan\frac{y}{x}\,\Big|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}} = \frac{1}{\tan\dfrac{y}{x}}\cdot\frac{d}{dx}\tan\frac{y}{x}\,\Big|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}}$$
$$= \frac{1}{\tan\dfrac{y}{x}}\cdot\Bigl(1+\tan^2\frac{y}{x}\Bigr)\cdot\Bigl(-\frac{y}{x^2}\Bigr)\Big|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}}$$
$$= -\frac{y\bigl(1+\tan^2\dfrac{y}{x}\bigr)}{x^2\tan\dfrac{y}{x}}\,\Bigg|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}} = -\frac{\frac{\pi}{4}\cdot\bigl(1+\tan^2\frac{\pi}{4}\bigr)}{1^2\cdot\tan\frac{\pi}{4}}$$
$$= -\frac{\frac{\pi}{4}\cdot(1+1)}{1^2\cdot 1} = -\tfrac{1}{2}\pi,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(1,\tfrac{1}{4}\pi\bigr) = \frac{\partial}{\partial y}\ln\tan\frac{y}{x}\,\Big|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}} = \frac{1}{\tan\dfrac{y}{x}}\cdot\frac{d}{y}\tan\frac{y}{x}\,\Big|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}}$$
$$= \frac{1}{\tan\dfrac{y}{x}}\cdot\Bigl(1+\tan^2\frac{y}{x}\Bigr)\cdot\frac{1}{x}\,\Big|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}} = \frac{1+\tan^2\dfrac{y}{x}}{x\tan\dfrac{y}{x}}\,\Bigg|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}}$$
$$= \frac{1+\tan^2\frac{\pi}{4}}{1\cdot\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{1+1}{1\cdot 1} = 2.$$

419a Låt f vara en deriverbar funktion av en variabel. Visa att

$$x^2 z'_x - xy\, z'_y + y^2 = 0$$

då $z = \dfrac{y^2}{3x} + f(xy)$.

Med beteckningarna i uppgiften menar man

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{och} \quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

När vi beräknar z'_x deriverar vi

$$z = \frac{y^2}{3x} + f(xy)$$

med avseende på x och betraktar y som en konstant,

$$\begin{aligned} z'_x &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{y^2}{3x} + f(xy)\Big) = \frac{y^2}{3}\cdot\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\big(f(xy)\big) \\ &= \{\,\text{Kedjeregeln}\,\} = -\frac{y^2}{3x^2} + f'(xy)\frac{\partial}{\partial x}(xy) = -\frac{y^2}{3x^2} + yf'(xy). \end{aligned}$$

På motsvarande sätt deriverar vi med avseende på y och ser x som en konstant för att få

$$\begin{aligned} z'_y &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y^2}{3x} + f(xy)\Big) = \frac{2y}{3x} + \frac{\partial}{\partial y}\big(f(xy)\big) \\ &= \frac{2y}{3x} + f'(xy)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(xy) = \frac{2y}{3x} + xf'(xy). \end{aligned}$$

Nu får vi att

$$\begin{aligned} x^2 z'_x - xy\, z'_y + y^2 &= x^2\Big(-\frac{y^2}{3x^2} + yf'(xy)\Big) - xy\Big(\frac{2y}{3x} + xf'(xy)\Big) + y^2 \\ &= -\tfrac{1}{3}y^2 + x^2yf'(xy) - \tfrac{2}{3}y^3 - x^2yf'(xy) + y^2 \\ &= \big(-\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3} + 1\big)y^2 + (x^2y - x^2y)f'(xy) = 0, \end{aligned}$$

vilket visar likheten i uppgiftstexten.

419c Låt f vara en deriverbar funktion av en variabel. Visa att

$$x\, z'_x + 2y\, z'_y = nz$$

då $z = x^n f\big(y/x^2\big)$.

Med $z = x^n f\big(y/x^2\big)$ får vi att

$$\begin{aligned} z'_x &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\big(x^n f(y/x^2)\big) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\big(x^n\big)\cdot f(y/x^2) + x^n\cdot\frac{\partial}{\partial x}\big(f(y/x^2)\big) \\ &= nx^{n-1}f(y/x^2) + x^n f'(y/x^2)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{y}{x^2}\Big) \\ &= nx^{n-1}f(y/x^2) + x^n f'(y/x^2)\cdot\Big(-\frac{2y}{x^3}\Big) \\ &= nx^{n-1}f(y/x^2) - \tfrac{1}{2}x^{n-3}yf'(y/x^2), \\ z'_y &= \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\big(x^n f(y/x^2)\big) = x^n\frac{\partial}{\partial y}\big(f(y/x^2)\big) \\ &= x^n f'(y/x^2)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{x^2}\Big) = x^n f'(y/x^2)\cdot\frac{1}{x^2} = x^{n-2}f'(y/x^2). \end{aligned}$$

De båda leden i likheten i uppgiftstexten blir

$$\begin{aligned} \text{VL} &= x\, z'_x + 2y\, z'_y = x\big(nx^{n-1}f(y/x^2) - 2x^{n-3}yf'(y/x^2)\big) + 2y\cdot x^{n-2}f'(y/x^2) \\ &= nx^n f(y/x^2) + (-2x^{n-2}y + 2x^{n-2}y)f'(y/x^2) = nx^n f(y/x^2), \\ \text{HL} &= nz = nx^n f(y/x^2). \end{aligned}$$

Alltså är $\text{VL} = \text{HL}$ och likheten är uppfylld.

