Avsnitt 1, Integraler

601b Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^4+2}{x^3}\,dx.$

Integranden är en rationell funktion som vi kan skriva som

$$\frac{x^4+2}{x^3} = \frac{x^4}{x^3} + \frac{2}{x^3} = x + \frac{2}{x^3}.$$

Vi delar upp integralen i två delar och integrerar delarna var för sig,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x^4+2}{x^3}\,dx &= \int_1^2 \Bigl(x+\frac{2}{x^3}\Bigr)\,dx = \int_1^2 x\,dx + 2\int_1^2 x^{-3}\,dx\\ &= \Bigl[\,\frac{x^2}{2}\,\Bigr]_1^2 + 2\Bigl[\,\frac{x^{-2}}{-2}\,\Bigr]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} + 2\Bigl(\frac{2^{-2}}{-2} - \frac{1^{-2}}{-2}\Bigr)\\ &= 2 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + 1 = \tfrac{9}{4}.\end{aligned}$$

601d Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^5 \sqrt{3x+1}\,dx.$

För att kunna räkna ut integralen behöver vi bestämma en primitiv funktion till integranden. Vi behöver alltså bestämma en funktion $F(x)$ som uppfyller

$$F'(x) = \sqrt{3x+1}.$$

Om integranden istället hade varit $\sqrt{x}$ skulle vi direkt veta att en primitiv funktion är $\dfrac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}x^{3/2}$. Nu är vår integrand ”roten ur ett förstagradsuttryck” och just att vi har ett förstagradsuttryck under rottecknet gör att den inre derivatan av motsvarande formel $\frac{2}{3}(3x+1)^{3/2}$ är en konstant, så vi borde därför ha en primitiv funktion i formen

$$F(x) = \tfrac{2}{3}C(3x+1)^{3/2},$$

där C är en konstant. Derivering av F ger att

$$F'(x) = \tfrac{2}{3}C \cdot \tfrac{3}{2}(3x+1)^{1/2}\cdot 3 = 3C\sqrt{3x+1}.$$

För att detta ska vara lika med $\sqrt{3x+1}$ måste $C = \frac{1}{3}$. Alltså är

$$F(x) = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot(3x+1)^{3/2} = \tfrac{2}{9}(3x+1)\sqrt{3x+1}$$

en primitiv funktion till $\sqrt{3x+1}$. Vi får

$$\begin{aligned}\int_0^5 \sqrt{3x+1}\,dx &= \Bigl[\,\tfrac{2}{9}(3x+1)\sqrt{3x+1}\,\Bigr]_0^5\\ &= \tfrac{2}{9}(3\cdot 5+1)\sqrt{3\cdot 5+1} - \tfrac{2}{9}(3\cdot 0+1)\sqrt{3\cdot 0+1}\\ &= \tfrac{2}{9}\cdot 16\cdot 4 - \tfrac{2}{9}\cdot 1\cdot 1 = \tfrac{126}{9} = 14.\end{aligned}$$

601h Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,dx.$

Integranden finns faktiskt med i tabellen över primitiva funktioner till elementära funktioner. Skriver vi integranden som

$$e^{2x} = \bigl(e^2\bigr)^x = a^x, \quad \text{där } a = e^2,$$

så vet vi att en primitiv funktion är

$$\frac{a^x}{\ln a} = \frac{\bigl(e^2\bigr)^x}{\ln e^2} = \frac{e^{2x}}{2}.$$

Integralen blir

$$\int_0^1 e^{2x}\,dx = \Bigl[\,\tfrac{1}{2}e^{2x}\,\Bigr]_0^1 = \tfrac{1}{2}e^{2\cdot 1} - \tfrac{1}{2}e^{2\cdot 0} = \tfrac{1}{2}(e^2-1).$$

601j Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{7-x}$.

Vi kan känna igen integranden som ett uttryck i formen

$$\frac{f'(x)}{f(x)},$$

för om vi sätter $f(x) = 7 - x$ så är $f'(x) = -1$ och

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{7-x}.$$

Med formeln för logaritmisk derivering vet vi att en primitiv funktion är

$$-\ln|f(x)| = -\ln|7-x|.$$

Alltså är

$$\begin{aligned}\int_1^5 \frac{dx}{7-x} &= \Bigl[-\ln|7-x|\Bigr]_1^5 = -\ln 2 - \bigl(-\ln 6\bigr)\\ &= \ln 6 - \ln 2 = \ln\frac{6}{2} = \ln 3.\end{aligned}$$

601l Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^5 \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx$.

Integranden är en funktion i formen

$$\frac{f'(x)}{f(x)},$$

sånär som på en faktor 2. Med $f(x) = x^2+2x+5$ är nämligen $f'(x) = 2x+2 = 2(x+1)$ och vi har att

$$\frac{x+1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\,\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Formeln för logaritmisk derivering ger att en primitiv funktion är

$$\tfrac{1}{2}\log|f(x)| = \tfrac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|.$$

Vi får

$$\begin{aligned}\int_0^5 \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx &= \Bigl[\tfrac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|\Bigr]_0^5\\ &= \tfrac{1}{2}\ln|5^2+2\cdot 5+5| - \tfrac{1}{2}\ln|0^2+2\cdot 0+5| = \tfrac{1}{2}\ln 40 - \tfrac{1}{2}\ln 5\\ &= \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{40}{5} = \tfrac{1}{2}\ln 8 = \tfrac{1}{2}\ln 2^3 = \tfrac{3}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

601o Beräkna integralen $\displaystyle\int \coth x\,dx$.

När det inte finns med några integrationsgränser betyder det att vi ska bestämma alla primitiva funktioner till integranden. Cotangens hyperbolicus är i själva verket funktionen

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}}{\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}} = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Genom att stirra på kvoten ser vi att täljaren är derivatan av nämnaren. Alltså är de primitiva funktionerna lika med

$$\int \coth x\,dx = \ln|e^x-e^{-x}| + C,$$

där C är en konstant.

Anm. Vi kan skriva om den primitiva funktionen till

$$\begin{aligned}\ln|e^x-e^{-x}| + C &= \ln\Bigl|2\,\frac{e^x-e^{-x}}{2}\Bigr| + C = \ln|2\sinh x| + C\\ &= \ln 2 + \ln|\sinh x| + C = \ln|\sinh x| + C_2.\end{aligned}$$

601q Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \bigl(\sin 2x + \cos 3x\bigr)\,dx$.

Först delar vi upp integralen i två delar,

$$\int_0^{\pi/6} \bigl(\sin 2x + \cos 3x\bigr)\,dx = \int_0^{\pi/6} \sin 2x\,dx + \int_0^{\pi/6} \cos 3x\,dx = I_1 + I_2.$$

Vi ska beräkna de två integralerna i högerledet med substitutioner.

I_1: När vi ska beräkna en integral med hjälp av en substitution gäller det att kunna känna igen integranden som en uttryckskombination av typen

$$f(u)\cdot u',$$

där u är ett uttryck i x och f någon funktion. I vår integral kan vi se att med $u = 2x$ så är $u' = 2$ och integranden kan skrivas som

$$\tfrac{1}{2}\sin u \cdot u'.$$

Med substitutionen $u = 2x$ blir alltså integralen

$$\int \sin 2x\,dx = \bigl\{\, u = 2x,\ \ du = u'\,dx = 2\,dx \,\bigr\} = \int \tfrac{1}{2}\sin u\,du.$$

När vi gör substitutionen måste vi också byta integrationsgränserna till $u(0) = 2\cdot 0 = 0$ och $u(\pi/6) = 2\cdot\pi/6 = \frac{1}{3}\pi$. Alltså blir uträkningen

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/6} \sin 2x\,dx &= \{\, u = 2x,\ \ du = 2\,dx,\ \ u\colon 0 \to \pi/3 \,\}\\
&= \int_0^{\pi/3} \tfrac{1}{2}\sin u\,du = \tfrac{1}{2}\Bigl[-\cos u\Bigr]_0^{\pi/3}\\
&= \tfrac{1}{2}\bigl(-\cos\tfrac{\pi}{3} + \cos 0\bigr) = \tfrac{1}{2}\bigl(1 - \tfrac{1}{2}\bigr) = \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}$$

I_2: På motsvarande sätt får vi

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/6} \cos 3x\,dx &= \{\, u = 3x,\ \ du = 3\,dx,\ \ u\colon 0 \to \pi/2 \,\}\\
&= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{3}\cos u\,du = \tfrac{1}{3}\Bigl[\sin u\Bigr]_0^{\pi/2}\\
&= \tfrac{1}{3}\bigl(\sin\tfrac{\pi}{2} - \sin 0\bigr) = \tfrac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Sammantaget får vi

$$\int_0^{\pi/6} \bigl(\sin 2x + \cos 3x\bigr)\,dx = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{12}.$$

602b Beräkna integralen $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-2x)e^{-2x}\,dx$.

Om vi tittar på formeln för partialintegrering,

$$\int f\cdot g\,dx = F\cdot g - \int F\cdot g'\,dx,$$

så ser vi att om vi väljer $g = 1 - 2x$ så kommer den faktorn att deriveras till en konstant i högerledets integralterm. För att detta ska vara en förbättring förutsätter detta givetvis att vi kan hitta en primitiv funktion F till den andra faktorn $f = e^{-2x}$ och dessutom kunna integrera denna.

