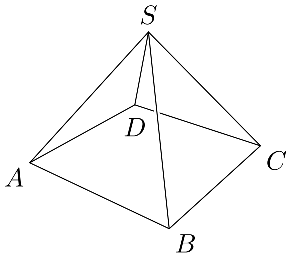
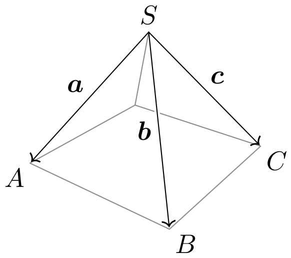
Avsnitt 2, Vektorer

W109 $ABCD$ är basytan (en kvadrat) i en regelbunden fyrsidig pyramid med spetsen S. Låt $\overrightarrow{SA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{SB} = \boldsymbol{b}$ och $\overrightarrow{SC} = \boldsymbol{c}$. Beräkna $\overrightarrow{SD}$.

Vi ritar först en figur av hur pyramiden måste se ut.

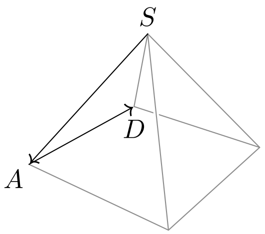


Vi kan också rita in de vektorer som är givna i uppgiftstexten.



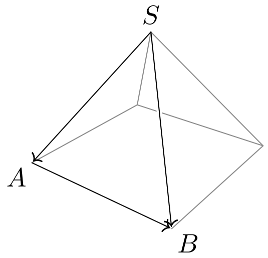
Vi ska nu försöka uttrycka vektorn $\overrightarrow{SD}$ i de givna vektorerna $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$.

Som ett första steg kan vi uttrycka $\overrightarrow{SD}$ genom att gå via hörnet A,

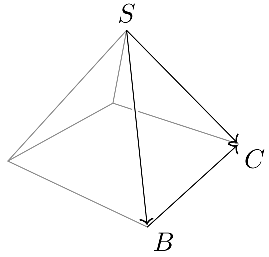


$$\begin{aligned}\overrightarrow{SD} &= \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD}\\ &= \boldsymbol{a} + \overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Nu behöver vi uttrycka en av baskvadratens kantvektorer $\overrightarrow{AD}$ i $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$. Om vi tittar på de övriga hörnen och kanterna i kvadraten så ser vi att vissa kantvektorer kan vi uttrycka med $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$.

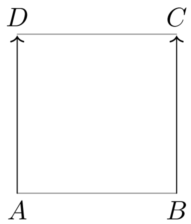


$$\begin{aligned}&\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB}\\ \Leftrightarrow\quad &\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a},\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}&\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SC}\\ \Leftrightarrow\quad &\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

Eftersom basytan är en kvadrat så är $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}$.

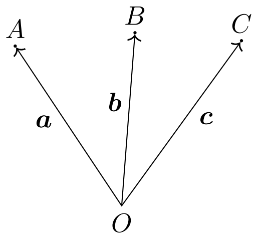


Alltså är

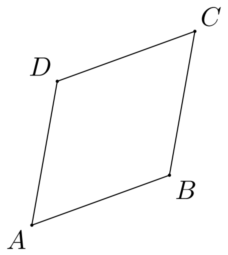
$$\overrightarrow{SD} = \boldsymbol{a} + \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}.$$

W110 O, A, B och C är fyra givna punkter i rummet med $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ och $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$. Bestäm en vektor $\overrightarrow{OD}$ uttryckt i $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$, så att de fyra punkterna A, B, C och D (i valfri ordning) blir hörnen i ett parallellogram.

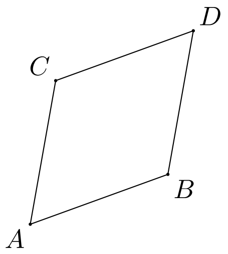
Låt oss rita upp en figur av den information som är given i uppgiften.



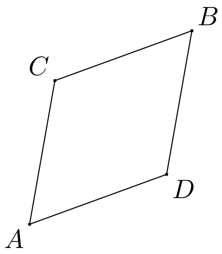
Vad vi söker är en femte punkt D så att punkterna A, B, C och D bildar hörnen i ett parallellogram.



Figuren är inte helt korrekt, för enligt uppgiftstexten behöver inte hörnpunkterna vara i någon speciell ordning, och då finns två andra möjliga konfigurationer.



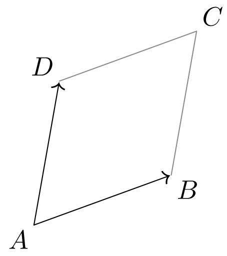
A granne med B och C



A granne med C och D

Men vi kan börja med att undersöka om det är möjligt att välja $\overrightarrow{OD}$ så att den första konfigurationen uppstår. Skulle det visa sig att det inte är möjligt, då kan vi undersöka de övriga två fallen.

Det som utmärker ett parallellogram är att motstående kanter är lika långa och parallella. Uttryckt med vektorer betyder detta att



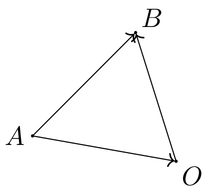
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

Vi kan också formulera uppgiften som

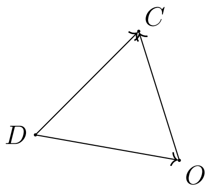
Givet: $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ och $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$.

Bestäm: $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{OD}$, så att $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ och $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

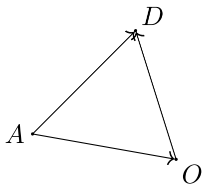
Eftersom vi i slutänden ska ge svaret i $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$ så kan vi uttrycka villkoren i det vi vill visa med dessa vekorer.



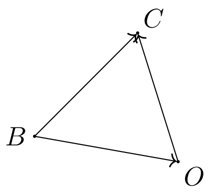
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$
$$= -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$



$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}$$
$$= -\boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}$$



$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$$
$$= -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d}$$



$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$
$$= -\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$$

Uppgiften kan alltså formuleras som

Givet: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$.

Bestäm: $\boldsymbol{d}$ så att

$$-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}, \qquad (1)$$
$$-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} = -\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}. \qquad (2)$$

För att (1) ska vara uppfylld ser vi att $\boldsymbol{d}$ måste väljas som

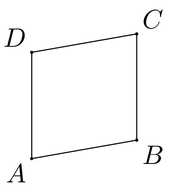
$$-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{d} + \boldsymbol{c} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}.$$

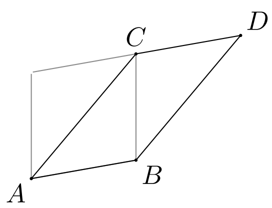
Stoppar vi in detta in i (2) fås

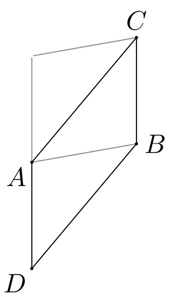
$$\text{VL} = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} = -\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \text{HL}.$$

Alltså, genom att välja $\overrightarrow{OD} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ så bildar punkterna A, B, C och D hörnen i ett parallellogram.

Anm. Om vi hade valt en av de andra konfigurationerna skulle vi fått ett annat svar.



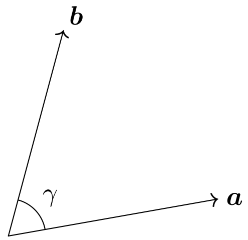




A granne med B och D A granne med B och C A granne med C och D

W141 Beräkna vinkeln mellan vektorerna $(1,1,0)$ och $(1,0,1)$. (ON–system)

Vinkeln mellan vektorerna får vi från formeln



$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|}.$$

I vårt fall ger detta

$$\cos\gamma = \frac{(1,1,0)\cdot(1,0,1)}{\|(1,1,0)\|\,\|(1,0,1)\|} = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\,\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

vilket svarar mot $\gamma = \frac{1}{3}\pi$.

W142 Beräkna längden av vektorn $\overrightarrow{PQ}$ om

a) $P = (4, 0, -1)$, $Q = (1, 0, 2)$,

b) $P = (1, 2, 3)$, $Q = (6, 5, 4)$,

c) $P = (-1, 2, -4)$, $Q = (3, 3, -5)$,

om vi har ett ortonormerat koordinatssystem.