420 Verifiera att funktionen z definierad genom $z(x,y)=f\Big(\dfrac{x}{x^2+y^2}\Big)$ satisfierar differentialekvationen

$$2xy\,\frac{\partial z}{\partial x}+(y^2-x^2)\,\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

då f är en godtycklig deriverbar funktion av en variabel.

Vi har att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}f\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big)=\{\,\text{Kedjeregeln}\,\}\\
&=f'\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\\
&=f'\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\cdot\frac{1\cdot(x^2+y^2)-x\cdot(2x+0)}{(x^2+y^2)^2}\\
&=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\,f'\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big),\\
\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}f\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big)=\{\,\text{Kedjeregeln}\,\}\\
&=f'\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\\
&=f'\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\cdot\frac{-x}{(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\\
&=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,f'\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big).
\end{aligned}$$

Differentialekvationen blir då

$$\begin{aligned}
2xy\,\frac{\partial z}{\partial x}+(y^2-x^2)\,\frac{\partial z}{\partial y}&=2xy\cdot\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}f'\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\\
&\quad+(y^2-x^2)\cdot\Big(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,f'\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\Big)\\
&=\Big(\frac{2xy(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2xy(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\Big)f'\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big)=0.
\end{aligned}$$

423 Visa att $z=\dfrac{1}{\sqrt{y}}e^{-x^2/4y}$ satisfierar $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Genom att derivera får vi att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-x^2/4y}\Big)=\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-x^2/4y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{x^2}{4y}\Big)\\
&=\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-x^2/4y}\cdot\Big(-\frac{2x}{4y}\Big)=-\frac{x}{2y^{3/2}}e^{-x^2/4y},\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{x}{2y^{3/2}}e^{-x^2/4y}\Big)\\
&=-\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{2y^{3/2}}\Big)\cdot e^{-x^2/4y}-\frac{x}{2y^{3/2}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\big(e^{-x^2/4y}\big)\\
&=-\frac{1}{2y^{3/2}}\,e^{-x^2/4y}-\frac{x}{2y^{3/2}}\cdot e^{-x^2/4y}\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{x^2}{4y}\Big)\\
&=-\frac{1}{2y^{3/2}}\,e^{-x^2/4y}-\frac{x}{2y^{3/2}}\cdot e^{-x^2/4y}\cdot\Big(-\frac{2x}{4y}\Big)\\
&=\Big(-\frac{1}{2y^{3/2}}-\frac{x^2}{4y^{5/2}}\Big)\,e^{-x^2/4y}\\
\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{\sqrt{y}}\,e^{-x^2/4y}\Big)\\
&=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{\sqrt{y}}\Big)\cdot e^{-x^2/4y}+\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\big(e^{-x^2/4y}\big)\\
&=-\frac{1}{2y^{3/2}}\,e^{-x^2/4y}+\frac{1}{\sqrt{y}}\,e^{-x^2/4y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{x^2}{4y}\Big)\\
&=-\frac{1}{2y^{3/2}}\,e^{-x^2/4y}+\frac{1}{\sqrt{y}}\,e^{-x^2/4y}\cdot\frac{x^2}{4y^2}\\
&=\Big(-\frac{1}{2y^{3/2}}-\frac{x^2}{4y^{5/3}}\Big)\,e^{-x^2/4y}.
\end{aligned}$$