Med en liknande omskrivning som vi gjorde i uppgift 601h får vi att $F(x) = -\frac{1}{2}e^{2x}$. Med partiell integration får vi alltså

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (1-2x)e^{-2x}\,dx &= \Bigl[-\tfrac{1}{2}e^{-2x}\cdot(1-2x)\Bigr]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -\tfrac{1}{2}e^{-2x}\cdot(-2)\,dx\\
&= -\tfrac{1}{2}e^{-2}(1-2\cdot 1) + \tfrac{1}{2}e^{2}\bigl(1-2\cdot(-1)\bigr) - \int_{-1}^{1} e^{-2x}\,dx\\
&= \tfrac{1}{2}e^{-2} + \tfrac{3}{2}e^{2} - \Bigl[-\tfrac{1}{2}e^{-2x}\Bigr]_{-1}^{1} = \tfrac{1}{2}e^{-2} + \tfrac{3}{2}e^{2} + \tfrac{1}{2}e^{-2} - \tfrac{1}{2}e^{2}\\
&= e^{2} + e^{-2}.
\end{aligned}$$

602d Beräkna integralen $\displaystyle\int x^2 \cos x\,dx$.

Integranden består av två faktorer x^2 och $\cos x$ så partialintegration borde vara lämplig. Om vi ska använda partialintegration måste vi bestämma vilken faktor vi ska derivera och vilken vi ska integrera. I detta fall verkar det vara lämpligt att derivera x^2 för då sjunker dess gradtal med en enhet,

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \cdot \sin x - \int 2x \cdot \sin x\,dx.$$

Integralen i högerledet är fortfarande inte en integral som vi direkt kan bestämma, men problemet har faktiskt reducerats något. Istället för x^2 har vi x som faktor. Om vi partialintegrerar ytterligare en gång försvinner x,

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= x\cdot(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx\\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

Sammanställer vi uträkningarna fås

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\,dx &= x^2\sin x - 2\Big(-x\cos x + \sin x + C\Big)\\ &= (x^2-2)\sin x + 2x\cos x + C.\end{aligned}$$

Anm. Istället för att beteckna integrationskonstanten med $2C$ i det sista ledet (som vi egentligen borde göra) skriver vi C och underförstår att vi har olika konstanter de i olika leden.

602h Beräkna integralen $\displaystyle\int_3^9 x\ln(x-1)\,dx$.

Vi kan utläsa två faktorer i integranden, x och $\ln(x-1)$, vilket antyder partialintegration. Om vi tänker använda partialintegration ska vi derivera den ena faktorn och integrera den andra. Ofta när logaritmfaktorer förekommer väljer man att derivera dessa,

$$\begin{aligned}\int_3^9 x\ln(x-1)\,dx &= \Big[\tfrac{1}{2}x^2\cdot\ln(x-1)\Big]_3^9 - \int_3^9 \tfrac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x-1}\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}\,9^2\cdot\ln(9-1) - \tfrac{1}{2}\,3^2\cdot(3-1) - \tfrac{1}{2}\int_3^9 \frac{x^2}{x-1}\,dx.\end{aligned}$$

Den rationella integranden i högerledet förenklar vi med en polynomdivision,

$$\begin{array}{rl} x\ \ +1 & \\ \hline x^2 & \big|\ x-1 \\ x^2 - x & \\ \hline x & \\ x-1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Alltså är

$$\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}.$$

En primitiv funktion är

$$\int \frac{x^2}{x-1}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + x + \log|x-1|.$$

Vi har alltså att

$$\begin{aligned}\int_3^9 x\ln(x-1)\,dx &= \tfrac{81}{2}\ln 8 - \tfrac{9}{2}\ln 2 - \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1|\Big]_3^9\\ &= \tfrac{81}{2}\ln 2^3 - \tfrac{9}{2}\ln 2 - \tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{1}{2}\,9^2 + 9 + \ln|9-1| - \tfrac{1}{2}\,3^2 - 3 - \ln|3-1|\Big)\\ &= \big(\tfrac{81\cdot 3}{2} - \tfrac{9}{2}\big)\ln 2 - \tfrac{81}{4} - \tfrac{9}{2} - \tfrac{1}{2}\ln 8 + \tfrac{9}{4} + \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\ln 2\\ &= \tfrac{81\cdot 3-9-3+1}{2}\ln 2 + \tfrac{-81-18+9+6}{4} = 116\ \ln 2 - 21.\end{aligned}$$

602k Beräkna integralen $\int x \arctan x \, dx$.

Återigen har vi en integrand bestående av två faktorer. Vid första påsyn kan det verka smart att derivera x för då blir den en konstant, men det betyder att vi måste hitta en primitiv funktion till $\arctan x$ och det verkar svårt. Vi deriverar därför $\arctan x$ istället. Partiell integration ger

$$\begin{aligned}\int x \arctan x \, dx &= \tfrac{1}{2}x^2 \arctan x - \int \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 \arctan x - \tfrac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx.\end{aligned}$$

Förenklar vi integranden i högerledet med en polynomdivision får vi

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

Vi har alltså

$$\begin{aligned}\int x \arctan x \, dx &= \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \arctan x - \tfrac{1}{2}\int \Bigl(1 - \frac{1}{1+x^2}\Bigr)\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 \arctan x - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\arctan x + C \\ &= \tfrac{1}{2}(x^2+1)\arctan x - \tfrac{1}{2}x + C.\end{aligned}$$

602m Beräkna integralen $\int e^{-x} \sin 2x \, dx$.

Eftersom integranden består av två faktorer som är elementära funktioner kan det ligga nära till hands att prova med partiell integrering. I detta fall verkar båda faktorerna vara lika enkla att derivera och integrera, så låt oss integrera e^{-x} och derivera $\sin 2x$ (utan speciell anledning),

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\sin 2x \, dx &= -e^{-x}\cdot \sin 2x - \int -e^{-x}\cdot 2\cos 2x \, dx \\ &= -e^{-x}\sin 2x + 2\int e^{-x}\cos 2x \, dx.\end{aligned}$$

Integralen förenklades inte särskilt mycket; istället för faktorn $\sin 2x$ har vi $\cos 2x$. Kanske får vi tillbaka sinus-funktionen om vi partialintegrerar ytterligare en gång,

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\cos 2x \, dx &= -e^{-x}\cdot \cos 2x - \int -e^{-x}\cdot (-2\sin 2x)\, dx \\ &= -e^{-x}\cos 2x - 2\int e^{-x}\sin 2x \, dx.\end{aligned}$$

Vi får alltså tillbaka vår ursprungsintegral! Alltså har vi visat att

$$\int e^{-x}\sin 2x \, dx = -e^{-x}\sin 2x - 2e^{-x}\cos 2x - 4\int e^{-x}\sin 2x \, dx.$$

Samlar vi integraltermerna i ena ledet får vi

$$\int e^{-x}\sin 2x \, dx = -\tfrac{1}{5}e^{-x}\sin 2x - \tfrac{2}{5}e^{-x}\cos 2x + C.$$

603b Beräkna integralen $\int \sin\sqrt{x}\, dx$.

Det som är besvärande med integranden är argumentet $\sqrt{x}$ till sinus-funktionen. För att försöka bli av med den provar vi med substitutionen $u = \sqrt{x}$,

$$\begin{aligned}\int \sin\sqrt{x}\, dx &= \Bigl\{\, u = \sqrt{x},\ du = u'\, dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \\ &= \frac{1}{2u}\, dx,\ dx = 2u\, du \,\Bigr\} = 2\int u \sin u \, du.\end{aligned}$$

Nu har vi fått en integral som lämpar sig för partiell integrering. Vi deriverar u och integrerar $\sin u$,

$$\begin{aligned} &= 2\Big(u\cdot(-\cos u) - \int 1\cdot(-\cos u)\,du\Big)\\ &= 2u\cos u - 2\int \cos u\,du = -2u\cos u + 2\sin u + C. \end{aligned}$$

I den ursprungliga variabeln x blir detta,

$$= -2\sqrt{x}\,\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C.$$

Anm. Som en extra kontroll att vi räknat rätt kan vi derivera den primitiva funktionen och se om vi får tillbaka vår integrand,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\Big(-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C\Big)\\ &\quad = -2\Big(\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big)\cos\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\Big(-\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big) + 2\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0\\ &\quad = \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \sin\sqrt{x} + \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sin\sqrt{x}. \end{aligned}$$

603d Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\ln(x+1)\,dx$.

Integranden är ett förstagradsuttryck multiplicerat med en logaritm. Då kan det vara lämpligt att derivera bort logaritm-faktorn med partiell integrering,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2x+1)\ln(x+1)\,dx &= \Big[\,(x^2+x)\cdot\ln(x+1)\,\Big]_0^1 - \int_0^1 (x^2+x)\cdot\frac{1}{x+1}\,dx\\ &= (1^2+1)\ln 2 - (0^2+0)\ln 1 - \int_0^1 x\,dx = 2\ln 2 - \Big[\,\tfrac{1}{2}x^2\,\Big]_0^1 = 2\ln 2 - \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

603f Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin x\,dx$.