Vi löser uppgiften på två olika sätt.

Metod 1 (Uträkning av $\overrightarrow{PQ}$)

Först räknar vi ut vektorn $\overrightarrow{PQ}$ med formeln $\overrightarrow{PQ} = Q - P$,

a) $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1, 0, 2) - (4, 0, -1) = \bigl(1 - 4, 0 - 0, 2 - (-1)\bigr) = (-3, 0, 3)$,

b) $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (6, 5, 4) - (1, 2, 3) = (6 - 1, 5 - 2, 4 - 3) = (5, 3, 1)$,

c) $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (3, 3, -5) - (-1, 2, -4) = \bigl(3 - (-1), 3 - 2, -5 - (-4)\bigr) = (4, 1, -1)$.

Eftersom koordinatsystemet är ON ges längden av $\overrightarrow{PQ} = (a, b, c)$ av formeln

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

a) $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{18}$,

b) $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{35}$,

c) $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{4^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{18}$.

Metod 2 (Avståndsformeln)

Längden av $\overrightarrow{PQ}$ är lika med avståndet mellan punkterna $P = (p_1, p_2, p_3)$ och $Q = (q_1, q_2, q_3)$, och detta avstånd ges av formeln

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2},$$

eftersom koordinatsystemet är ON.

a) $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(4 - 1)^2 + (0 - 0)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{18}$,

b) $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(1 - 6)^2 + (2 - 5)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{5^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{35}$,

c) $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (2 - 3)^2 + \bigl(-4 - (5)\bigr)^2} = \sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{18}$.

W143 Beräkna arbetet W som uträttas av kraften $\boldsymbol{a}$ vid den rätlinjiga förflyttningen från P till Q i följande fall (ON-system):

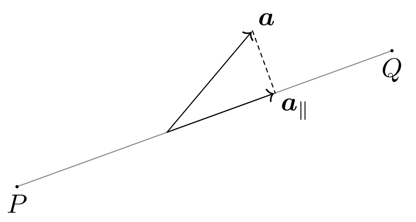
a) $\boldsymbol{a} = (1, 2, 0)$, $P = (4, -7, 3)$, $Q = (6, 2, -1)$,

b) $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1)$, $P = (2, 1, 3)$, $Q = (-1, -1, -1)$.

Från mekaniken vet vi att arbetet W är

$$W = \text{kraften} \cdot \text{sträckan}.$$

Med "kraften" menar vi den verksamma kraften, d.v.s. den komposant $\boldsymbol{a}_\parallel$ av kraften som pekar i förflyttningens riktning.



Det uträttade arbetet ges därmed av

$$W = \|\boldsymbol{a}_\parallel\| \cdot \|\overrightarrow{PQ}\| = \{\, \boldsymbol{a}_\parallel \text{ och } \overrightarrow{PQ} \text{ är parallella} \,\} = \boldsymbol{a}_\parallel \cdot \overrightarrow{PQ}. \qquad (*)$$

Om det är så att $\boldsymbol{a}_\parallel$ är motriktad förflyttningens riktning definierar man arbetet med ett negativt värde så att $(*)$ fortfarande gäller.

Formeln $(*)$ kan faktiskt skrivas om till en räknemässigt enklare formel genom att notera att den andra komposanten av kraften $\boldsymbol{a}_\perp$ (den overksamma kraften) är vinkelrät mot $\overrightarrow{PQ}$. Därmed är

$$W = \boldsymbol{a}_\parallel \cdot \overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{a}_\parallel \cdot \overrightarrow{PQ} + \boldsymbol{a}_\perp \cdot \overrightarrow{PQ} = (\boldsymbol{a}_\parallel + \boldsymbol{a}_\perp) \cdot \overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{a} \cdot \overrightarrow{PQ}.$$

Vi har nu

a) $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (6 - 4, 2 - (-7), -1 - 3) = (2, 9, -4)$,

$W = \boldsymbol{a} \cdot \overrightarrow{PQ} = (1, 2, 0) \cdot (2, 9, -4) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 9 + 0 \cdot (-4) = 20$,

b) $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-1 - 2, -1 - 3, -1 - 3) = (-3, -2, -4)$,

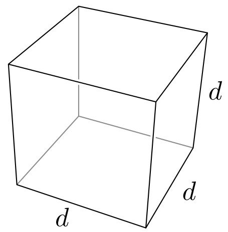
$W = \boldsymbol{a} \cdot \overrightarrow{PQ} = (1, 1, 1) \cdot (-3, -2, -4) = 1 \cdot (-3) + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-4) = -9$.

W146 Punkterna $(0,0,0)$, $(6,7,6)$ och $(2,6,-9)$ är hörn i en kub. Bestäm de övriga hörnen.

Låt oss för enkelhets skull införa beteckningar på de givna hörnpunkterna

$$\begin{aligned} P &= (0,0,0), \\ Q &= (6,7,6), \\ R &= (2,6,-9). \end{aligned}$$

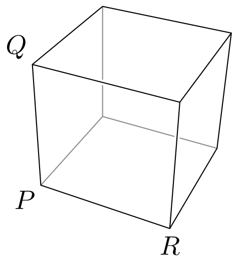
En kub är ett rätblock med alla kanter lika långa.



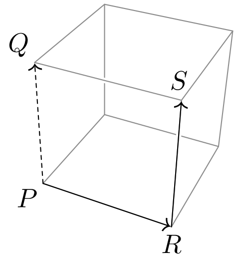
Punkterna P, Q och R skulle kunna vara vilka tre hörn som helst i kuben, men vi kan sortera bort vissa konfigurationer som omöjliga genom att undersöka avståndet mellan punkterna.

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{PQ}\| &= \sqrt{(0-6)^2+(0-7)^2+(0-6)^2} = \sqrt{121} = 11, \\ \|\overrightarrow{PR}\| &= \sqrt{(0-2)^2+(0-6)^2+(0-(-9))^2} = \sqrt{121} = 11, \\ \|\overrightarrow{QR}\| &= \sqrt{(6-2)^2+(7-6)^2+(6-(-9))^2} = \sqrt{242} = 11\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Nu ser vi att det enda möjliga förhållandet mellan P, Q och R är



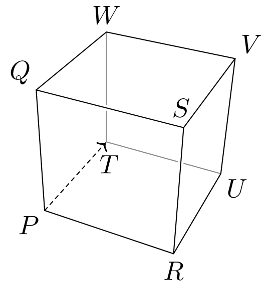
Den fjärde hörnpunkten S som ligger på samma yta som P, Q, R ges av



$$\begin{aligned} S &= P + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} = \{\, \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PQ} \,\} \\ &= P + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ} \\ &= (0,0,0) + (2-0,6-0,-9-0) + (6-0,7-0,6-0) \\ &= (8,13,-3), \end{aligned}$$

där likheten $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PQ}$ följer av att kuben har lika långa sidor.

För att komma åt de övriga hörnpunkterna, som vi döper till T, U, V och W enligt figuren nedan, behöver vi en kantvektor som inte ligger i planet $PQRS$, t.ex. $\overrightarrow{PT}$.



Villkoren för att bestämma $\overrightarrow{PT}$ får vi från att vi har en kub, vilket ger att $\overrightarrow{PT}$ är vinkelrät mot de två kantvektorerna $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{PR}$, d.v.s.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{PQ} &= 0, \\ \overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{PR} &= 0, \end{aligned}$$

och att $\overrightarrow{PT}$ är lika lång som $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{PR}$,

$$\|\overrightarrow{PT}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{PR}\| = 11.$$

Om vi skriver $\overrightarrow{PT}$ i komponentform som (a,b,c), då ger ovanstående villkor att

$$(a,b,c)\cdot(6-0,7-0,6-0) = 6a+7b+6c = 0, \tag{1}$$

$$(a,b,c)\cdot(2-0,6-0,-9-0) = 2a+6b-9c = 0, \tag{2}$$

$$\|(a,b,c)\|^2 = a^2+b^2+c^2 = 121. \tag{3}$$

Vi ska nu försöka lösa ekvationssystemet (1), (2) och (3).