och då ser vi direkt att

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

426 Låt $z = (x^2 - y^2)\arctan\frac{y}{x} + xy\ln(x^2+y^2)$. Beräkna $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Vi får att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big((x^2-y^2)\arctan\frac{y}{x}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(xy\ln(x^2+y^2)\Big)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2)\cdot\arctan\frac{y}{x} + (x^2-y^2)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x}\\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x}(xy)\cdot\ln(x^2+y^2) + xy\cdot\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2+y^2)\\
&= 2x\cdot\arctan\frac{y}{x} + (x^2-y^2)\cdot\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{y}{x}\Big)\\
&\quad + y\cdot\ln(x^2+y^2) + xy\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)\\
&= 2x\cdot\arctan\frac{y}{x} + (x^2-y^2)\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\Big(-\frac{y}{x^2}\Big)\\
&\quad + y\cdot\ln(x^2+y^2) + \frac{xy}{x^2+y^2}\cdot 2x\\
&= 2x\arctan\frac{y}{x} - \frac{x^2y-y^3}{x^2+y^2} + y\cdot\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}\\
&= 2x\arctan\frac{y}{x} + \frac{(x^2+y^2)y}{x^2+y^2} + y\ln(x^2+y^2)\\
&= 2x\arctan\frac{y}{x} + y + y\ln(x^2+y^2),\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(2x\arctan\frac{y}{x}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}y + \frac{\partial}{\partial x}\Big(y\ln(x^2+y^2)\Big)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}(2x)\cdot\arctan\frac{y}{x} + 2x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x}\\
&\quad + 0 + y\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)\\
&= 2\cdot\arctan\frac{y}{x} + 2x\cdot\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{y}{x}\Big) + \frac{y}{x^2+y^2}\cdot 2x\\
&= 2\arctan\frac{y}{x} + 2x\cdot\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\Big(-\frac{y}{x^2}\Big) + \frac{2xy}{x^2+y^2}\\
&= 2\arctan\frac{y}{x} - \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2}\\
&= 2\arctan\frac{y}{x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big((x^2-y^2)\arctan\frac{y}{x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(xy\ln(x^2+y^2)\Big)\\
&= \frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2)\cdot\arctan\frac{y}{x} + (x^2-y^2)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\arctan\frac{y}{x}\\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}(xy)\cdot\ln(x^2+y^2) + xy\cdot\frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2+y^2)\\
&= -2y\cdot\arctan\frac{y}{x} + (x^2-y^2)\cdot\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{x}\Big)\\
&\quad + x\cdot\ln(x^2+y^2) + xy\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\\
&= -2y\arctan\frac{y}{x} + (x^2-y^2)\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{1}{x}\\
&\quad + x\ln(x^2+y^2) - \frac{xy}{x^2+y^2}\cdot 2y\\
&= -2y\arctan\frac{y}{x} - \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} + x\ln(x^2+y^2) - \frac{2xy^2}{x^2+y^2}\\
&= -2y\arctan\frac{y}{x} - \frac{x(x^2+y^2)}{x^2+y^2} + x\ln(x^2+y^2)\\
&= -2y\arctan\frac{y}{x} - x + x\ln(x^2+y^2),\\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(-2y\arctan\frac{y}{x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}(-x) + \frac{\partial}{\partial y}\big(x\ln(x^2+y^2)\big)\\
&= \frac{\partial}{\partial y}(-2y)\cdot\arctan\frac{y}{x} - 2y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\arctan\frac{y}{x}\\
&\quad + 0 + x\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\\
&= -2\arctan\frac{y}{x} - 2y\cdot\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{x}\Big) + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot 2y\\
&= -2\arctan\frac{y}{x} - 2y\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{2xy}{x^2+y^2}\\
&= -2\arctan\frac{y}{x} - \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2} = -2\arctan\frac{y}{x}.
\end{aligned}$$

Alltså är

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\arctan\frac{y}{x} - 2\arctan\frac{y}{x} = 0.$$

430 Visa att funktionen $f(x,y)=\cos(x-y)\cdot\cosh(x+y)$ satisfierar differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

Eftersom

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\,\cosh x &= \mathrm{D}\,\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x,\\ \mathrm{D}\,\sinh x &= \mathrm{D}\,\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x,\end{aligned}$$

så får vi att

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\cos(x-y)\cdot\cosh(x+y)+\cos(x-y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\cosh(x+y)\\ &= -\sin(x-y)\cdot\cosh(x+y)+\cos(x-y)\cdot\sinh(x+y),\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\frac{\partial}{\partial x}\sin(x-y)\cdot\cosh(x+y)-\sin(x-y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\cosh(x+y)\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial x}\cos(x-y)\cdot\sinh(x+y)+\cos(x-y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\sinh(x+y)\\ &= -\cos(x-y)\cdot\cosh(x+y)-\sin(x-y)\cdot\sinh(x+y)\\ &\quad-\sin(x-y)\cdot\sinh(x+y)+\cos(x-y)\cdot\cosh(x+y)\\ &= -2\sin(x-y)\cdot\sinh(x+y),\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\cos(x-y)\cdot\cosh(x+y)+\cos(x-y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\cosh(x+y)\\ &= -\sin(x-y)\cdot(-1)\cdot\cosh(x+y)+\cos(x-y)\cdot\sinh(x+y)\\ &= \sin(x-y)\cdot\cosh(x+y)+\cos(x-y)\cdot\sinh(x+y),\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\sin(x-y)\cdot\cosh(x+y)+\sin(x-y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\cosh(x+y)\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial y}\cos(x-y)\cdot\sinh(x+y)+\cos(x-y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\sinh(x+y)\\ &= \cos(x-y)\cdot(-1)\cdot\cosh(x+y)+\sin(x-y)\cdot\sinh(x+y)\\ &\quad-\sin(x-y)\cdot(-1)\cdot\sinh(x+y)+\cos(x-y)\cdot\cosh(x+y)\\ &= 2\sin(x-y)\cdot\sinh(x+y).\end{aligned}$$

Därmed är

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2\sin(x-y)\sinh(x+y)+2\sin(x-y)\sinh(x+y)=0.$$

433 Låt f vara en två gånger deriverbar funktion av typen $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$. Sätt $z(x,y)=xf(x+2y)$. Visa att $z''_{xx}-z''_{xy}+\frac{1}{4}z''_{yy}=0$.