Vi första påsyn kan integralen verka hopplös. Hemligheten är att se integranden som en produkt,

$$1\cdot\arcsin x,$$

och sen derivera bort arcsin-funktionen i en partiell integrering,

$$\int_0^{1/2} 1\cdot\arcsin x\,dx = \Big[\,x\arcsin x\,\Big]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} x\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

I integralen i högerledet förekommer uttrycket $1-x^2$ i nämnaren och detta uttrycks derivata i täljaren (sånär som på en faktor -2), så substitutionen $u=1-x^2$ verkar given,

$$\begin{aligned} &= \tfrac{1}{2}\arcsin\tfrac{1}{2} - 0\cdot\arcsin 0 + \tfrac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= \{\,u=1-x^2,\ du=-2x\,dx,\ u\colon 1\to\tfrac{3}{4}\,\}\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{6}\pi - 0 + \tfrac{1}{2}\int_1^{3/4}\frac{du}{\sqrt{u}} = \tfrac{1}{12}\pi + \tfrac{1}{2}\Big[\,\frac{\sqrt{u}}{1/2}\,\Big]_1^{3/4}\\ &= \tfrac{1}{12}\pi + \sqrt{\tfrac{3}{4}} - \sqrt{1} = \tfrac{1}{12}\pi + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - 1. \end{aligned}$$

603i Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$.

Integranden är lite intressant. Kom ihåg att derivatan av $\arctan x$ är $\frac{1}{1+x^2}$, så om $u=\arctan x$ då kan integranden skrivas som $u\cdot u'$. Med andra ord ska vi substituera $u=\arctan x$,

$$\begin{aligned} \int\frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx &= \{u=\arctan x;\ du=\frac{dx}{1+x^2}\,\}\\ &= \int u\,du = \tfrac{1}{2}u^2 + C = \tfrac{1}{2}\big(\arctan x\big)^2 + C. \end{aligned}$$

604e Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx$.

Om vi delar upp integralen i två delar,

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1},$$

får vi först en integral där täljaren är nämnarens derivata och sedan en integral som vi vet den primitiva funktionen till,

$$\begin{aligned}&= \Bigl[\ln|x^2+1|\Bigr]_0^1 + \Bigl[\arctan x\Bigr]_0^1\\ &= \ln 2 - \ln 1 + \arctan 1 - \arctan 0 = \ln 2 + \tfrac{1}{4}\pi.\end{aligned}$$

604f Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4}\,dx$.

Vi delar upp integralen i två delar,

$$\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4}\,dx = \int_0^2 \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}. \tag{$*$}$$

I den första integralen i högerledet är täljaren derivatan av nämnaren (förutom en faktor 2) så vi har att

$$\begin{aligned}&\int_0^2 \frac{x}{x^2+4}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^2 \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \tfrac{1}{2}\Bigl[\ln|x^2+4|\Bigr]_0^2\\ &= \tfrac{1}{2}\bigl(\ln 8 - \ln 4\bigr) = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{8}{4} = \tfrac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

Den andra integralen i högerledet av $(*)$ liknar mycket en integral som har $\arctan x$ som primitiv funktion, men vi har inte riktigt den situationen. För att få en 1:a i nämnarens konstantterm bryter vi ut en faktor 4,

$$\frac{1}{x^2+4} = \frac{\frac{1}{4}}{x^2/4+1} = \frac{\frac{1}{4}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+1}.$$

Substituerar vi nu $u = x/2$ så får vi exakt den integrand som ger arctan,

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4} &= \tfrac{1}{4}\int_0^2 \frac{dx}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+1} = \{\, u = x/2,\ du = \tfrac{1}{2}\,dx,\ u\colon 0 \to 1 \,\}\\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{u^2+1} = \tfrac{1}{2}\Bigl[\arctan u\Bigr]_0^1 = \tfrac{1}{2}\arctan 1 - \tfrac{1}{2}\arctan 0 = \tfrac{1}{8}\pi.\end{aligned}$$

Sammantaget har vi

$$\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4}\,dx = \int_0^2 \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int_0^2 \frac{dx}{x^2+4} = \tfrac{1}{2}\ln 2 - \tfrac{1}{8}\pi.$$

604g Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

I nämnaren har vi uttrycket x^2+1 och dess derivata förekommer i täljaren, så vi substituerar $u = x^2+1$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx &= \{\, u = x^2+1,\ du = 2x\,dx,\ u\colon 1 \to 2 \,\}\\ &= \tfrac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u^2} = \tfrac{1}{2}\Bigl[-\frac{1}{u}\Bigr]_1^2 = \tfrac{1}{2}\Bigl(-\tfrac{1}{2} - (-\tfrac{1}{1})\Bigr) = \tfrac{1}{4}.\end{aligned}$$

604h Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3}\,dx.$

Om vi skriver om integranden som

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{x^2\cdot x}{(x^2+1)^3}$$

så ser vi att uttrycket $u = x^2+1$ har en derivata som förekommer i täljaren. Dessutom ingår faktorn x^2 i täljaren, men den kan vi skriva som $u-1$. Alltså verkar det upplagt för substitutionen $u = x^2+1$,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3}\,dx &= \tfrac{1}{2}\int \frac{x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^3}\,dx = \{\, u = x^2+1;\ du = 2x\,dx \,\}\\ &= \tfrac{1}{2}\int \frac{u-1}{u^3}\,du = \tfrac{1}{2}\int \bigl(u^{-2}-u^{-3}\bigr)\,du = \tfrac{1}{2}\Bigl(-\frac{1}{u}+\frac{1}{2u^2}\Bigr)+C\\ &= \tfrac{1}{2}\Bigl(-\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2(x^2+1)^2}\Bigr)+C = -\frac{2x^2+1}{4(x^2+1)^2}+C.\end{aligned}$$

604i Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx.$

Eftersom integranden är en rationell funktion finns en fastlagd arbetsgång. Vi bestämmer först nämnarens rötter. Om vi börjar med att kvadratkomplettera nämnarpolynomet får vi

$$x^2+2x+2 = (x+1)^2-1+2 = (x+1)^2+1.$$

Polynomet har alltså komplexa rötter och då kan vi inte faktorisera det i reella förstagradsfaktorer.

Eftersom vi har ett förstagradsuttryck i täljaren kan vi utnyttja det som nämnarens derivata efter en omskrivning,

$$\int_0^1 \frac{x+2}{(x+1)^2+1}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2+1}.$$

Den första integralen i högerledet är nu en logaritmisk derivata,

$$\int_0^1 \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1}\,dx = \Bigl[\ln\bigl|(x+1)^2+1\bigr|\Bigr]_0^1 = \ln 5 - \ln 2 = \ln\tfrac{5}{2}.$$

Den andra integralen är en arctan-integral vilket vi ser efter en enkel substitution,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2+1} &= \{\, u = x+1;\ du = dx;\ u\colon 1\to 2 \,\}\\ &= \int_1^2 \frac{du}{u^2+1} = \Bigl[\arctan u\Bigr]_1^2 = \arctan 2 - \arctan 1 = \arctan 2 - \tfrac{1}{4}\pi.\end{aligned}$$

Sammantaget har vi

$$\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{5}{2} + \arctan 2 - \tfrac{1}{4}\pi.$$

604k Beräkna integralen $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x^2+3x+2}.$

Vi undersöker först vilka nollställen nämnarpolynomet har. Kvadratkomplettering ger

$$\begin{aligned}x^2+3x+2 = \bigl(x+\tfrac{3}{2}\bigr)^2 - \bigl(\tfrac{3}{2}\bigr)^2 + 2 = \bigl(x+\tfrac{3}{2}\bigr)^2 - \tfrac{1}{4} = 0\\ \Leftrightarrow \qquad x = -\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}.\end{aligned}$$

Enligt faktorsatsen kan alltså integranden skrivas som

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}.$$

Vi kan nu partialbråkuppdela detta uttryck, vilket betyder att det finns konstanter A och B så att

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}. \qquad (*)$$

För att bestämma konstanterna A och B ska vi använda två olika metoder.

Metod 1 (Identifikation av båda led)

Vi skriver högerledet i $(*)$ med gemensam nämnare,

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+(2A+B)}{(x+1)(x+2)},$$

och jämför med vänsterledet i $(*)$. Eftersom båda led ska vara lika för alla x måste täljarpolynom vara identiska, d.v.s. koefficienterna måste vara lika,

$$\begin{aligned} A+B&=0 \\ 2A+B&=1 \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} A&=1 \\ B&=-1. \end{aligned}$$

Metod 2 (Handpåläggning)

Handpåläggning är en teknik som man kan använda för att bestämma de konstanter som svarar mot enkla faktorer (och multipla faktorer med maximalt gradtal, mer om detta i uppgift 604l).

För att bestämma konstanten A tar vi handen och täcker över den faktor i vänsterledet som svarar mot A,

$$\frac{1}{\qquad (x+2)},$$

och stoppar sedan istället för x in nollstället till den faktor vi täcker över; i detta fall $x=-1$. Vi får då värdet på konstanten A,

$$A = \frac{1}{\qquad (-1+2)} = 1.$$

På motsvarande sätt får vi fram B,

$$B = \frac{1}{(-2+1) \qquad} = -1.$$

Varför denna "magiska" metod fungerar står förklarat i exempel 7.16 i kursboken.