$3 \cdot (2) - (1)$ ger

$$3 \cdot (2a + 6b - 9c) - (6a + 7b + 6c) = 11b - 33c = 11(b - 3c) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad b = 3c.$$

Detta insatt i (2) ger

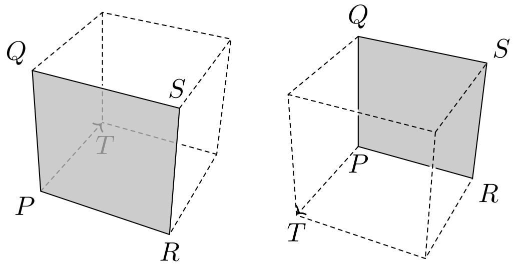
$$2a + 6 \cdot 3c - 9c = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a = -\tfrac{9}{2}c.$$

Både $a = -\frac{9}{2}c$ och $b = 3c$ insatt i (3) ger

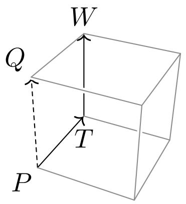
$$\bigl(-\tfrac{9}{2}c\bigr)^2 + \bigl(3c\bigr)^2 + c^2 = 121 \qquad \Leftrightarrow \qquad c = \pm 2,$$

vilket ger $a = -\frac{9}{2}c = \mp 9$ och $b = 3c = \pm 6$. Alltså finns två lösningar $(a, b, c) = (-9, 6, 2)$ eller $(a, b, c) = (9, -6, -2)$.

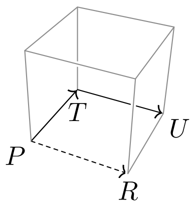
De två lösningarna svarar mot att T kan ligga på ömse sidor om ytan $PQRS$.



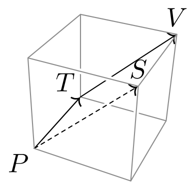
Med $\overrightarrow{PT}$ given kan vi räkna ut de övriga hörnen i kuben genom att uttrycka dem i de kända kantvektorerna.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{PW} &= \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TW}\\ &= \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{PQ}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{PU} &= \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TU}\\ &= \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{PR}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{PV} &= \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TV}\\ &= \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{PS}\end{aligned}$$

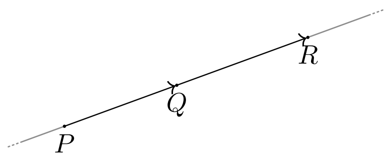
Med insatta siffror blir detta

$$\overrightarrow{PT} = (-9, 6, 2){:}\quad \begin{aligned}\overrightarrow{PW} &= (-9, 6, 2) + (6, 7, 6) = (-3, 13, 8),\\ \overrightarrow{PU} &= (-9, 6, 2) + (2, 6, -9) = (-7, 12, -7),\\ \overrightarrow{PV} &= (-9, 6, 2) + (8, 13, -3) = (-1, 19, -1)\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{PT} = (9, -6, -2){:}\quad \begin{aligned}\overrightarrow{PW} &= (9, -6, -2) + (6, 7, 6) = (15, 1, 4),\\ \overrightarrow{PU} &= (9, -6, -2) + (2, 6, -9) = (11, 0, -11),\\ \overrightarrow{PV} &= (9, -6, -2) + (8, 13, -3) = (17, 7, -5).\end{aligned}$$

W151 Kan konstanten a bestämmas så att punkterna $(1, a, a^2)$, $(-4, 5, 0)$ och $(5, -1, 3a)$ ligger i rät linje? Bestäm i så fall ekvationerna för denna räta linje.

Om punkterna $P = (1, a, a^2)$, $Q = (-4, 5, 0)$ och $R = (5, -1, 3a)$ ska ligga på en rät linje måste vektorerna $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{QR}$ vara parallella,



d.v.s. de ska uppfylla villkoret

$$\overrightarrow{PQ} = \alpha\, \overrightarrow{QR}$$

för någon skalär α. Detta ger i komponentform

$$
\begin{aligned}
(-4-1, 5-a, 0-a^2) &= \alpha\bigl(5-(-4), -1-5, 3a-0\bigr)\\
\Leftrightarrow\qquad -5 &= 9\alpha, && (1)\\
5-a &= -6\alpha, && (2)\\
-a^2 &= 3a\alpha. && (3)
\end{aligned}
$$

(1) ger att $\alpha = -\frac{5}{9}$. (2) ger att

$$a = 5 + 6\alpha = \tfrac{5}{3},$$

och detta ger att (3) blir uppfylld,

$$
\begin{aligned}
&\text{VL av (3)} = -a^2 = -\tfrac{25}{9},\\
&\text{HL av (3)} = 3a\,\alpha = 3\cdot\bigl(-\tfrac{5}{9}\bigr)\cdot\tfrac{5}{3} = -\tfrac{25}{9}.
\end{aligned}
$$

Alltså måste $a = \frac{5}{3}$ för att punkterna ska ligga på en rät linje. En riktningsvektor till linjen får vi då som

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{QR} = R - Q = \bigl(5-(-4), -1-5, 3\cdot\tfrac{5}{3}-0\bigr) = (9,-6,5).$$

En punkt på linjen är $Q = (-4,5,0)$ så linjens ekvation är

$$\frac{x-(-4)}{9} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z-0}{5}.$$

W152 Kan konstanterna a, b, c och d bestämmas så att parameterframställningarna

$$\begin{cases} x = 1+2t\\ y = 2-3t\\ z = t\end{cases} \qquad\text{och}\qquad \begin{cases} x = 4+as\\ y = b+cs\\ z = d+5s\end{cases}$$

betyder samma linje?

Vi ska lösa uppgiften med två olika metoder.

Metod 1 (Geometriskt)

De två linjerna är lika om de har riktningsvektorer som är parallella och en punkt gemensam. Från parameteriseringen av linjerna kan vi avläsa respektive linjes riktningsvektor (koefficienterna framför t respektive s),

$$(2,-3,1)\quad\text{och}\quad(a,c,5).$$

Om de ska vara parallella måste det finnas en skalär α så att

$$(2,-3,1) = \alpha\,(a,c,5),$$

d.v.s.

$$
\begin{aligned}
2 &= a\,\alpha, && (1)\\
-3 &= c\,\alpha, && (2)\\
1 &= 5\alpha. && (3)
\end{aligned}
$$

Från (3) får vi att $\alpha = \frac{1}{5}$. Ekvation (1) och (2) ger då att

$$a = 2/\alpha = 10 \quad\text{och}\quad c = -3/\alpha = -15.$$

Med dessa värden på a och c är linjerna parallella.

Linjerna sammanfaller om de dessutom har en punkt gemensam. Tag punkten $(1,2,0)$ på den första linjen (svarar mot parametervärdet $t = 0$). Vi ska nu visa att den punkten även ligger på den andra linjen genom att ta fram ett parametervärde s som ger just $(1,2,0)$, d.v.s.

$$
\begin{aligned}
1 &= 4 + 10s && (4)\\
2 &= b - 15s && (5)\\
0 &= d + 5s && (6)
\end{aligned}
$$

Ekvation (4) ger att $s = -\frac{3}{10}$. Detta insatt i (5) och (6) ger

$$
\begin{aligned}
2 &= b - 15\cdot\bigl(-\tfrac{3}{10}\bigr) \qquad\Leftrightarrow\qquad b = -\tfrac{5}{2},\\
0 &= d + 5\cdot\bigl(-\tfrac{3}{10}\bigr) \qquad\Leftrightarrow\qquad d = \tfrac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Alltså, om $a = 10$, $b = -\frac{5}{2}$, $c = -15$ och $d = \frac{3}{2}$ så beskriver de två parametriseringarna samma linje.

Metod 2 (Analytiskt)

De två linjerna är lika om varje punkt på den ena linjen också tillhör den andra linjen.