Vi får att

$$\begin{aligned}z'_x &= \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\big(xf(x+2y)\big)=1\cdot f(x+2y)+x\cdot\frac{\partial}{\partial x}f(x+2y)\\ &= f(x+2y)+x\cdot f'(x+2y)\,\frac{\partial}{\partial x}(x+2y)\\ &= f(x+2y)+xf'(x+2y)\cdot 1,\\ z''_{xx} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(f(x+2y)\Big)+\frac{\partial}{\partial x}\Big(xf'(x+2y)\Big)\\ &= f'(x+2y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x+2y)+1\cdot f'(x+2y)+x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\,f'(x+2y)\\ &= f'(x+2y)\cdot 1+f'(x+2y)+x\cdot f''(x+2y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x+2y)\\ &= 2f'(x+2y)+xf''(x+2y),\\ z''_{xy} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}f(x+2y)+\frac{\partial}{\partial y}\big(xf'(x+2y)\big)\\ &= f'(x+2y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x+2y)+xf''(x+2y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x+2y)\\ &= 2f'(x+2y)+2xf''(x+2y),\\ z'_y &= \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\big(xf(x+2y)\big)\\ &= xf'(x+2y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x+2y)=2xf'(x+2y),\end{aligned}$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\big(2xf'(x+2y)\big)$$
$$= 2xf''(x+2y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x+2y) = 4xf''(x+2y).$$

Alltså är

$$\begin{aligned} &z''_{xx} - z''_{xy} + \tfrac{1}{4}z''_{yy} \\ &\qquad = 2f'(x+2y) + xf''(x+2y) - 2f'(x+2y) \\ &\qquad\quad - 2xf''(x+2y) + xf''(x+2y) \\ &\qquad = (2-2)f'(x+2y) + (x-2x+x)f''(x+2y) = 0. \end{aligned}$$

439 Bestäm riktningsderivatan av funktionen $f(x,y,z) = x\arctan\dfrac{y}{z}$ i punkten $(1,2,2)$ i riktning mot origo.

Riktningsderivatan av en differentierbar funktion f i en viss riktning $\boldsymbol{e}$ ges av

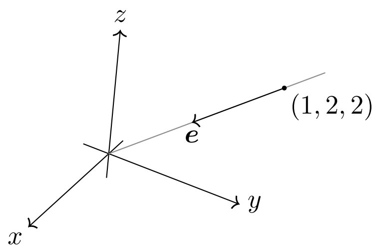
$$f'_{\boldsymbol{e}}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)\cdot\boldsymbol{e}, \qquad (*)$$

där ∇f är gradienten till f och $\boldsymbol{e}$ är enhetsvektor.

Eftersom f är uppbyggd av elementära funktioner och definierad i punkten $(1,2,2)$ är f differentierbar i punkten.

I vårt fall ska vi välja $\boldsymbol{e}$ som riktningen hos vektorn från $P = (1,2,2)$ till origo $O = (0,0,0)$, d.v.s.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e} &= \frac{\overrightarrow{PO}}{\|\overrightarrow{PO}\|} = \frac{(0-1,0-2,0-2)}{\|(0-1,0-2,0-2)\|} \\ &= \frac{(-1,-2,-2)}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-2)^2}} \\ &= \frac{(-1,-2,-2)}{3} = \big(-\tfrac{1}{3},-\tfrac{2}{3},-\tfrac{2}{3}\big) \end{aligned}$$



Gradienten till f är

$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\Big),$$

där partialderivatorna är

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(x\arctan\frac{y}{z}\Big) = \arctan\frac{y}{z}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(x\arctan\frac{y}{z}\Big) = x\cdot\frac{1}{1+\big(\frac{y}{z}\big)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{z}\Big) \\ &= \frac{x}{1+\big(\frac{y}{z}\big)^2}\cdot\frac{1}{z} = \frac{xz}{y^2+z^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\Big(x\arctan\frac{y}{z}\Big) = x\cdot\frac{1}{1+\big(\frac{y}{z}\big)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{y}{z}\Big) \\ &= \frac{x}{1+\big(\frac{y}{z}\big)^2}\cdot\Big(-\frac{y}{z^2}\Big) = -\frac{xy}{y^2+z^2}. \end{aligned}$$

Vi har alltså att

$$\nabla f(x,y,z) = \Big(\arctan\frac{y}{z},\frac{xz}{y^2+z^2},-\frac{xy}{y^2+z^2}\Big)$$

och speciellt

$$\nabla f(1,2,2) = \Big(\arctan\frac{2}{2},\frac{1\cdot 2}{2^2+2^2},-\frac{1\cdot 2}{2^2+2^2}\Big) = \big(\tfrac{1}{4}\pi,\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{4}\big).$$

Riktningsderivatan i punkten $(1,2,2)$ i riktningen $\boldsymbol{e} = \big(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\big)$ blir därmed

$$\begin{aligned} f'_{\boldsymbol{e}}(1,2,2) &= \nabla f(1,2,2)\cdot\boldsymbol{e} = \big(\tfrac{1}{4}\pi,\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{4}\big)\cdot\big(-\tfrac{1}{3},-\tfrac{2}{3},-\tfrac{2}{3}\big) \\ &= \tfrac{1}{4}\pi\cdot\big(-\tfrac{1}{3}\big) + \tfrac{1}{4}\cdot\big(-\tfrac{2}{3}\big) + \big(-\tfrac{1}{4}\big)\cdot\big(-\tfrac{2}{3}\big) = -\tfrac{1}{12}\pi. \end{aligned}$$

440 Låt $z(x,y) = 3\arctan e^{2x-3y} - 10\ln(2+x^2y)$. Beräkna riktningsderivatan av z i $P=(3,2)$ i riktning mot $Q=(11,-4)$.