Nu när vi partialbråkuppdelat integranden blir resten enkelt,

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{dx}{x^2+3x+2} &= \int_2^3 \Bigl(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\Bigr)\,dx = \Bigl[\ln|x+1| - \ln|x+2|\Bigr]_2^3 \\ &= \ln 4 - \ln 5 - \bigl(\ln 3 - \ln 4\bigr) = \ln \tfrac{4\cdot 4}{5\cdot 3} = \ln \tfrac{16}{15}. \end{aligned}$$

604l Beräkna integralen $\displaystyle\int_2^4 \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx.$

Eftersom vi har en rationell integrand (och täljaren är inte nämnarens derivata) så bestämmer vi först nämnarens rötter. Nämnaren är ett tredjegradspolynom och även om det finns formler för att beräkna rötterna är de så pass komplicerade att det är bättre att först försöka gissa rötterna. Vi börjar med att prova några enkla x-värden,

$$\begin{array}{lcl} x=0 & : & 0^3 - 3\cdot 0 + 2 = 2 \neq 0, \\ x=1 & : & 1^3 - 3\cdot 1 + 2 = 0, \\ x=-1 & : & (-1)^3 - 3\cdot(-1) + 2 = 5 \neq 0, \\ x=2 & : & 2^3 - 3\cdot 2 + 2 = 4 \neq 0, \\ x=-2 & : & (-2)^3 - 3\cdot(-2) + 2 = 0. \end{array}$$

Vi undersöker inga fler heltal eftersom ett polynom med heltalskoefficienter kan inte ha några heltalsrötter som till beloppet är större än beloppet av polynomets konstantterm 2.

Eftersom vi nu vet två av rötterna ($x=1$ och $x=2$) ger faktorsatsen att polynomet kan skrivas som

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x+2)(x-A).$$

Den tredje roten (A) får vi reda på genom att t.ex. stoppa in $x=0$ i sambandet ovan,

$$2 = (-1)\cdot 2\cdot(-A) \qquad \Leftrightarrow \qquad A = 1.$$

Alltså kan integranden skrivas som

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}.$$

Med partialbråkuppdelning kan detta skrivas som

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}.$$

Eftersom $x+2$ är en enkel faktor i nämnaren ger handpåläggning

$$C = \frac{-2}{(-2-1)^2 \qquad} = -\tfrac{2}{9}.$$

Konstanten A kan vi också bestämma med handpåläggning eftersom den svarar mot faktorn $(x-1)^2$ som har maximalt gradtal,

$$A = \frac{1}{\qquad (1+2)} = \tfrac{1}{3}.$$

Konstanten B kan vi däremot inte bestämma med handpåläggning eftersom den svarar mot $x-1$ och samma faktor finns upphöjd till en högre potens i partialbråkuppdelningen.

Hittills har vi alltså visat att

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} - \frac{\frac{2}{9}}{x+2}.$$

Stoppar vi in $x=0$ fås

$$0 = \tfrac{1}{3} - B - \tfrac{1}{9} \qquad \Leftrightarrow \qquad B = \tfrac{2}{9}.$$

Vi får nu att

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx &= \int_2^4 \Bigl(\frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{2}{9}}{x-1} - \frac{\frac{2}{9}}{x+2} \Bigr)\,dx \\
&= \Bigl[-\tfrac{1}{3}\frac{1}{x-1} + \tfrac{2}{9}\ln|x-1| - \tfrac{2}{9}\ln|x+2| \Bigr]_2^4 \\
&= -\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{9}\ln 3 - \tfrac{2}{9}\ln 6 - \Bigl(-\tfrac{1}{3}\cdot 1 + \tfrac{2}{9}\ln 1 - \tfrac{2}{9}\ln 4 \Bigr) \\
&= \tfrac{2}{9} + \tfrac{2}{9}\ln\tfrac{3\cdot 4}{6} = \tfrac{2}{9}\bigl(1+\ln 2\bigr).
\end{aligned}$$

604m Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{x^4-x^2-4x+6}{x^3-2x-4}\,dx.$

Eftersom täljaren har högre gradtal än nämnaren förenklar vi integranden med en polynomdivision,

$$\begin{array}{l|l}
\quad x & \\
\hline
x^4 - x^2 \quad - 4x + 6 & x^3 - 2x - 4 \\
\cline{2-2}
x^4 - 2x^2 - 4x & \\
\hline
\qquad x^2 \qquad\quad + 6 &
\end{array}$$

Alltså är

$$\frac{x^4-x^2-4x+6}{x^3-2x-4} = x + \frac{x^2+6}{x^3-2x-4},$$

och

$$\int \frac{x^4-x^2-4x+6}{x^3-2x-4}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + \int \frac{x^2+6}{x^3-2x-4}\,dx. \qquad (*)$$

För att räkna ut integralen i högerledet bestämmer vi först nämnarens nollställen. Genom prövning ser vi att $x=2$ är en rot. Faktorsatsen ger att nämnaren kan skrivas

$$x^3-2x-4 = (x-2)(x^2+Ax+B),$$

där vi får den andra faktorn med en polynomdivision

$$\begin{array}{r|l}
x^2 + 2x \quad + 2 & \\
\hline
x^3 \qquad\quad - 2x - 4 & x - 2 \\
\cline{2-2}
x^3 - 2x^2 \qquad\qquad & \\
\hline
2x^2 - 2x \qquad & \\
2x^2 - 4x \qquad & \\
\hline
2x - 4 & \\
2x - 4 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Vi har alltså att

$$x^3-2x-4 = (x-2)(x^2+2x+2).$$

Vi kvadratkompletterar den andra faktorn

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 - 1^2 + 2 = (x+1)^2 + 1,$$

och ser att den saknar reella rötter. En partialbråkuppdelning av integranden i högerledet av $(*)$ är alltså i formen

$$\frac{x^2+6}{(x-2)\big((x+1)^2+1\big)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{(x+1)^2+1} \tag{†}$$

Handpåläggning ger

$$A = \frac{2^2+6}{\big((2+1)^2+1\big)} = 1.$$

Stoppar vi in $x=0$ i (†) fås

$$\frac{6}{(-2)\cdot 2} = \frac{1}{-2} + \frac{0+C}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad C = -2.$$

Stoppar vi in $x=1$ i (†) fås

$$\frac{7}{(-1)\cdot 5} = \frac{1}{-1} + \frac{B-2}{5} \qquad \Leftrightarrow \qquad B = 0.$$

Vi kan nu beräkna integralen i $(*)$,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-x^2-4x+6}{x^3-2x-4}\,dx &= \tfrac{1}{2}x^2 + \int \Big(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{(x+1)^2+1}\Big)\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}x^2 + \ln|x-2| - 2\arctan(x+1) + C.\end{aligned}$$

604n Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{x^3+3x}{x^3-x^2-x+1}\,dx.$

För att undvika att behöva utföra en polynomdivision kan vi ”lägga till och dra ifrån”,

$$\frac{x^3+3x}{x^3-x^2-x+1} = \frac{x^3-x^2-x+1+x^2+4x-1}{x^3-x^2-x+1} = 1 + \frac{x^2+4x-1}{x^3-x^2-x+1}.$$

Vi behöver partialbråkuppdela kvoten i högerledet för att beräkna en primitiv funktion. Genom gissning får vi att -1 och $+1$ är rötter till nämnaren. Faktorsatsen ger därmed att

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x+1)(x-A).$$

Stoppar vi in $x=0$ fås

$$1 = (-1)\cdot 1\cdot(-A) \qquad \Leftrightarrow \qquad A = 1.$$

Vi ansätter alltså

$$\frac{x^2+4x-1}{x^3-x^2-x+1} = \frac{x^2+4x-1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Handpåläggning ger

$$A = \frac{1^2+4\cdot 1-1}{(1+1)} = 2,$$

$$C = \frac{(-1)^2+4\cdot(-1)-1}{(-1-1)^2} = -1,$$

d.v.s.

$$\frac{x^2+4x-1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{-1}{x+1}.$$

Sätter vi in $x=0$ fås

$$\frac{-1}{(-1)^2\cdot 1} = \frac{2}{(-1)^2} + \frac{B}{-1} + \frac{-1}{1} \qquad \Leftrightarrow \qquad B = 2.$$

Alltså är

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{x^3+3x}{x^3-x^2-x+1}\,dx &= \int_2^3 1\,dx + \int_2^3 \Big(\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Big)\,dx\\ &= \Big[\,x\,\Big]_2^3 + \Big[-\frac{2}{x-1} + 2\ln|x-1| - \ln|x+1|\Big]_2^3\\ &= 3 - 2 - 1 + 2\ln 2 - \ln 4 - \big(-2 + 2\ln 1 - \ln 3\big) = 2 + \ln 3.\end{aligned}$$

604o Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2-4)^2}\,dx$.