Tag därför en godtycklig punkt på den första linjen

$$(x, y, z) = (1 + 2t_0, 2 - 3t_0, t_0),$$

där t_0 är ett godtyckligt fixt parametervärde. Vi ska nu visa att det finns ett parametervärde $s = s_0$ som ger denna punkt (givetvis efter att ha anpassat konstanterna a, b, c och d). Vi ska alltså ta fram s_0 (och a, b, c, d) så att

$$\begin{aligned} 1 + 2t_0 &= 4 + as_0, && (7)\\ 2 - 3t_0 &= b + cs_0, && (8)\\ t_0 &= d + 5s_0. && (9) \end{aligned}$$

Från (9) får vi $s_0 = \frac{1}{5}(t_0 - d)$ som vi stoppar in i (7) och (8),

$$\begin{aligned} 1 + 2t_0 &= 4 + a\,\tfrac{1}{5}(t_0 - d),\\ 2 - 3t_0 &= b + c\,\tfrac{1}{5}(t_0 - d), \end{aligned}$$

Vi samlar t_0 i ena ledet

$$\begin{aligned} (-3 + \tfrac{1}{5}ad) + (2 - \tfrac{1}{5}a)t_0 &= 0,\\ (2 - b + \tfrac{1}{5}cd) + (-3 - \tfrac{1}{5}c)t_0 &= 0. \end{aligned}$$

Konstanterna a, b, c, d ska nu väljas så att ovanstående ekvationer är uppfyllda oavsett vilket värde t_0 har. Detta betyder att vi måste ha att

$$\begin{aligned} -3 + \tfrac{1}{5}ad &= 0,\\ 2 - \tfrac{1}{5}a &= 0,\\ 2 - b + \tfrac{1}{5}cd &= 0,\\ -3 - \tfrac{1}{5}c &= 0. \end{aligned}$$

vilket ger

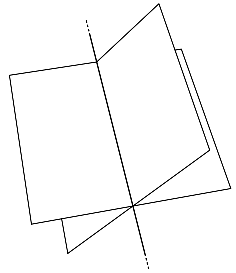
$$a = 10, \quad b = -\tfrac{5}{2}, \quad c = -15 \quad \text{och} \quad d = \tfrac{3}{2}.$$

W155 Bestäm ekvationerna i parameterform för skärningslinjen till planen

a) $x + y + z = 6$ och $2x - y + z = 3$, respektive

b) $x + 2y - z = 2$ och $z = 0$.

a) Skärningslinjen består av alla punkter som tillhör båda planen.



Det betyder att en punkt (x, y, z) på skärningslinjen uppfyller båda planens ekvationer,

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6, && (1)\\ 2x - y + z &= 3. && (2) \end{aligned}$$

(1) + (2) ger

$$3x + 2z = 9 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 3 - \tfrac{2}{3}z.$$

Detta insatt i (1) ger

$$3 - \tfrac{2}{3}z + y + z = 6 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 3 - \tfrac{1}{3}z.$$

Alltså, om

$$\begin{aligned} x &= 3 - \tfrac{2}{3}z,\\ y &= 3 - \tfrac{1}{3}z, \end{aligned}$$

så ligger (x, y, z) på skärningslinjen. Vi kan variera z och på så sätt röra oss längs skärningslinjen. Variabeln z spelar alltså rollen av parameter till linjen. Om vi döper z till t så får vi alltså

$$\begin{aligned} x &= 3 - \tfrac{2}{3}t,\\ y &= 3 - \tfrac{1}{3}t,\\ z &= t, \end{aligned}$$

vilket är en parametrisering av skärningslinjen. (Hade vi istället satt $z = -3t$ skulle vi fått svaret i facit. Det är en annan parametrisering av samma skärningslinje.)

b) Lösningsgången är precis densamma som till a-uppgiften. Skärningslinjen ges av alla punkter som uppfyller båda planens ekvationer

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2, \qquad (3) \\ z &= 0. \qquad (4) \end{aligned}$$

(4) insatt i (3) ger $x + 2y = 2$ d.v.s. $x = 2 - 2y$. Om

$$\begin{aligned} x &= 2 - 2y, \qquad (1) \\ z &= 0, \qquad (2) \end{aligned}$$

så ligger (x, y, z) på skärningslinjen. Denna gång är det y som agerar som parameter, och med $y = t$ får vi följande parametrisering av skärningslinjen

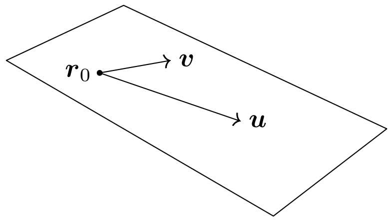
$$\begin{aligned} x &= 2 - 2t, \\ y &= t, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

W157 Bestäm ekvationen för planet genom punkterna $(3, 2, -1)$, $(7, 1, 1)$ och $(0, 2, 4)$

a) i parameterform, och

b) utan parametrar.

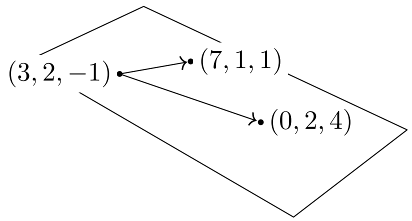
a) För att bestämma en parametrisering av planet behöver vi en punkt $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i planet och två icke-parallella (linjärt oberoende) vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ som är parallella med planet.



Parametriseringen blir då

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + s\,\boldsymbol{u} + t\,\boldsymbol{v}$$

eftersom varje punkt i planet kan skrivas som en linjärkombination av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ om vi utgår från baspunkten $\boldsymbol{r}_0$. Som punkt i planet kan vi t.ex. välja $\boldsymbol{r}_0 = (3, 2, -1)$. Vi får två vektorer som är parallella med planet om vi tar vektorn från $(3, 2, -1)$ till $(7, 1, 1)$ och vektorn från $(3, 2, -1)$ till $(0, 2, 4)$,



d.v.s. $\bigl(7 - 3, 1 - 2, 1 - (-1)\bigr) = (4, -1, 2)$, och $\bigl(0 - 3, 2 - 2, 4 - (-1)\bigr) = (-3, 0, 5)$. Planet parametriseras alltså av

$$(3, 2, -1) + s(4, -1, 2) + t(-3, 0, 5).$$

b) Den allmänna formen för ett plan i koordinatform är

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

där A, B och C är konstanter och (x_0, y_0, z_0) är en punkt i planet. Eftersom vi redan vet punkter som ingår i planet kan vi sätta t.ex.

$$(x_0, y_0, z_0) = (3, 2, -1).$$

De andra två punkterna ska också ligga i planet och därför uppfylla planets ekvation, d.v.s.

$$\begin{aligned} A(7-3) + B(1-2) + C\bigl(1-(-1)\bigr) &= 0, \\ A(0-3) + B(2-2) + C\bigl(4-(-1)\bigr) &= 0, \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 4A - B + 2C &= 0 \qquad (1) \\ -3A + 5C &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

Från (2) får vi att $A = \frac{5}{3}C$ och detta insatt i (1) ger

$$4 \cdot \tfrac{5}{3}C - B + 2C = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad B = \tfrac{26}{3}C.$$

Vi kan alltså välja

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{5}{3}t, \\ B &= \tfrac{26}{3}t, \\ C &= t, \end{aligned}$$

för vilket som helst värde på $t \neq 0$ och få värden på A, B och C. Väljer vi $t = 3$ fås heltalen $A = 5$, $B = 26$ och $C = 3$. Planets ekvation blir

$$5(x-3) + 26(y-2) + 3(z+1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 5x + 26y + 3z = 64.$$

Anm. Konstanterna (A, B, C) svarar mot det sökta planets normalvektor och olika val av t ger olika längd på denna normalvektor.

W159 Beräkna $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ om

a) $\boldsymbol{a} = (5, -1, 4)$, $\boldsymbol{b} = (-3, 2, 1)$,

b) $\boldsymbol{a} = (2, 1, 0)$, $\boldsymbol{b} = (1, -2, 5)$,

och vi har ett högerhänt ON–system.

Vi använder formeln i sats 1.17,

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1), \tag{$*$}$$

och sen kan vi använda den antikommutativa lagen för att bestämma $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$.

a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (5, -1, 4) \times (-3, 2, 1) = \big((-1) \cdot 1 - 4 \cdot 2, -5 \cdot 1 + 4 \cdot (-3), 5 \cdot 2 - (-1) \cdot (-3)\big) = (-9, -17, 7,$

$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (9, 17, -7),$

b) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (2, 1, 0) \times (1, -2, 5) = \big(1 \cdot 5 - 0 \cdot (-2), -2 \cdot 5 + 0 \cdot 1, 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1\big) = (5, -10, -5),$

$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (-5, 10, 5).$

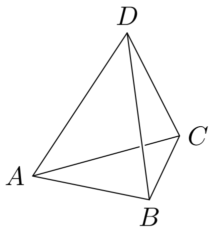
Anm. Formeln $(*)$ kan vara ganska svår att komma ihåg. I avsnitt 1.12 ges en determinantformel för kryssprodukten som är enklare att lägga på minnet.