Funktionen $z(x,y)$ har i punkten $P=(3,2)$ och riktningen $\overrightarrow{PQ} = (11-3,-4-2) = (8,-6)$ derivatan

$$z'_{\boldsymbol{e}}(3,2) = \nabla z(3,2)\cdot \boldsymbol{e}.$$

om z är differentierbar i $(3,2)$.

Eftersom z är uppbyggd av elementära funktioner och definierad i punkten P är z differentierbar där.

Vektorn $\boldsymbol{e}$ är enhetsvektorn i $\overrightarrow{PQ}$-riktningen, d.v.s.

$$\boldsymbol{e} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{(8,-6)}{\sqrt{8^2+(-6)^2}} = \tfrac{1}{\sqrt{100}}(8,-6) = \bigl(\tfrac{4}{5},-\tfrac{3}{5}\bigr).$$

Gradienten ∇z har komponenterna

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\Bigl(3\arctan e^{2x-3y}\Bigr) - \frac{\partial}{\partial x}\Bigl(10\ln(2+x^2y)\Bigr)\\
&= \frac{\partial}{\partial\,\square}\Bigl(3\arctan e^{2x-3y}\Bigr)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\,e^{2x-3y} - \frac{\partial}{\partial\,\square}\Bigl(10\ln(2+x^2y)\Bigr)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(2+x^2y)\\
&= \frac{3}{1+\bigl(e^{2x-3y}\bigr)^2}\cdot 2\,e^{2x-3y} - \frac{10}{2+x^2y}\cdot 2xy\\
&= \frac{6\,e^{2x-3y}}{1+e^{4x-6y}} - \frac{20xy}{2+x^2y},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\Bigl(3\arctan e^{2x-3y}\Bigr) - \frac{\partial}{\partial y}\Bigl(10\ln(2+x^2y)\Bigr)\\
&= \frac{\partial}{\partial\,\square}\Bigl(3\arctan e^{2x-3y}\Bigr)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\,e^{2x-3y} - \frac{\partial}{\partial\,\square}\Bigl(10\ln(2+x^2y)\Bigr)\\
&= \frac{3}{1+\bigl(e^{2x-3y}\bigr)^2}\cdot(-3e^{2x-3y}) - \frac{10}{2+x^2y}\cdot x^2\\
&= -\frac{9e^{2x-3y}}{1+e^{4x-6y}} - \frac{10x^2}{2+x^2y}.
\end{aligned}$$

I punkten $P=(3,2)$ har dessa partialderivator värdet

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}(3,2) &= \Bigl(\frac{6e^{2x-3y}}{1+e^{4x-6y}} - \frac{20xy}{2+x^2y}\Bigr)\Big|_{\substack{x=3\\y=2}}\\
&= \frac{6e^{2\cdot3-3\cdot2}}{1+e^{4\cdot3-6\cdot2}} - \frac{20\cdot3\cdot2}{2+3^2\cdot2} = \frac{6}{1+1} - \frac{120}{20} = -3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y}(3,2) &= \Bigl(-\frac{9e^{2x-3y}}{1+e^{4x-6y}} - \frac{10x^2}{2+x^2y}\Bigr)\Big|_{\substack{x=3\\y=2}}\\
&= -\frac{9e^{2\cdot3-3\cdot2}}{1+e^{4\cdot3-6\cdot2}} - \frac{10\cdot3^2}{2+3^2\cdot2} = -\frac{9}{1+1} - \frac{90}{20} = -9.
\end{aligned}$$

Alltså är $\nabla z(3,2) = (-3,-9)$ och vi får att riktningsderivatan är

$$\begin{aligned}
z'_{\boldsymbol{e}}(3,2) &= \nabla z(3,2)\cdot\boldsymbol{e} = (-3,-9)\cdot\bigl(\tfrac{4}{5},-\tfrac{3}{5}\bigr)\\
&= (-3)\cdot\tfrac{4}{5} + (-9)\cdot\bigl(-\tfrac{3}{5}\bigr) = 3.
\end{aligned}$$

441 Bestäm riktningsderivatan av funktionen $f(x,y,z) = x^{2y}+yz$ i punkten $(1,1,1)$ i riktning av vektorn $\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