Eftersom vi har en udda potens av x i täljaren är det lämpligt att göra substitutionen $u = x^2 - 4$ för att först förenkla integralen,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2-4)^2}\,dx &= \int_0^1 \frac{x^2\cdot x}{(x^2-4)^2}\,dx \\
&= \{\, u = x^2-4;\ du = 2x\,dx;\ u\colon\ -4 \to -3 \,\} = \tfrac{1}{2}\int_{-4}^{-3} \frac{u+4}{u^2}\,du \\
&= \tfrac{1}{2}\int_{-4}^{-3} \Bigl(\frac{1}{u} + \frac{4}{u^2}\Bigr)\,du = \tfrac{1}{2}\Bigl[\ln|u| - \frac{4}{u}\Bigr]_{-4}^{-3} \\
&= \tfrac{1}{2}\bigl(\ln 3 - \tfrac{4}{-3} - (\ln 4 - \tfrac{4}{-4})\bigr) = \ln\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{6}.
\end{aligned}$$

607c Beräkna integralen $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$.

Variabeln x förekommer i integranden endast som $\tan x$ och detta är ett av standardfallen då man ska substituera $t = \tan x$ (fall 3 på sidan 258 i kursboken),

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 x\,dx &= \{\, t = \tan x;\ dt = (1+\tan^2 x)\,dx \,\} \\
&= \int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt \\
&= \int \Bigl(1 - \frac{1}{1+t^2}\Bigr)\,dt = t - \arctan t + C \\
&= \tan x - \arctan\tan x + C = \tan x - x + C.
\end{aligned}$$

Anm. Notera att integranden har singulariteter i $x = \frac{n\pi}{2}$ (för $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) så den primitiva funktionen gäller bara inom intervall mellan singulariteterna. T.ex. är användningen av integralkalkylens huvudsats i uträkningen

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \tan^2 x\,dx &= \Bigl[\tan x - x\Bigr]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \tan\tfrac{3\pi}{4} - \tfrac{3\pi}{4} - \bigl(\tan\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{4}\bigr) \\
&= -1 - \tfrac{3\pi}{4} - 1 + \tfrac{\pi}{4} = -2 - \tfrac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

felaktig. (Varför är förresten svaret orimligt?)

607d Beräkna integralen $\displaystyle\int \tan^3 x\,dx$.

Med hjälp av trigonometriska formler kan vi skriva om integranden,

$$\int \tan^3 x\,dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{\sin x\cdot\sin^2 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\,\sin x\,dx.$$

Här ser vi att vi har $\sin x$ som är derivatan av $\cos x$ som en faktor. Vi substituerar därför $t = \cos x$,

$$\begin{aligned}
&= \{\, t = \cos x,\ dt = -\sin x\,dx \,\} = -\int \frac{1-t^2}{t^3}\,dt \\
&= \int \Bigl(-\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t}\Bigr)\,dt = \frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C \\
&= \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + C.
\end{aligned}$$

Anm. Vi har att

$$\frac{1}{2\cos^2 x} = \Bigl\{\, \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \,\Bigr\} = \tfrac{1}{2}\tan^2 x + \tfrac{1}{2}$$

så svaret stämmer med facit.

607e Beräkna integralen $\displaystyle\int \tan^4 x\,dx$.

Integranden innehåller bara $\tan x$ så vi substituerar $t = \tan x$,

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x\,dx &= \{\, t = \tan x,\ dt = (1+\tan^2 x)\,dx = (1+t^2)\,dx \,\}\\ &= \int \frac{t^4}{1+t^2}\,dt = \{\,\text{polynomdivision}\,\} = \int \Bigl(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\Bigr)\,dt\\ &= \tfrac{1}{3}t^3 - t + \arctan t + C = \tfrac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C.\end{aligned}$$

607e Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 2x\,dx$.

Med formeln för dubbla vinkeln har vi att

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 2x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot 2\cos x \sin x\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\,dx.$$

Faktorn $\cos x$ är derivatan av $\sin x$, så vi substituerar $t = \sin x$,

$$\begin{aligned}&= \{\, t = \sin x;\ dt = \cos x\,dx;\ t\colon 0 \to 1 \,\} = 2\int_0^1 t^2\,dt\\ &= 2\Bigl[\,\tfrac{1}{3}t^3\,\Bigr]_0^1 = \tfrac{2}{3}.\end{aligned}$$

607h Beräkna integralen $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$.

Vi förlänger med $\sin x$ och använder trigonometriska ettan,

$$\begin{aligned}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} &= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx\\ &= \{\, t = \cos x;\ dt = -\sin x\,dx;\ t\colon \tfrac{1}{2} \to 0 \,\} = \int_{1/2}^{0} \frac{-1}{1-t^2}\,dt\\ &= \int_{1/2}^{0} \frac{1}{(t-1)(t+1)}\,dt = \{\,\text{partialbråkuppdelning}\,\}\\ &= \tfrac{1}{2}\int_{1/2}^{0} \Bigl(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\Bigr)\,dt = \tfrac{1}{2}\Bigl[\,\ln|t-1| - \ln|t+1|\,\Bigr]_{1/2}^{0}\\ &= \tfrac{1}{2}\Bigl(\ln 1 - \ln 1 - \bigl(\ln\tfrac{1}{2} - \ln\tfrac{3}{2}\bigr)\Bigr) = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{3/2}{1/2} = \tfrac{1}{2}\ln 3.\end{aligned}$$

2.2 Beräkna integralen $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$.

Formeln för halva vinkeln ger att

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\int \cos 2x\,dx\\ &= \{\, t = 2x;\ dt = 2\,dx \,\} = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\int \cos t\,dt = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin t + C\\ &= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + C.\end{aligned}$$

2.3 Beräkna integralen $\int \sin^3 x\,dx$.

Med den trigonometriska ettan kan vi skriva om integranden,

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\,dx = \int \bigl(1-\cos^2 x\bigr)\sin x\,dx.$$

Nu passar substitutionen $t = \cos t$ bra,

$$\begin{aligned}&= \{\, t = \cos x;\ dt = -\sin x\,dx \,\} = -\int \bigl(1-t^2\bigr)\,dt\\ &= \tfrac{1}{3}t^3 - t + C = \tfrac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C.\end{aligned}$$

2.4 Beräkna integralen $\int \sin^4 x\,dx$.

Vi använder formeln för halva vinkeln upprepade gånger,

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\,dx &= \int \Bigl(\frac{1-\cos 2x}{2}\Bigr)^2 dx = \int \Bigl(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{1}{4}\cos^2 2x\Bigr)\,dx\\ &= \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + \tfrac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx = \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + \tfrac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx\\ &= \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + \tfrac{1}{8}x + \tfrac{1}{32}\sin 4x + C = \tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + \tfrac{1}{32}\sin 4x + C.\end{aligned}$$

7.22 Beräkna

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$,

c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$.

b) Eftersom integranden har en singularitet i $x = 0$ är integralen generaliserad och lika med

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+} \Bigl[2\sqrt{x}\Bigr]_a^1 = \lim_{a\to 0^+} 2\bigl(1-\sqrt{a}\bigr) = 2.$$

c) I detta fall är integrationsintervallet obegränsat och integralen är därmed en generaliserad integral som ska tolkas som

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{dx}{x^\alpha} = \{\,\text{om } \alpha \neq 1\,\} = \lim_{R\to\infty}\Bigl[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigr]_1^R\\ &= \frac{1}{1-\alpha}\cdot\lim_{R\to\infty}\bigl(R^{1-\alpha}-1\bigr) = \frac{1}{1-\alpha}\cdot\begin{cases}-1, & \text{om } \alpha > 1,\\ \text{divergent}, & \text{om } \alpha < 1.\end{cases}\\ &= \begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{om } \alpha > 1,\\ \text{divergent}, & \text{om } \alpha < 1.\end{cases}\end{aligned}$$

Om $\alpha = 1$ så blir integralen

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty}\Bigl[\ln|x|\Bigr]_1^R = \lim_{R\to\infty} \ln R = \text{divergent}.$$

Alltså blir svaret

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{om } \alpha > 1,\\ \text{divergent}, & \text{om } \alpha \leq 1.\end{cases}$$

7.23b Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$ (Ledning: Sätt $x = \tan t$).

Integrandens nämnare blir aldrig noll så integranden har ingen singularitet i integrationsintervallet. Däremot är integrationsintervallet obegränsat så integralen är generaliserad. Vi har

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}\\
&= \{\, x = \tan t,\ dx = (1+\tan^2 t)\,dt = (1+x^2)\,dt,\ t\colon 0 \to \arctan R \,\}\\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\arctan R} \frac{dt}{1+\tan^2 t}\\
&= \{\, R\to\infty \ \Rightarrow\ \arctan R \to \pi/2^-;\ 1+\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \,\}\\
&= \lim_{s\to\pi/2^-} \int_0^s \cos^2 t\,dt = \{\,\text{formeln för halva vinkeln}\,\}\\
&= \lim_{s\to\pi/2^-} \int_0^s \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \lim_{s\to\pi/2^-} \Big[\, \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin 2t \,\Big]_0^s\\
&= \lim_{s\to\pi/2^-} \Big(\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{4}\sin 2s\Big) = \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{4}\sin\pi = \tfrac{1}{4}\pi.
\end{aligned}$$

907d Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx$$

är konvergent eller divergent.