W160 En tetraeder har hörnen $A = (2, 3, 2)$, $B = (-1, 5, 4)$, $C = (1, 7, -2)$ och $D = (6, 4, 1)$. Bestäm ekvationen för

a) planet genom ABC,

b) höjden genom hörnet D.

En tetraeder är den figur vi får när vi förbinder fyra punkter, som inte alla ligger i ett plan, med räta linjer.



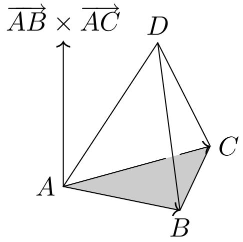
a) För att bestämma en ekvation för planet ABC behöver vi en punkt i planet $\boldsymbol{r}_0$ och en normalvektor $\boldsymbol{n}$ till planet (en vektor vinkelrät mot planet). Då ges planets ekvation i vektorform av

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0.$$

Vi har redan givet tre punkter i planet så vi kan t.ex. välja

$$\boldsymbol{r}_0 = A = (2, 3, 2).$$

De två kantvektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ är båda parallella med planet så deras kryssprodukt är vinkelrät mot planet.



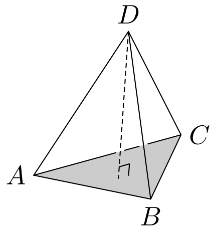
Vi sätter alltså

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= (-1-2, 5-3, 4-2) \times (1-2, 7-3, -2-2) \\
&= (-3, 2, 2) \times (-1, 4, -4) \\
&= \big(2\cdot(-4) - 2\cdot 4, -(-3)\cdot(-4) + 2\cdot(-1), (-3)\cdot 4 - 2\cdot(-1)\big) \\
&= (-16, -14, -10).
\end{aligned}$$

Planets ekvation blir alltså

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (-16, -14, -10)\cdot\big((x, y, z) - (2, 3, 2)\big) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -16(x-2) - 14(y-3) - 10(z-2) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 8x + 7y + 5z = 47.
\end{aligned}$$

b) Höjden till hörnet D är den vinkelräta sträcka från basplanet ABC till D.



Höjden är alltså parallell med normalvektorn $\boldsymbol{n} = (-16, -14, -10)$ till planet ABC. Vi vet dessutom att punkten $D = (6, 4, 1)$ ligger på höjdlinjen, så ekvationen för höjden blir

$$\frac{x-6}{-16} = \frac{y-4}{-14} = \frac{z-1}{-10} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x-6}{8} = \frac{y-4}{7} = \frac{z-1}{5}.$$

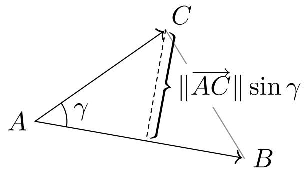
W161 Beräkna arean av den triangel, vars hörn är

a) punkterna $(4, 1, 2)$, $(6, 2, -1)$ och $(3, 3, 4)$,

b) punkterna $(1, 1, 1)$, $(-1, 0, 1)$ och $(2, 3, 0)$.

(ON–system)

Den triangel med hörn i punkterna A, B och C har två kantvektorer $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$. Om γ betecknar vinkeln mellan $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$, då ges triangeln area av



$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \tfrac{1}{2}\text{basen}\cdot\text{höjden} = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|\sin\gamma \\
&= \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|.
\end{aligned}$$

a) Med $A = (4, 1, 2)$, $B = (6, 2, -1)$ och $C = (3, 3, 4)$ bli alltså arean

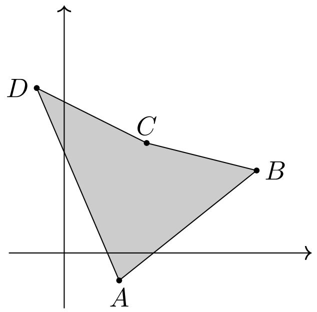
$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| = \tfrac{1}{2}\|(6-4, 2-1, -1-2)\times(3-4, 3-1, 4-2)\| \\
&= \tfrac{1}{2}\|(2, 1, -3)\times(-1, 2, 2)\| \\
&= \tfrac{1}{2}\big\|\big(1\cdot 2 - (-3)\cdot 2, -2\cdot 2 + (-3)\cdot(-1), 2\cdot 2 - 1\cdot(-1)\big)\big\| \\
&= \tfrac{1}{2}\|(8, -1, 5)\| = \tfrac{1}{2}\sqrt{8^2 + (-1)^2 + 5^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{90} = \tfrac{3}{2}\sqrt{10}.
\end{aligned}$$

b) I detta fall är $A = (1, 1, 1)$, $B = (-1, 0, 1)$ och $C = (2, 3, 0)$ och triangelns area är

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| = \tfrac{1}{2}\|(-1-1, 0-1, 1-1)\times(2-1, 3-1, 0-1)\| \\
&= \tfrac{1}{2}\|(-2, -1, 0)\times(1, 2, -1)\| \\
&= \tfrac{1}{2}\big\|\big((-1)\cdot(-1) - 0\cdot 2, -(-2)\cdot(-1) + 0\cdot 1, (-2)\cdot 2 - (-1)\cdot 1\big)\big\| \\
&= \tfrac{1}{2}\|(1, -2, -3)\| = \tfrac{1}{2}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{14}.
\end{aligned}$$

W162 Beräkna arean av fyrhörningen $ABCD$ då $A = (2, -1)$, $B = (7, 3)$, $C = (3, 4)$ och $D = (-1, 6)$. (ON-system)

Vi ritar upp fyrhörningen.



Nu ser vi att fyrhörningens area är lika med den sammanlagda arean av trianglarna ABC och ACD.

Eftersom vi har en formel för arean av en triangel i tre dimensioner kan vi tänka oss att fyrhörningen ligger i x, y-planet och att vi tillfogar en z-riktning, d.v.s.

$$\begin{aligned} A &= (2, -1, 0), \qquad & B &= (7, 3, 0), \\ C &= (3, 4, 0), \qquad & D &= (-1, 6, 0). \end{aligned}$$

Vi får nu att

$$\begin{aligned} \text{area}(ABCD) &= \text{area}(ABC) + \text{area}(ACD) = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| + \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\| \\ &= \tfrac{1}{2}\|(7-2, 3-(-1), 0-0) \times (3-2, 4-(-1), 0-0)\| \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\|(3-2, 4-(-1), 0-0) \times (-1-2, 6-(-1), 0-0)\| \\ &= \tfrac{1}{2}\|(5,4,0) \times (1,5,0)\| + \tfrac{1}{2}\|(1,5,0) \times (-3,7,0)\| \\ &= \tfrac{1}{2}\|(4\cdot 0 - 0\cdot 5, -5\cdot 0 + 0\cdot 1, 5\cdot 5 - 4\cdot 1)\| \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\big\|\big(5\cdot 0 - 0\cdot 7, 1\cdot 0 - 0\cdot(-3), 1\cdot 7 - 5\cdot(-3)\big)\big\| \\ &= \tfrac{1}{2}\|(0,0,21)\| + \tfrac{1}{2}\|(0,0,22)\| \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{0^2+0^2+21^2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{0^2+0^2+22^2} = \frac{21+22}{2} = \frac{43}{2}. \end{aligned}$$

W167 Beräkna

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} \sin v & -\cos v \\ \cos v & \sin v \end{vmatrix}$,

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix}$,

g) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

2×2-determinanter beräknar vi med minneregeln

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{matrix} + & - \\ a & b \\ c & d \end{matrix} = ad - bc.$$

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 3\cdot 5 = 8 - 15 = -7,$

c) $\begin{vmatrix} \sin v & -\cos v \\ \cos v & \sin v \end{vmatrix} = \sin v \cdot \sin v - (-\cos v)\cdot \cos v = \sin^2 v + \cos^2 v = 1.$

3×3-determinanter beräknas med en kofaktorutveckling längs första raden,

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}$
$= 1 \cdot \big(4\cdot 5 - 1\cdot(-6)\big) - 2\cdot\big((-3)\cdot 5 - 2\cdot 1\big) + 3\cdot\big((-3)\cdot(-6) - 4\cdot 2\big) = 26 + 34 + 30 = 90,$

g) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$
$= 3\big(5\cdot(-3) - (-2)\cdot 1\big) + 1\cdot\big(6\cdot(-3) - (-2)\cdot 1\big) + 4\cdot\big(6\cdot 1 - 5\cdot 1\big) = -39 - 16 + 4 = -51.$

W168 Beräkna vektorn $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ med hjälp av determinantframställningen, då i ett ortonormerat högersystem,

a) $\boldsymbol{a} = (1,1,0)$, $\boldsymbol{b} = (-1,2,0)$,

c) $\boldsymbol{a} = (1,-1,3)$, $\boldsymbol{b} = (5,1,-1)$.