Funktionen f har partialderivatorna

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\bigl(x^{2y}+yx\bigr) = 2y\,x^{2y-1},\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\bigl(x^{2y}+yz\bigr) = \frac{\partial}{\partial y}\bigl(e^{2y\ln x}+yz\bigr) = e^{2y\ln x}\cdot 2\ln x + z\\
&= x^{2y}\cdot 2\ln x + z,\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\bigl(x^{2y}+yz\bigr) = y,
\end{aligned}$$

och de är kontinuerliga i närheten av $(x,y,z)=(1,1,1)$ eftersom partialderivatorna är uppbyggda av elementära funktioner och uttrycken är definierade i $(1,1,1)$. Funktionen f är därmed differentierbar i punkten och riktningsderivatan ges av

$$\begin{aligned}
f'_{\boldsymbol{v}}(1,1,1) &= \nabla f(1,1,1)\cdot\boldsymbol{v} = \Bigl(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1), \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)\Bigr)\cdot\boldsymbol{v}\\
&= \bigl(2\cdot1\cdot1^{2\cdot1-1}, 1^{2\cdot1}\cdot 2\ln 1 + 1, 1\bigr)\cdot\tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{3}}(2,1,1)\cdot(1,1,1) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\bigl(2\cdot1+1\cdot1+1\cdot1\bigr) = \tfrac{4}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

443 Bestäm derivatan av funktionen f given av $f(x,y,z) = (xy)^{yz}$ i punkten $A = (1,2,3)$ i riktning mot $B = (2,4,5)$.

Vi har att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= yz(xy)^{yz-1}\cdot y = y^2 z(xy)^{yz-1},\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\,e^{yz\ln(xy)} = e^{yz\ln(xy)}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\bigl(yz\ln(xy)\bigr)\\
&= (xy)^{yz}\Bigl(z\ln(xy) + yz\cdot\frac{1}{xy}\cdot x\Bigr) = (xy)^{yz}\bigl(z\ln(xy)+z\bigr),\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}e^{yz\ln(xy)} = e^{yz\ln(xy)}\cdot y\ln(xy) = (xy)^{yz}\cdot y\ln(xy).
\end{aligned}$$

Partialderivatorna är uppbyggda av elementära funktioner och de är definierade i punkten $(1,2,3)$ så partialderivatorna är kontinuerliga kring punkten och då är f differentierbar i punkten.

Riktningsderivatan av f i riktningen $\overrightarrow{AB}$ ges av

$$\begin{aligned}
f_{\overrightarrow{AB}}(1,2,3) &= \nabla f(1,2,3)\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\\
&= \Bigl(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3), \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3)\Bigr)\cdot\frac{B-A}{\|B-A\|}\\
&= \bigl(2^2\cdot 3\cdot(1\cdot 2)^{2\cdot 3-1}, (1\cdot 2)^{2\cdot 3}\cdot(3\ln(1\cdot 2)+3),\\
&\qquad (1\cdot 2)^{2\cdot 3}\cdot 2\ln(1\cdot 2)\bigr)\cdot\frac{(2-1,4-2,5-3)}{\sqrt{(2-1)^2+(4-2)^2+(5-3)^2}}\\
&= \bigl(384, 192\ln 2+192, 128\ln 2\bigr)\cdot\tfrac{1}{3}(1,2,2)\\
&= \tfrac{1}{3}\bigl(384\cdot 1 + (192\ln 2+192)\cdot 2 + 2\cdot 128\ln 2\bigr)\\
&= \tfrac{1}{3}(768+640\ln 2) = 256 + \frac{640}{3}\ln 2.
\end{aligned}$$

446 Låt $f(x,y)$ vara en differentierbar funktion och $\boldsymbol{v} = (a,b)$ samt $\boldsymbol{s} = (b,-a)$ två enhetsvektorer. Visa att $(f'_{\boldsymbol{s}})^2 + (f'_{\boldsymbol{v}})^2 = (f'_x)^2 + (f'_y)^2$.

Eftersom f är differentierbar och $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{s}$ är enhetsvektorer så är

$$\begin{aligned}
f'_{\boldsymbol{v}} &= \nabla f\cdot\boldsymbol{v} = \bigl(f'_x, f'_y\bigr)\cdot(a,b) = af'_x + bf'_y,\\
f'_{\boldsymbol{s}} &= \nabla f\cdot\boldsymbol{s} = \bigl(f'_x, f'_y\bigr)\cdot(b,-a) = bf'_x - af'_y.
\end{aligned}$$

Vi får därför att

$$\begin{aligned}
(f'_{\boldsymbol{v}})^2 + (f'_{\boldsymbol{s}})^2 &= \bigl(af'_x + bf'_y\bigr)^2 + \bigl(bf'_x - af'_y\bigr)^2\\
&= a^2(f'_x)^2 + 2abf'_xf'_y + b^2(f'_y)^2 + b^2(f'_x)^2 - 2abf'_xf'_y + a^2(f'_y)^2\\
&= (a^2+b^2)(f'_x)^2 + (a^2+b^2)(f'_y)^2.
\end{aligned}$$

Eftersom $\boldsymbol{v}$ är en enhetsvektor är

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 = a^2+b^2 = 1,$$

vilket ger att

$$(f'_{\boldsymbol{v}})^2 + (f'_{\boldsymbol{s}})^2 = (f'_x)^2 + (f'_y)^2.$$

448 Om $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ och $(x,y) \neq (0,0)$ samt $f(0,0)=0$. Visa att f är deriverbar, men att $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(0,0)$ inte existerar om $\boldsymbol{s} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$.