Om $a<0$ så har integranden en singularitet i $x=0$ och om $b<0$ så finns en singularitet i $x=1$. Det är i dessa fall integralen är generaliserad.

Eftersom vi har två singulariteter delar vi upp integrationsintervallet i två delar så att singulariteterna hamnar i varsina intervall,

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx = \int_0^{1/2} x^a(1-x)^b\,dx + \int_{1/2}^1 x^a(1-x)^b\,dx = I_1 + I_2.$$

För att integralen i vänsterledet ska existera måste båda integralerna i högerledet existera. Vi undersöker integraltermerna separat.

I_1: Det som avgör om integralen är konvergent är integrandens storleksordning då $x\to 0^+$. Vi ska alltså tänka smått! I närheten av origo är

$$x^a(1-x)^b \approx x^a\cdot 1.$$

så vi kan förvänta oss att integralen konvergerar/divergerar samtidigt med $\int_0^{1/2} x^a\,dx$. Denna integral är ett känt integralfall som man ofta använder som jämförelsefall,

$$\int_0^{1/2} x^a\,dx = \begin{cases}\text{konvergent,} & \text{om } a>-1,\\ \text{divergent,} & \text{om } a\le -1.\end{cases}$$

För att göra detta lösa resonemang giltigt använder vi jämförelseprincipen (sats 9.15) och jämför de två integranderna när $x\to 0^+$. Vi har att

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a(1-x)^b}{x^a} = \lim_{x\to 0^+} (1-x)^b = 1 \ne 0.$$

Jämförelseprincipen ger nu att

$$\int_0^{1/2} x^a(1-x)^b\,dx \quad\text{och}\quad \int_0^{1/2} x^a\,dx$$

konvergerar samtidigt, d.v.s.

$$\int_0^{1/2} x^a(1-x)^b\,dx = \begin{cases}\text{konvergent,} & \text{om } a>-1,\\ \text{divergent,} & \text{om } a\le -1.\end{cases}$$

I_2: Resonemanget liknar det vi gjorde för integralen I_1. I närheten av $x=1$ har vi att

$$x^a(1-x)^b \approx 1\cdot(1-x)^b$$

så vi jämför vår integral med

$$\int_{1/2}^{1} (1-x)^b\,dx = \begin{cases} \text{konvergent,} & \text{då } b > -1, \\ \text{divergent,} & \text{då } b \le -1. \end{cases}$$

Vi har att

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^a(1-x)^b}{(1-x)^b} = \lim_{x\to 1^-} x^a = 1 \ne 0.$$

Alltså konvergerar I_2 samtidigt med $\int (1-x)^b\,dx$, d.v.s.

$$\int_{1/2}^{1} x^a(1-x)^b\,dx = \begin{cases} \text{konvergent,} & \text{då } b > -1, \\ \text{divergent,} & \text{då } b \le -1. \end{cases}$$

Sammanfattningsvis har vi att

$$\int_{0}^{1} x^a(1-x)^b\,dx = \begin{cases} \text{konvergent,} & \text{om } a > -1 \text{ och } b > -1, \\ \text{divergent,} & \text{annars.} \end{cases}$$

907e Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx$$

är konvergent eller divergent.

Nämnaren är inte noll i integrationsintervallet så vi har inga singulariteter utan vi har "bara" ett obegränsat integrationsintervall. Konvergensen hos integralen bestäms av om integranden avtar "tillräckligt" fort när $x \to \infty$. I detta fall ser vi att

$$\frac{\ln(x^2+1)}{x} \ge \frac{1}{x} \qquad \text{för } x > 1,$$

så vi har att

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx &= \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx \ge \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x}\,dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \Big[\ln|x|\Big]_1^R = \lim_{R\to\infty} \ln R = \infty. \end{aligned}$$

Alltså är vår integral divergent.

907g Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

är konvergent eller divergent.

Nämnaren antar värdet 0 för $x = -1$ och $x = 0$. Integranden har alltså singulariteter i dessa punkter. Eftersom $x = -1$ ligger utanför integrationsintervallet påverkar den inte konvergensen.

Förutom den singulära punkten $x = 0$ är integrationsintervallet obegränsat. Vi delar därför upp integrationsintervallet i två delar, en del som innehåller singulariteten i origo och en del som är obegränsad (men utan singulariteten),

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} + \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = I_1 + I_2.$$

För att integralen i vänsterledet ska vara konvergent måste båda integralerna i högerledet vara konvergenta.

I_1: Nära origo har integranden storleksordningen

$$\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \approx \frac{1}{1\cdot\sqrt{x}}$$

och eftersom integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

är konvergent så kan vi misstänka att vår integral också är konvergent. Jämför vi de två integranderna i $x=0$ får vi att

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1 \neq 0$$

och jämförelseprincipen ger att I_1 är konvergent.

I_2: När $x\to\infty$ har integranden storleksordningen

$$\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \approx \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Integralen $\int_1^\infty x^{-3/2}\,dx$ är konvergent (se uppgift 7.22c), så eftersom

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{x}+1} = 1 \neq 0$$

ger jämförelseprincipen att I_2 är konvergent.

Alltså är integralen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

konvergent.

907m Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\ln x}$$

är konvergent eller divergent.

Vi har två singulariteter i integrationsintervallet

$$\begin{aligned} x&=0, \quad \text{eftersom } \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0,\\ x&=1, \quad \text{eftersom } \lim_{x\to 1^-} x\ln x = 0. \end{aligned}$$

Som vanligt gäller att integralen är konvergent om både

$$i)\ \int_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln x} \qquad \text{och} \qquad ii)\ \int_{1/2}^1 \frac{dx}{x\ln x}$$

är konvergenta.

Singulariteten i $x=0$ verkar lite besvärlig så vi börjar med att undersöka integralen i punkt *ii*. När vi undersöker integranden nära $x=1$ har vi att

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x\ln\bigl(1+(x-1)\bigr)} = \{\text{ Maclaurinutveckling av } \ln(1+x) = x + O(x^2)\ \}\\ &= \frac{1}{x\bigl((x-1)+O(x-1)^2\bigr)} = \frac{1}{(x-1)+O(x-1)^2}\\ &= \frac{1}{x-1} + O\Bigl(\frac{1}{(x-1)^2}\Bigr). \end{aligned}$$

Integranden har en singularitet av typen $1/(x-1)$ i $x=1$ och då är integralen divergent (punkt 2 i sats 9.15).

Eftersom integralen *ii* är divergent är integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\ln x}$$

divergent.

628b Visa att

$$\int_0^1 \frac{x^5}{x^7+1}\,dx \geq \tfrac{1}{7}\ln 2.$$

När man ska visa olikheter av den här typen använder man oftast integralens monotonicitet, d.v.s.

Om $f(x) \geq g(x)$ i ett intervall $[a,b]$ så är

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx, \qquad \text{(Sats 7.3iv)}$$

Tanken är att vi hittar en enkel funktion $g(x)$ som går att integrera analytiskt och som ger värdet i högerledet. Detta kan vara ganska knepigt ibland. Låt oss först titta på ett misslyckat försök.

Metod 1 (misslyckande 1)

I intervallet $[0,1]$ är

$$x^7 \leq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1+x^7 \leq 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{1+x^7} \geq \frac{1}{2}.$$

Alltså har vi att $\frac{x^5}{1+x^7} \geq \frac{x^5}{2}$ och integralens monotonicitet ger att

$$\int_0^1 \frac{x^5}{1+x^7}\,dx \geq \int_0^1 \frac{x^5}{2}\,dx = \tfrac{1}{12}\bigl[\,x^6\,\bigr]_0^1 = \tfrac{1}{12}.$$

Vi har visserligen fått fram en undre gräns på integralens värde men vår gräns är mindre än det önskade $\frac{1}{7}\ln 2$. Vi har alltså misslyckats.

Felet vi gjorde var att olikheten $x^7 \leq 1$ vi utgick från är för grov. Vi måste på något sätt skatta integranden bättre.

Metod 2 (misslyckande 2)

Istället för att planlöst försöka skatta integranden kan vi titta lite på vad vi har i högerledet och försöka arbeta baklänges. Uttrycket $\ln 2$ skulle kunna komma från

$$\bigl[\ln|x+1|\,\bigr]_0^1 = \ln 2,$$

d.v.s. från integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1}.$$

Hmm..., vi har att

$$\begin{aligned} x^6 \leq 1 \qquad &\Leftrightarrow \qquad x^7 \leq x \qquad \Leftrightarrow \qquad 1+x^7 \leq 1+x \\ &\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{1+x^7} \geq \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

men nu kommer faktorn x^5 in och förstör det roliga eftersom x^5 inte uppfyller $x^5 \geq \frac{1}{7}$ i hela intervallet.