Determinantformeln för kryssprodukten lyder

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

och vi räknar ut determinanten med kofaktorutveckling längs första raden

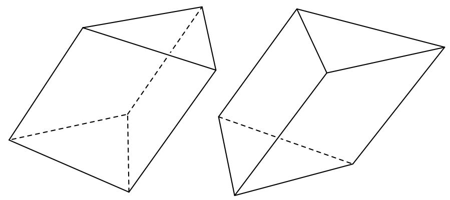
a) $$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$0\,\boldsymbol{e}_1 + 0\,\boldsymbol{e}_2 + 3\,\boldsymbol{e}_3 = (0,0,3).$$

c) $$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$-2\,\boldsymbol{e}_1 + 16\,\boldsymbol{e}_2 + 6\,\boldsymbol{e}_3 = (-2,16,6).$$

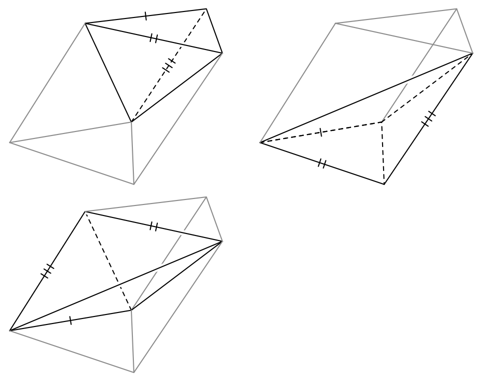
W170 Beräkna volymen av tetraedern med hörnen $(1,2,3)$, $(2,2,5)$, $(5,8,5)$ och $(4,5,-3)$. (ON-system)

Geometriskt kan man se att om vi tar sex kopior av tetraedern kan vi pussla ihop dem så att vi får en parallellepiped.

Vi kan se detta genom följande förfarande. Vi delar först upp parallellepipedern i två lika stora halvor,

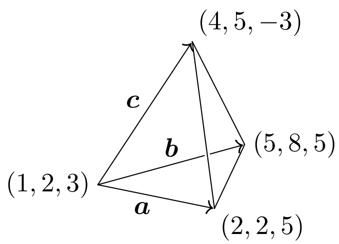


Varje halva kan sedan delas upp i tre tetraedrar,



Eftersom parallellepipedern har volym $V = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, där $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$ är tre vektorer som spänner upp epipedern, så har tetraedern volymen $\frac{1}{6}V = \frac{1}{6}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$.

I detta fall kan vi välja kantvektorerna till



$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= (2,2,5) - (1,2,3) = (1,0,2), \\ \boldsymbol{b} &= (5,8,5) - (1,2,3) = (4,6,2), \\ \boldsymbol{c} &= (4,5,-3) - (1,2,3) = (3,3,-6), \end{aligned}$$

och volymen blir

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{6}V = \tfrac{1}{6}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & -6 \end{vmatrix} \\
&= \tfrac{1}{6}\left(1\cdot\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}\right) \\
&= \tfrac{1}{6}\big(6\cdot(-6) - 2\cdot 3 - 0 + 2\cdot(4\cdot 3 - 6\cdot 3)\big) \\
&= \tfrac{1}{6}(-36 - 6 + 24 - 36) = -9.
\end{aligned}$$

Eftersom vi fick ett negativt värde var $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ ett vänstersystem och volymen är $+9$.

W172 Undersök om följande vektorer är linjärt beroende eller oberoende:

a) $\boldsymbol{a} = (0,2,1)$, $\boldsymbol{b} = (0,-1,4)$ och $\boldsymbol{c} = (1,-1,0)$,

b) $\boldsymbol{a} = (1,-6,2)$, $\boldsymbol{b} = (0,2,7)$ och $\boldsymbol{c} = (-2,12,-4)$.

Vektorerna är linjärt beroende omm (om och endast om) de alla ligger i ett plan, vilket är detsamma som att parallellepipedern de spänner upp har volym noll. Vektorerna är alltså linjärt beroende omm

$$\text{Volym} = [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] = 0.$$

a) Vi har att

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \{\,\text{Kofaktorutveckling 1:a raden}\,\} \\
&= 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 0 - 2\cdot\big(0\cdot 0 - 4\cdot 1\big) + 1\cdot\big(0\cdot(-1) - (-1)\cdot 1\big) = 0 + 8 + 1 = 9 \neq 0.
\end{aligned}$$

Alltså är vektorerna linjärt oberoende.

c) Vi har att

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] &= \begin{vmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ -2 & 12 & -4 \end{vmatrix} = \{\,\text{Kofaktorutveckling 1:a raden}\,\} \\
&= 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 12 & -4 \end{vmatrix} - (-6)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 12 \end{vmatrix} \\
&= 1\cdot\big(2\cdot(-4) - 7\cdot 12\big) + 6\cdot\big(0\cdot(-4) - 7\cdot(-2)\big) \\
&\quad + 2\cdot\big(0\cdot 12 - 2\cdot(-2)\big) = -92 + 84 + 8 = 0.
\end{aligned}$$

Alltså är vektorerna linjärt beroende.

W173 För vilka värden på talet a är vektorerna $(1,a^3,a)$, $(0,a^2,1)$ och $(1,a,1)$ linjärt beroende? Bestäm för dessa a-värden en linjärkombination av vektorerna (med minst en koefficient $\neq 0$), som är $\mathbf{0}$.

De tre vektorerna är linjärt beroende omm deras trippelprodukt är noll. Eftersom

$$\begin{aligned}
\big[(1,a^3,a);(0,a^2,1);(1,a,1)\big] &= \begin{vmatrix} 1 & a^3 & a \\ 0 & a^2 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} \\
&= \{\,\text{Kofaktorutveckling 1:a raden}\,\} \\
&= 1\cdot\begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} - a^3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + a\cdot\begin{vmatrix} 0 & a^2 \\ 1 & a \end{vmatrix} \\
&= 1\cdot(a^2 - a) - a^3\cdot(0\cdot 1 - 1\cdot 1) + a\cdot(0\cdot a - a^2\cdot 1) \\
&= a^2 - a + a^3 - a^3 = a^2 - a = a(a-1),
\end{aligned}$$

så ser vi att vektorerna är linjärt beroende när $a = 0$ eller $a = 1$.

För $a = 0$ och $a = 1$ ska vi nu hitta konstanter c_1, c_2 och c_3, som alla inte är noll, så att

$$c_1\,(1,a^3,a) + c_2\,(0,a^2,1) + c_3\,(1,a,1) = (0,0,0).$$

$a = 0$: I detta fall är vektorerna

$$(1,0,0), \quad (0,0,1) \quad \text{och} \quad (1,0,1),$$

och då ser vi att den första vektorn plus den andra vektorn ger den tredje vektorn, d.v.s.

$$\begin{aligned} &(1,0,0) + (0,0,1) = (1,0,1) \\ \Leftrightarrow \qquad & 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,0,1) - 1 \cdot (1,0,1) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

vilket är den sökta linjärkombinationen.