Funktionen f är deriverbar i origo om partialderivatorna

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

existerar. Eftersom f är definierat av ett elementärt uttryck som är odefinierat i origo (varför man givit en separat definition av f där) så följer det inte automatiskt att f är deriverbar.

För att avgöra om partialderivatorna existerar i origo undersöker vi derivatans definition. Partialderivatan $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ är definierad om gränsvärdet

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$$

existerar. Vi har att

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h\cdot 0}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Detta visar att $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existerar och är lika med 0 i origo. På motsvarande sätt har vi att

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{0\cdot h}{0^2+h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

existerar och är lika med 0. Funktionen f är alltså deriverbar i origo.

Riktningsderivatan av f i origo i riktningem $\boldsymbol{s} = (s_x, s_y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ defineras som

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+s_x h, 0+s_y h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\frac{h}{\sqrt{2}}\cdot\frac{h}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^2/2}{h^2/2+h^2/2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}\end{aligned}$$

och eftersom detta gränsvärde inte existerar är denna riktningsderivata inte definierad.

601 Bestäm alla singulära punkter på parameterkurvan

a) $x = 2t + t^2,$
$y = t - t^2$

b) $x = \cos 2t,$
$y = \cos t.$

En parameterkurva har singulära punkter där

1. $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ inte är kontinuerlig, eller
2. $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{0}$.

Eftersom båda parameterkurvorna ges av elementära funktioner (polynom respektive trigonometriska funktioner) så existerar derivatan $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ överallt och är kontinuerlig, och fall 1 inträffar inte. Vi behöver alltså bara undersöka fall 2.

a) Riktningsvektorn $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ är nollvektorn då

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = (2+2t, 1-2t) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2+2t &= 0 \\ 1-2t &= 0 \end{aligned}$$

Detta ekvationssystem saknar lösning (första ekvationen ger $t=-1$ vilket inte uppfyller den andra ekvationen) vilket betyder att kurvan saknar singulära punkter.

b) Riktningsvektorn $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ lika med nollvektorn ger

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = (-2\sin 2t, -\sin t) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \sin 2t &= 0 \\ \sin t &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2\sin t \cos t &= 0 \\ \sin t &= 0 \end{aligned}$$

Vi har alltså singulära punkter när $t = n\pi$ för något heltal. Dessa parametervärden svarar mot punkterna

n udda: $\quad \boldsymbol{r}(n\pi) = (\cos n\pi, \cos 2n\pi) = (-1,1),$

n jämn: $\quad \boldsymbol{r}(n\pi) = (\cos n\pi, \cos 2n\pi) = (1,1).$

Därmed är $(1,1)$ och $(-1,1)$ singulära punkter på kurvan.

614 Bestäm ekvationen för tangentplanet till den hyperboliska paraboloiden $z = x^2 - 4y^2$ i punkten $(1, -1, -3)$.

För att bestämma tangentplanet behöver vi en punkt $\boldsymbol{r}_0$ i planet och planets normalvektor $\boldsymbol{n}$.

Som punkt i planet väljer vi tangeringspunkten $\boldsymbol{r}_0 = (1, -1, -3)$. Genom att skriva om paraboloidens ekvation som

$$z - x^2 + 4y^2 = 0$$

ser vi att paraboloiden är 0-nivåytan till funktionen

$$g(x, y, z) = z - x^2 + 4y^2.$$

Funktionen g:s 0-nivåyta har i punkten $(1, -1, -3)$ normalvektorn

$$\begin{aligned}\nabla g(1,-1,-3) &= \Bigl(\frac{\partial g}{\partial x}(1,-1,-3), \frac{\partial g}{\partial y}(1,-1,-3), \frac{\partial g}{\partial z}(1,-1,-3)\Bigr)\\ &= \bigl(-2x, 8y, 1\bigr)\Big|_{\substack{x=1\\y=-1\\z=-3}} = (-2,-8,1).\end{aligned}$$

Denna normalvektor är också normalvektor till tangentplanet, så vi sätter $\boldsymbol{n} = (-2, -8, 1)$. Tangentplanet har då ekvationen

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (-2,-8,1)\cdot\bigl((x,y,z)-(1,-1,-3)\bigr) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad (-2,-8,1)\cdot(x-1, y+1, z+3) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad -2(x-1) - 8(y+1) + (z+3) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad -2x - 8y + z = 3.\end{aligned}$$

615 Bestäm ekvationen för tangentplanet till $x^3 - xyz + yz^2 - z^3 = 0$ i punkten $(1, 1, 1)$.

Vi behöver en punkt $\boldsymbol{r}_0$ i planet och en normalvektor $\boldsymbol{n}$ till planet för att bestämma planets ekvation.