Metod 3 (Lyckosamt)

Efter att ha tittat lite noggrannare på integralen ser vi att om vi ersätter x^5 i täljaren med det mindre uttrycket x^6 så får vi i täljaren derivatan av nämnaren och det ger just en logaritmisk primitiv funktion. Det verkar lovande!

$$\int_0^1 \frac{x^5}{1+x^7}\,dx \geq \int_0^1 \frac{x^6}{1+x^7}\,dx = \tfrac{1}{7}\int_0^1 \frac{7x^6}{1+x^7}\,dx = \tfrac{1}{7}\bigl[\ln|1+x^7|\,\bigr]_0^1 = \tfrac{1}{7}\ln 2.$$

628c Visa att $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^{-x}+x^2} \geq \frac{\pi}{2}.$

Det som förhindrar oss från att enkelt hitta en primitiv funktion är e^{-x} i nämnaren. Tittar vi dessutom på högerledet $\pi/2$ så skulle den kunna uppstå av

$$\bigl[\arctan x\,\bigr]_0^\infty = \pi/2,$$

d.v.s. av integralen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$$

En tänkbar strategi är alltså att ersätta e^{-x} med 1. Vi får se om det fungerar. Funktionen $x \mapsto e^{-x}$ är avtagande och eftersom $e^{-0} = 1$ så är

$$e^{-x} \le 1 \quad \text{för } x \text{ i intervallet } [0, \infty).$$

Detta ger att

$$e^{-x} + x^2 \le 1 + x^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{e^{-x} + x^2} \ge \frac{1}{1 + x^2}.$$

Integralens monotonicitet ger

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{-x} + x^2} \ge \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \big[\arctan x\big]_0^\infty = \pi/2.$$

628d Visa att $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2} \sin x \, dx \le \frac{e-1}{2}$.

Just faktorn e^{x^2} brukar vålla besvär vid analytiska integralberäkningar. Dess primitiva funktion går inte att uttrycka i elementära funktioner, så en naiv skattning av typen

$$\sin x \le 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{x^2} \sin x \le e^{x^2}$$

har vi inget för. Samtidigt vill vi inte försöka skatta bort e^{x^2} eftersom talet e förekommer i högerledet och det är ett tecken på att exponentialfunktionen på något sätt är inblandad och bör möjligtvis sparas.

Från tidigare i kursen kanske vi kommer ihåg olikheten

$$\sin x \le x, \quad \text{för } x \ge 0. \qquad \text{(Sats 2.1)}$$

Den är värd att prova, för om vi ersätter $\sin x$ med x får vi dessutom derivatan av exponentialfunktionens argument x^2 som en faktor i integranden och detta öppnar för en substitution. Vi provar!

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2} \sin x \, dx &\le \int_0^1 e^{x^2} x \, dx = \{\, s = x^2,\ dx = 2x\,dx,\ s\colon 0 \to 1 \,\} \\ &= \tfrac{1}{2} \int_0^1 e^s \, ds = \tfrac{1}{2}\big[\, e^s \,\big]_0^1 = \frac{e-1}{2}.\end{aligned}$$

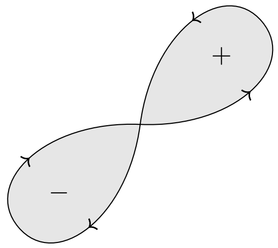
705 Beräkna arean inom kurvan

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t + \sin t, \\ y = \cos t - \sin t, \end{cases} \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

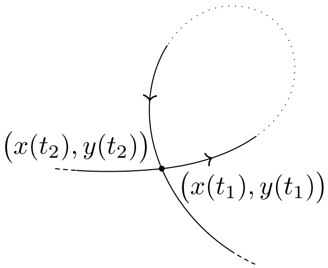
Kurvan är en parameterkurva så arean ges av

$$\tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} \big(x\dot{y} - \dot{x}y\big)\, dt,$$

om kurvan genomlöper randen i positivt led. Det där med "positivt led" är viktigt att komma ihåg. Problemet är inte så mycket att vi skulle råka integrera kurvan i negativt led för då blir areaintegralen negativ och det räcker om vi byter tecken för att få arean. Problemet är om kurvan har öglor, för då kan kurvan innesluta olika delområden med olika omloppsriktningar och delareorna börjar kancellera varandra.



Vi kan upptäcka möjliga öglor genom att undersöka om det finns punkter på kurvan som genomlöps fler gånger, d.v.s. om det finns två olika parametervärden $t = t_1$ och $t = t_2$ som ger samma punkt,



$$x(t_1) = x(t_2),$$
$$y(t_1) = y(t_2).$$

Så låt oss undersöka detta,

$$1 + \cos t_1 + \sin t_1 = 1 + \cos t_2 + \sin t_2, \quad (1)$$
$$\cos t_1 - \sin t_1 = \cos t_2 - \sin t_2. \quad (2)$$

Adderar vi (1) och (2) fås

$$1 + 2\cos t_1 = 1 + 2\cos t_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos t_1 = \cos t_2.$$

Detta insatt i t.ex. (2) ger

$$\sin t_1 = \sin t_2.$$

Vi måste alltså ha att

$$\cos t_1 = \cos t_2, \quad (3)$$
$$\sin t_1 = \sin t_2. \quad (4)$$

Flytta över allt i vänsterledet och använd additionsformlerna

$$\begin{aligned} \cos t_1 - \cos t_2 &= 0 \\ \sin t_1 - \sin t_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} -2\sin\frac{t_1 - t_2}{2}\sin\frac{t_1 + t_2}{2} &= 0 \quad (5) \\ 2\sin\frac{t_1 - t_2}{2}\cos\frac{t_1 + t_2}{2} &= 0 \quad (6) \end{aligned}$$

För att (5) ska vara uppfylld måste vi ha ett av fallen

$\sin\frac{t_1 - t_2}{2} = 0$: Då är (5) också uppfylld. Detta ger att

$$\frac{t_1 - t_2}{2} = n\pi \qquad \Leftrightarrow \qquad t_1 = t_2 + 2n\pi$$

för något heltal n. Eftersom parameterintervallet $[0, 2\pi]$ har längd 2π kan den enda lösningen som uppfyller $t_1 \neq t_2$ vara $t_1 = 0$ och $t_2 = 2\pi$ (eller ombytta roller), vilket betyder att kurvans startpunkt och ändpunkt sammanfaller.

$\cos\frac{t_1 + t_2}{2} = 0$: Då är $\sin\frac{t_1 + t_2}{2} \neq 0$ eftersom cosinus och sinus har olika nollställen. (5) ger därför att $\sin\frac{t_1 - t_2}{2} = 0$ vilket är fallet ovan.

Vi har alltså visat att förutom kurvans start- och ändpunkt finns det ingen punkt som svarar mot två parametervärden, d.v.s. kurvan är enkel och saknar öglor.

Areaintegralen blir nu

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x\dot{y} - \dot{x}y)\,dt \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big((1 + \cos t + \sin t)(-\sin t - \cos t) - \\ &\qquad (-\sin t + \cos t)(\cos t - \sin t)\big)\,dt \\ &= \{\,\text{förenklingar och trigonometriska ettan}\,\} \\ &= -\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\sin t + \cos t + 2)\,dt = -\tfrac{1}{2}\big[-\cos t + \sin t + 2t\big]_0^{2\pi} \\ &= -\tfrac{1}{2}\cdot 4\pi = -2\pi. \end{aligned}$$

Eftersom areaintegralen har ett negativt värde har vi alltså integrerat kurvan i negativ led och arean ska vara 2π.

706 Beräkna arean inom kurvan

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 t, \\ y &= \sin^3 t, \end{aligned} \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

Vi ska först undersöka om kurvan har några öglor, d.v.s. om det finns någon punkt på kurvan som svarar mot olika parametervärden $t = t_1$ och $t = t_2$, m.a.o.

$$\cos^3 t_1 = \cos^3 t_2,$$
$$\sin^3 t_1 = \sin^3 t_2.$$

Eftersom funktionen $x \mapsto x^3$ är en-entydig är dessa båda ekvationer ekvivalenta med

$$\begin{aligned}\cos t_1 &= \cos t_2,\\ \sin t_1 &= \sin t_2.\end{aligned}$$

Detta är precis samma system som vi undersökte i uppgift 705. Vi visade då att, förutom start- och ändpunkten, finns det inga punkter som uppfyller sambanden.

Arean ges då av (beloppstecknen tar vi med eftersom vi inte vet i vilken riktning vi genomlöper kurvan),

$$\begin{aligned}\Bigl|\int_0^{2\pi} x\dot{y}\,dt\Bigr| &= \Bigl|\int_0^{2\pi} \cos^3 t\cdot 3\sin t^2\cos t\,dt\Bigr|\\ &= 3\Bigl|\int_0^{2\pi}\cos^4 t\sin^2 t\,dt\Bigr| = 3\Bigl|\int_0^{2\pi}\Bigl(\frac{1+\cos 2t}{2}\Bigr)^2\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt\Bigr|\\ &= \{\,\text{konjugatregeln}\,\} = \tfrac{3}{8}\Bigl|\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)(1-\cos^2 2t)\,dt\Bigr|\\ &= \tfrac{3}{8}\Bigl|\int_0^{2\pi}\bigl(1+\cos 2t-\cos^2 2t-\cos^3 2t\bigr)\,dt\Bigr|\\ &= \tfrac{3}{8}\Bigl|\int_0^{2\pi} dt+\int_0^{2\pi}\cos 2t\,dt-\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 4t}{2}\,dt\\ &\qquad -\int_0^{2\pi}(1-\sin^2 2t)\cos 2t\,dt\Bigr|\\ &= \{\,s=\sin 2t,\ ds=2\sin 2t\,dt,\ s\colon 0\to 0\,\}\\ &= \tfrac{3}{8}\bigl|2\pi+0-\pi-0\bigr| = \tfrac{3}{8}\pi.\end{aligned}$$

708 Beräkna arean av var och en av de öglor i x,y-planet som bildas av kurvan

$$\begin{aligned}x &= \sin t,\\ y &= \sin 2t.\end{aligned}$$

Eftersom $x=\sin t$ är 2π-periodisk och $y=\sin 2t$ är π-periodisk så har de minsta gemensamma period 2π vilket betyder att kurvan genomlöps helt om vi väljer ett parameterintervall med längd 2π. Vi kan för enkelhets skull välja parameterintervallet $[0,2\pi]$.