$a = 1$: Vi har att vektorerna är

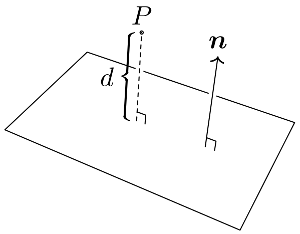
$$(1,1,1), \quad (0,1,1) \quad \text{och} \quad (1,1,1).$$

Den första och den tredje vektorn är lika,

$$(1,1,1) = (1,1,1) \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 \cdot (1,1,1) + 0 \cdot (0,1,1) - 1 \cdot (1,1,1) = \mathbf{0}.$$

W174 Beräkna avståndet från punkten $(2,1,1)$ till planet $x + y - z + 1 = 0$. (ON-system)

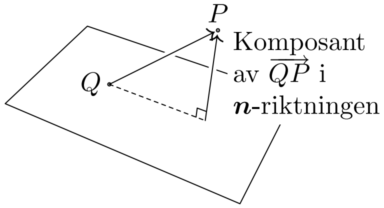
Låt $P = (2,1,1)$. Det kortaste avståndet mellan P och planet är det vinkelräta avståndet.



Avståndsvektorn är alltså parallell med normalvektorn $\boldsymbol{n}$ till planet. Normalvektorn kan vi avläsa från planets ekvation (koefficienterna framför x, y och z),

$$\boldsymbol{n} = (1,1,-1).$$

Tar vi en punkt $Q = (1,1,3)$ i planet (välj bara en punkt som uppfyller planets ekvation) så är avståndet mellan P och planet lika med längden av vektorn $\overrightarrow{QP}$:s komposant i $\boldsymbol{n}$-riktningen.



Alltså är

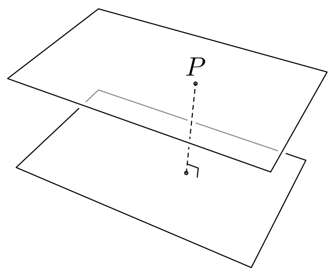
$$\begin{aligned} d &= \|(\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n\| = |\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{e}_n| = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{n}\|} \\ &= \frac{|(2-1, 1-1, 1-3) \cdot (1,1,-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1)|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

W176a Beräkna avståndet mellan planen $x - 2y + z - 1 = 0$ och $2x - 4y + 2z - 1 = 0$. (ON-system)

För att planen ska ha ett positivt avstånd mellan sig måste de vara parallella (annars skär de varandra), vilket är samma sak som att deras normalvektorer är parallella. I detta fall kan vi avläsa att normalvektorerna är

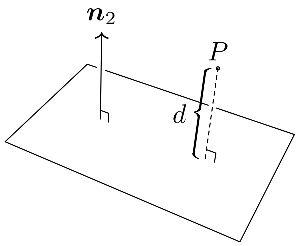
$$\boldsymbol{n}_1 = (1,-2,1) \quad \text{och} \quad \boldsymbol{n}_2 = (2,-4,2)$$

och då ser vi direkt att $\boldsymbol{n}_2 = 2\boldsymbol{n}_1$, d.v.s. de pekar i samma riktning. Tar vi nu en punkt $P = (1,1,2)$ i det första planet så är avståndet mellan planen lika med avståndet mellan punkten P och det andra planet.

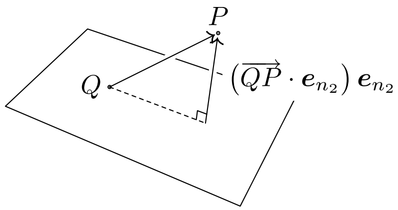


Vi har alltså reducerat avståndsproblemet mellan två plan till att bestämma avståndet mellan en punkt och ett plan $2x - 4y + 2z - 1 = 0$.

Det kortaste avståndet mellan P och planet är det vinkelräta avståndet, d.v.s. avståndsvektorn är parallell med $\boldsymbol{n}_2 = (2,-4,2)$.



Välj nu en punkt $Q = (2,1,\frac{1}{2})$ i planet (uppfyller planets ekvation). Då är avståndet d lika med längden av vektorn $\overrightarrow{QP}$:s komposant i $\boldsymbol{n}_2$-riktningen.



Alltså,

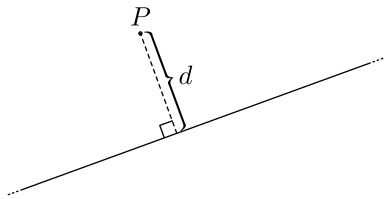
$$\begin{aligned} d &= \|(\overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n\| = |\overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{e}_n| = \frac{|\overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{n}\|} \\ &= \frac{|(1-2, 1-1, 2-\frac{1}{2})\cdot(2,-4,2)|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+2^2}} \\ &= \frac{|(-1)\cdot 2 + 0\cdot(-4) + \frac{3}{2}\cdot 2|}{\sqrt{24}} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{6}}{12}. \end{aligned}$$

W177a Beräkna i ett ON-system avståndet från punkten $(0,0,1)$ till linjen $y+1=0$, $x+2z-7=0$.

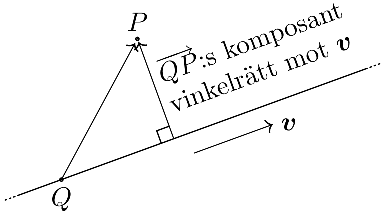
Vi skriver om linjens evation i en mer standardform,

$$y = -1, \qquad \frac{x-1}{1} + \frac{z-3}{1/2} = 0. \tag{$*$}$$

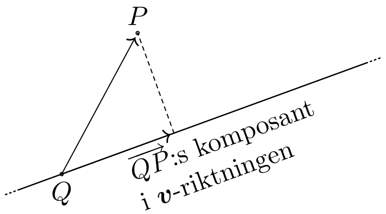
Avståndet mellan punkten $P = (0,0,1)$ och linjen är det vinkelräta avståndet.



Från planets ekvation $(*)$ kan vi avläsa linjens riktningsvektor $\boldsymbol{v} = (1,0,\frac{1}{2})$, (talen i nämnarna). Tar vi en punkt $Q = (0,-1,\frac{7}{2})$ på linjen (uppfyller linjens ekvation; tag $x=0$, $(*)$ ger att $z=\frac{7}{2}$) så är avståndet d lika längden av med $\overrightarrow{QP}$:s komposant vinkelrätt mot $\boldsymbol{v}$.



Vi får denna komposant som differensen mellan $\overrightarrow{QP}$ och $\overrightarrow{QP}$:s komposant i $\boldsymbol{v}$-riktningen.



d.v.s.

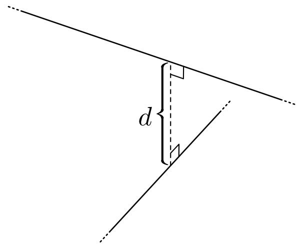
$$\begin{aligned}
d &= \|\overrightarrow{QP} - (\overrightarrow{QP}\cdot \boldsymbol{e}_v)\boldsymbol{e}_v\| = \left\|\overrightarrow{QP} - \frac{\overrightarrow{QP}\cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\boldsymbol{v}\right\| \\
&= \left\|(0-0, 0-(-1), 1-\tfrac{7}{2}) - \frac{\big(0-0, 0-(-1), 1-\tfrac{7}{2}\big)\cdot(1,0,\tfrac{1}{2})}{1^2+0^2+(\tfrac{1}{2})^2}\,(1,0,\tfrac{1}{2})\right\| \\
&= \left\|(0,1,-\tfrac{5}{2}) - \frac{0\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-\tfrac{5}{2})\cdot\tfrac{1}{2}}{\tfrac{5}{4}}\,(1,0,\tfrac{1}{2})\right\| \\
&= \|(0,1,-\tfrac{5}{2}) + (1,0,\tfrac{1}{2})\| = \|(1,1,-2)\| = \sqrt{1^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{6}.
\end{aligned}$$

W179 Beräkna avståndet mellan följande linjer i ett ON-system:

a) $\quad \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{-1} \quad \text{och} \quad \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-3}{1},$

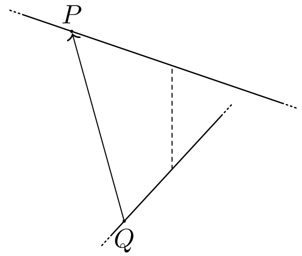
c) $\quad \begin{cases} x = 2+t \\ y = 4+t \\ z = 6+t \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = 2t \\ y = -2+t\,. \\ z = 2+t \end{cases}$

Det kortaste avståndet mellan linjerna är det vinkelräta avståndet.