Vi väljer tangeringspunkten som punkt i planet $\boldsymbol{r}_0 = (1, 1, 1)$. Om vi sätter

$$g(x, y, z) = x^3 - xyz + yz^2 - z^3$$

så ser vi att ytan i uppgiftstexten är 0-nivåytan till g. I punkten $(1, 1, 1)$ har därför ytan normalvektorn

$$\begin{aligned}\nabla g(1,1,1) &= \Bigl(\frac{\partial g}{\partial x}(1,1,1), \frac{\partial g}{\partial y}(1,1,1), \frac{\partial g}{\partial z}(1,1,1)\Bigr)\\ &= \bigl(3x^2 - yz, -xz + z^2, -xy + 2yz - 3z^2\bigr)\Big|_{x=y=z=1} = (2,0,-2).\end{aligned}$$

Vektorn $(2, 0, -2)$ är även normalvektor till tangentplanet. Sätt därför $\boldsymbol{n} = (2, 0, -2)$. Tangentplanets ekvation blir alltså

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (2,0,-2)\cdot\bigl((x,y,z)-(1,1,1)\bigr) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad (2,0,-2)\cdot(x-1, y-1, z-1) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad 2(x-1) - 2(z-1) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad x - z = 0.\end{aligned}$$

622 Visa att planet $2x + 2y - 3z = 2$ tangerar ytan $2x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 4$.

Tangeringspunkten tillhör både planet och ytan, och uppfyller därför bådas ekvationer

$$2x + 2y - 3z = 2, \qquad (1)$$

$$2x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 4. \qquad (2)$$

I tangeringspunkten ska dessutom planets normal $(2,2,-3)$ vara parallell med ytans normal som ges av

$$\begin{aligned}&\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\bigl(2x^2+2y^2-3z^2-4\bigr),\frac{\partial}{\partial y}\bigl(2x^2+2y^2-3z^2-4\bigr),\\&\qquad\frac{\partial}{\partial z}\bigl(2x^2+2y^2-3z^2-4\bigr)\Bigr)=(4x,4y-6z),\end{aligned}$$

d.v.s. det ska finnas en skalär α så att

$$\alpha(2,2,-3)=(4x,4y,-6z),$$

eller utskrivet i komponenter

$$2\alpha=4x, \tag{3}$$
$$2\alpha=4y, \tag{4}$$
$$-3\alpha=-6z. \tag{5}$$

Vi ska alltså bestämma alla punkter (x,y,z) som uppfyller ekvation (1) till (5). Från (3), (4) och (5) får vi att

$$x=\tfrac{1}{2}\alpha,\quad y=\tfrac{1}{2}\alpha,\quad z=\tfrac{1}{2}\alpha,$$

d.v.s. $x=y=z$. Detta insatt i (1) ger

$$2x+2x-3x=2\qquad\Leftrightarrow\qquad x=2,$$

vilket betyder att $y=z=2$. Vi måste även kontrollera att (2) är uppfylld, d.v.s.

$$2\cdot 2^2+2\cdot 2^2-3\cdot 2^2=2^2=4.$$

Alltså tangerar planet $2x+2y-3z=2$ ytan $2x^2+2y^2-3z^2=4$ i punkten $(2,2,2)$.

624 Bestäm konstanten a så att planet $a+y+z=2x$ tangerar sfären $x^2+y^2+z^2=2x$.

En tangeringspunkt måste tillhöra planet och sfären. Den uppfyller således bådas ekvationer,

$$a+y+z=2x, \tag{1}$$
$$x^2+y^2+z^2=2x. \tag{2}$$

Planet och sfären måste också ha parallella normalvektorer i tangeringspunkten. Planets normalvektor kan vi direkt avläsa från planets ekvation $(-2,1,1)$ (flytta över x i vänsterledet). Sfärens normalvektor ges av

$$\begin{aligned}&\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\bigl(x^2-2x+y^2+z^2\bigr),\frac{\partial}{\partial y}\bigl(x^2-2x+y^2+z^2\bigr),\\&\qquad\frac{\partial}{\partial z}\bigl(x^2-2x+y^2+z^2\bigr)\Bigr)=(2x-2,2y,2z).\end{aligned}$$

I tangeringspunkten ska det alltså finnas en skalär λ så att

$$\lambda\,(-2,1,1)=(2x-2,2y,2z),$$

d.v.s.

$$-2\lambda=2x-2, \tag{3}$$
$$\lambda=2y, \tag{4}$$
$$\lambda=2z. \tag{5}$$

Från (3), (4) och (5) får vi att

$$x=-\lambda+1,\quad y=\lambda/2,\quad z=\lambda/2,$$

d.v.s. $x=-2y+1$, $z=y$. Detta insatt i (1) och (2) ger

$$a+y+y=2(-2y+1)$$
$$(-2y+1)^2+y^2+y^2=2(-2y+1)$$

vilket ger

$$a+6y=2, \tag{6}$$
$$6y^2-1=0. \tag{7}$$

Från (7) får vi att $y=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ vilket ger två möjliga a-värden

$$a=2-6y=2-6\,\tfrac{1}{\sqrt{6}}=2-\sqrt{6},$$
$$a=2-6y=2-6\,\bigl(-\tfrac{1}{\sqrt{6}}\bigr)=2+\sqrt{6}.$$