Vi bestämmer öglorna genom att undersöka i vilka punkter kurvan skär sig själv, d.v.s. när det finns två parametervärden $t=t_1$ och $t=t_2$ som ger samma punkt. Med andra ord söker vi lösningarna till

$$\begin{aligned}\sin t_1 &= \sin t_2, &(1)\\ \sin 2t_1 &= \sin 2t_2. &(2)\end{aligned}$$

Vi skriver om (2) med formeln för dubbla vinkeln,

$$2\sin t_1\cos t_1 = 2\sin t_2\cos t_2. \qquad (2')$$

För att lösa (1) och (2′) undersöker vi två fall

$\sin t_1 \neq 0$: Då får vi från (1) och (2′) att

$$\cos t_1 = \cos t_2. \qquad (3)$$

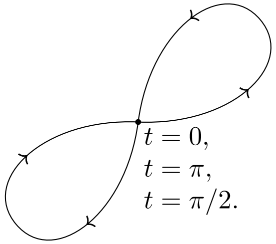
Vi har alltså att

$$\begin{aligned}\sin t_1 &= \sin t_2,\\ \cos t_1 &= \cos t_2,\end{aligned}$$

och detta system har inga lösningar ($t_1 \neq t_2$) vilket vi visat tidigare i uppgift 705.

$\sin t_1 = 0$: I detta fall är båda ekvationerna uppfyllda, och vi har att $t_1=0$, $t_1=\pi$ eller $t_1=2\pi$.

Kurvan skär alltså sig själv i punkten som svarar mot parametervärdena $t = 0$, $t = \pi$ och $t = 2\pi$.



Kurvan har därmed två öglor med randkurvorna $\{x = \sin t,\ y = \sin 2t,\ 0 \le t \le \pi\}$ respektive $\{x = \sin t,\ y = \sin 2t,\ \pi \le t \le 2\pi\}$. Områdena som innesluts av respektive ögla har areorna

$$\begin{aligned}
\Bigl|\int_0^\pi x\dot{y}\,dt\Bigr| &= \Bigl|\int_0^\pi \sin t \cdot 2\cos 2t\,dt\Bigr| = \{\,\text{formeln för dubbla vinkeln}\,\}\\
&= \Bigl|\int_0^\pi \sin t \cdot 2(2\cos^2 t - 1)\,dt\Bigr| = \Bigl|4\int_0^\pi \cos^2 t\sin t\,dt - 2\int_0^\pi \sin t\,dt\Bigr|\\
&= \Bigl|4\Bigl[-\tfrac{1}{3}\cos^3 t\Bigr]_0^\pi + 2\Bigl[\cos t\Bigr]_0^\pi\Bigr| = \Bigl|\tfrac{4}{3}\bigl(1-(-1)\bigr) + 2(-1-1)\Bigr| = \tfrac{4}{3},
\end{aligned}$$

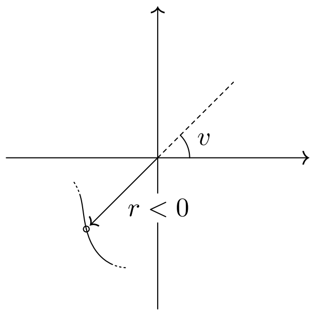
och

$$\begin{aligned}
\Bigl|\int_\pi^{2\pi} x\dot{y}\,dt\Bigr| &= \{\,\text{Samma primitiva funktion som ovan}\,\}\\
&= \Bigl|4\Bigl[-\tfrac{1}{3}\cos^3 t\Bigr]_\pi^{2\pi} + \Bigl[\cos t\Bigr]_\pi^{2\pi}\Bigr| = \Bigl|\tfrac{4}{3}(-1-1) + 2\bigl(1-(-1)\bigr)\Bigr| = \tfrac{4}{3}.
\end{aligned}$$

712 Beräkna arean av det område som i polära koordinater definieras av

$$r \le \frac{1}{\sin v + \cos v} \quad \text{och } 0 \le v \le \pi/2.$$

Det man måste se upp med är att den polära representationen inte är unik. De två polära koordinaterna (r, v) och $(-r, v+\pi)$ svarar mot samma punkt. Det kan innebära att två kurvsegment som till synes är olika (har olika vinklar) ändå innesluter samma område eftersom den ena kurvan har negativ radie och då speglas över till motstående vinkelområde.



I vårt fall är vinkeln begränsad till $[0, \pi/2]$ så detta fenomen kan inte uppstå.

Arean ges av formeln

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r(v)^2\,dv &= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{dv}{(\sin v + \cos v)^2}\\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{dv}{\sin^2 v + 2\sin v\cos v + \cos^2 v} = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{dv}{1 + \sin 2v}\\
&= \{\, x = 2v,\ dx = 2\,dv,\ x\colon 0 \to \pi \,\} = \tfrac{1}{4}\int_0^\pi \frac{dx}{1+\sin x}.
\end{aligned}$$

Det kan vara svårt att direkt se någon metod för att räkna ut integralen, men eftersom integranden är ett rationellt uttryck i en trigonometrisk funktion kan vi alltid ta till universalsubstitutionen

$$t = \tan\frac{x}{2}.$$

Denna inverssubstitution fungerar eftersom tan är strängt växande på $[0,\pi/2]$. Vi behöver uttrycka $\sin x$ i t,

$$\sin x = \sin\bigl(2\,\tfrac{x}{2}\bigr) = 2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2} = 2\tan\tfrac{x}{2}\cos^2\tfrac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Vi har också att

$$dt = (1+\tan^2\tfrac{x}{2})\,dx = (1+t^2)\,dx \qquad\Leftrightarrow\qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

och integrationsgränserna blir

$$\begin{aligned} x &= 0 &\quad&\Leftrightarrow&\quad t &= 0,\\ x &= \pi/2 &&\Leftrightarrow& t &= \infty. \end{aligned}$$

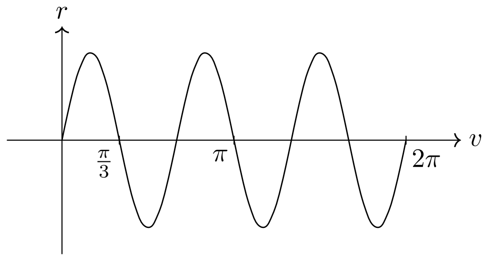
Integralen blir alltså

$$\begin{aligned} &= \tfrac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\dfrac{2}{1+t^2}\,dt}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}} = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+2t+t^2}\\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{(t+1)^2} = \lim_{R\to\infty}\tfrac{1}{2}\Bigl[-\frac{1}{t+1}\Bigr]_0^R = \tfrac{1}{2}\bigl(0-(-1)\bigr) = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

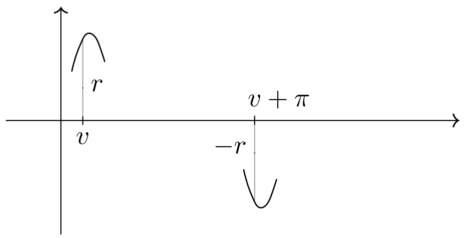
713b Beräkna arean av det område som begränsas av

$$r = \sin 3v, \qquad \text{(polära koordinater)}.$$

Vi måste först undersöka om vi har problemet med att den polära kurvan beskriver samma kurvområde två gånger på grund av identifikationen $(r,v) = (-r, v+\pi)$. Vi ritar upp hur radien r beror av den polära vinkeln v,



Här ser vi att vi just drabbas av detta eftersom alla vinklar $v+\pi$ till höger om π ger en radie med omvänt tecken än den med vinkel v.



Analytiskt ser vi detta också

$$r(v+\pi) = \sin(3v+3\pi) = -\sin 3v = -r(v).$$

Alltså beskriver parametervärdena mellan π och 2π samma kurva som parametervärdena mellan 0 och π. Kurvan innesluter därmed arean

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\int_0^\pi r(v)^2\,dv &= \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 3v\,dv = \{\,\text{formeln för halva vinkeln}\,\}\\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \frac{1-\cos 6v}{2}\,dv = \tfrac{1}{4}\Bigl[v - \tfrac{1}{6}\sin 6v\Bigr]_0^\pi\\ &= \tfrac{1}{4}\bigl(\pi - 0 - (0-0)\bigr) = \tfrac{1}{4}\pi. \end{aligned}$$