Om $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ är respektive linjes riktning så är alltså avståndsvektorn parallell med $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ (vinkelrät mot både $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$).

Om vi tar två punkter P och Q på respektive linje så är avståndet d lika med längden av vektorn $\overrightarrow{QP}$:s komposant i $\boldsymbol{n}$-riktning.



$$d = |\overrightarrow{QP}\cdot \boldsymbol{e}_n|.$$

a) I detta fall ser vi från linjernas ekvationer (läs av talen i nämnarna) att de har riktningsvektorerna

$$\boldsymbol{v}_1 = (2,1,-1) \quad \text{respektive} \quad \boldsymbol{v}_2 = (1,5,1).$$

Vektorn vinkelrät mot linjerna blir

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{e}_1 \bigl(1 \cdot 1 - (-1) \cdot 5\bigr) - \boldsymbol{e}_2 \bigl(2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1\bigr) \\
&\quad + \boldsymbol{e}_3 \bigl(2 \cdot 5 - 1 \cdot 1\bigr) = 6\,\boldsymbol{e}_1 - 3\,\boldsymbol{e}_2 + 9\,\boldsymbol{e}_3 = (6, -3, 9).
\end{aligned}
$$

Två punkter på linjen får vi t.ex. genom att sätta $x = 0$ i linjernas ekvationer

$$
\frac{0+1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} y &= -\tfrac{5}{2} \\ z &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad P = \bigl(0, -\tfrac{5}{2}, -\tfrac{1}{2}\bigr),
$$

$$
\frac{0-4}{1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} y &= -18 \\ z &= -1 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad Q = \bigl(0, -18, -1\bigr)
$$

Vi får nu att avståndet mellan linjerna blir

$$
\begin{aligned}
d = |\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{e}_n| &= \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{n}\|} \\
&= \frac{\bigl|\bigl(0-0, -\frac{5}{2} - (-18), -\frac{1}{2} - (-1)\bigr) \cdot (6, -3, 9)\bigr|}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 9^2}} \\
&= \frac{|0 \cdot 6 + \frac{31}{2} \cdot (-3) + \frac{1}{2} \cdot 9}{\sqrt{126}} = \frac{42}{\sqrt{126}} = \sqrt{14}.
\end{aligned}
$$

c) Vi kan avläsa linjernas riktningsvektorer (koefficienterna framför t) från deras parametriseringar

$$
\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 1) \quad \text{och} \quad \boldsymbol{v}_2 = (2, 1, 1).
$$

Det vinkelräta avståndet är alltså längden av en vektor som är parallell med

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{e}_1 \bigl(1 \cdot 1 - 1 \cdot 1\bigr) - \boldsymbol{e}_2 \bigl(1 \cdot 1 - 1 \cdot 2\bigr) + \boldsymbol{e}_3 \bigl(1 \cdot 1 - 1 \cdot 2\bigr) \\
&= 0\,\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 = (0, 1, -1).
\end{aligned}
$$

Vi får två punkter på respektive linje genom att välja ett parametervärde, t.ex. $t = 0$,

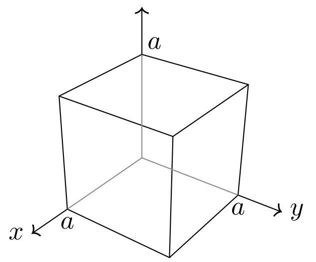
$$
P = (2, 4, 6) \quad \text{och} \quad Q = (0, -2, 2).
$$

Avståndet mellan linjerna är

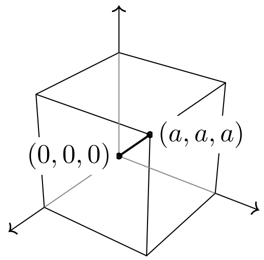
$$
\begin{aligned}
d = |\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{e}_n| &= \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{n}\|} = \frac{|(2-0, 4-(-2), 6-2) \cdot (0, 1, -1)|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} \\
&= \frac{|2 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot (-1)|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

W180 Beräkna det kortaste avståndet mellan rymddiagonalen i en kub med sidan a (längdenheter) och en av sidoytornas diagonaler, som inte skär rynddiagonalen.

Vi placerar kuben i ett koordinatsystem med ena hörnet i origo och de från hörnet utgående kanterna längs koordinataxlarna.

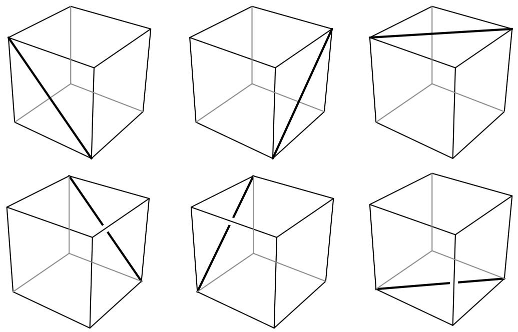


Rymddiagonalen är den linje som sammanbinder hörnet i origo med hörnet (a,a,a). (Vi kan annars placera kuben så att rymddiagonalen blir denna linje.) Eftersom den går genom origo och har riktningsvektor (a,a,a) kan linjen parametriseras som



$$\begin{aligned} x &= 0 + at, \\ y &= 0 + at, \\ z &= 0 + at. \end{aligned}$$

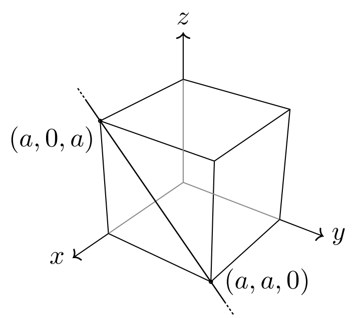
Nu finns en hel del diagonaler längs sidoytorna som inte skär rymddiagonalen.



Men alla dessa diagonaler ligger symmetriskt kring rymddiagonalen så de kommer ha samma avstånd till rymddiagonalen. (De diagonaler på samma rad kan fås att övergå till varandra genom att vrida kuben med rymddiagonalen som axel. Diagonaler i samma kolumn övergår i varandra genom att vrida kuben så att origo och (a,a,a) byter plats.)

Vi kan alltså välja en av dessa diagonaler, säg den som går genom $(a,0,a)$ och $(a,a,0)$. Diagonalen går genom punkten $(a,0,a)$ och har riktningen

$$(a,a,0) - (a,0,a) = (0,a,-a).$$



Alltså kan den parametriseras som

$$\begin{aligned} x &= a + 0\,t, \\ y &= 0 + a\,t, \\ z &= a - a\,t. \end{aligned}$$

Vi söker alltså avståndet mellan linjerna

$$\begin{aligned} x &= at, \\ y &= at, \\ z &= at, \end{aligned} \qquad \text{och} \qquad \begin{aligned} x &= a, \\ y &= at, \\ z &= a - at. \end{aligned}$$

Avståndet mellan linjerna är det vinkelräta avståndet, d.v.s. avståndsvektorn är parallell med kryssprodukten av linjernas riktningsvektorer

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} = (a,a,a) \times (0,a,-a) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a & a & a \\ 0 & a & -a \end{vmatrix} \\ &= \boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} a & a \\ a & -a \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & -a \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & a \end{vmatrix} \\ &= -2a^2\,\boldsymbol{e}_1 + a^2\,\boldsymbol{e}_2 + a^2\,\boldsymbol{e}_3 = (-2a^2, a^2, a^2). \end{aligned}$$

Vi tar nu två punkter på respektive linje

$$P = (a,a,a) \quad \text{och} \quad Q = (a,0,a).$$

Avståndet mellan linjerna är då längden av $\overrightarrow{QP}$:s komposant i $\boldsymbol{n}$-riktning,

$$\begin{aligned} d = |\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{e}_n| &= \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{n}\|} = \frac{|(0,a,0) \cdot (-2a^2, a^2, a^2)|}{\sqrt{(-2a^2)^2 + (a^2)^2 + (a^2)^2}} \\ &= \frac{a^3}{a^2\sqrt{6}} = \frac{a}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$