Avsnitt 1, Integraler

601b Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^4+2}{x^3}\,dx$.

Integranden är en rationell funktion som vi kan skriva som

$$\frac{x^4+2}{x^3} = \frac{x^4}{x^3} + \frac{2}{x^3} = x + \frac{2}{x^3}.$$

Vi delar upp integralen i två delar och integrerar delarna var för sig,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x^4+2}{x^3}\,dx &= \int_1^2 \Bigl(x+\frac{2}{x^3}\Bigr)\,dx = \int_1^2 x\,dx + 2\int_1^2 x^{-3}\,dx \\ &= \Bigl[\,\frac{x^2}{2}\,\Bigr]_1^2 + 2\Bigl[\,\frac{x^{-2}}{-2}\,\Bigr]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} + 2\Bigl(\frac{2^{-2}}{-2} - \frac{1^{-2}}{-2}\Bigr) \\ &= 2 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + 1 = \tfrac{9}{4}.\end{aligned}$$

601d Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^5 \sqrt{3x+1}\,dx$.

För att kunna räkna ut integralen behöver vi bestämma en primitiv funktion till integranden. Vi behöver alltså bestämma en funktion $F(x)$ som uppfyller

$$F'(x) = \sqrt{3x+1}.$$

Om integranden istället hade varit $\sqrt{x}$ skulle vi direkt veta att en primitiv funktion är $\dfrac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}x^{3/2}$. Nu är vår integrand ”roten ur ett förstagradsuttryck” och just att vi har ett förstagradsuttryck under rottecknet gör att den inre derivatan av motsvarande formel $\frac{2}{3}(3x+1)^{3/2}$ är en konstant, så vi borde därför ha en primitiv funktion i formen

$$F(x) = \tfrac{2}{3}C(3x+1)^{3/2},$$

där C är en konstant. Derivering av F ger att

$$F'(x) = \tfrac{2}{3}C\cdot\tfrac{3}{2}(3x+1)^{1/2}\cdot 3 = 3C\sqrt{3x+1}.$$

För att detta ska vara lika med $\sqrt{3x+1}$ måste $C=\frac{1}{3}$. Alltså är

$$F(x) = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot(3x+1)^{3/2} = \tfrac{2}{9}(3x+1)\sqrt{3x+1}$$

en primitiv funktion till $\sqrt{3x+1}$. Vi får

$$\begin{aligned}\int_0^5 \sqrt{3x+1}\,dx &= \Bigl[\,\tfrac{2}{9}(3x+1)\sqrt{3x+1}\,\Bigr]_0^5 \\ &= \tfrac{2}{9}(3\cdot 5+1)\sqrt{3\cdot 5+1} - \tfrac{2}{9}(3\cdot 0+1)\sqrt{3\cdot 0+1} \\ &= \tfrac{2}{9}\cdot 16\cdot 4 - \tfrac{2}{9}\cdot 1\cdot 1 = \tfrac{126}{9} = 14.\end{aligned}$$

601h Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,dx$.

Integranden finns faktiskt med i tabellen över primitiva funktioner till elementära funktioner. Skriver vi integranden som

$$e^{2x} = \bigl(e^2\bigr)^x = a^x, \quad \text{där } a = e^2,$$

så vet vi att en primitiv funktion är

$$\frac{a^x}{\ln a} = \frac{\bigl(e^2\bigr)^x}{\ln e^2} = \frac{e^{2x}}{2}.$$

Integralen blir

$$\int_0^1 e^{2x}\,dx = \Bigl[\,\tfrac{1}{2}e^{2x}\,\Bigr]_0^1 = \tfrac{1}{2}e^{2\cdot 1} - \tfrac{1}{2}e^{2\cdot 0} = \tfrac{1}{2}(e^2-1).$$

601j Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{7-x}$.

Vi kan känna igen integranden som ett uttryck i formen

$$\frac{f'(x)}{f(x)},$$

för om vi sätter $f(x) = 7-x$ så är $f'(x) = -1$ och

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{7-x}.$$

Med formeln för logaritmisk derivering vet vi att en primitiv funktion är

$$-\ln|f(x)| = -\ln|7-x|.$$

Alltså är

$$\begin{aligned}\int_1^5 \frac{dx}{7-x} &= \Bigl[-\ln|7-x|\Bigr]_1^5 = -\ln 2 - \bigl(-\ln 6\bigr)\\ &= \ln 6 - \ln 2 = \ln\frac{6}{2} = \ln 3.\end{aligned}$$

601l Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^5 \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx$.

Integranden är en funktion i formen

$$\frac{f'(x)}{f(x)},$$

sånär som på en faktor 2. Med $f(x) = x^2+2x+5$ är nämligen $f'(x) = 2x+2 = 2(x+1)$ och vi har att

$$\frac{x+1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\,\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Formeln för logaritmisk derivering ger att en primitiv funktion är

$$\tfrac{1}{2}\log|f(x)| = \tfrac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|.$$

Vi får

$$\begin{aligned}\int_0^5 \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx &= \Bigl[\tfrac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|\Bigr]_0^5\\ &= \tfrac{1}{2}\ln|5^2+2\cdot 5+5| - \tfrac{1}{2}\ln|0^2+2\cdot 0+5| = \tfrac{1}{2}\ln 40 - \tfrac{1}{2}\ln 5\\ &= \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{40}{5} = \tfrac{1}{2}\ln 8 = \tfrac{1}{2}\ln 2^3 = \tfrac{3}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

601o Beräkna integralen $\displaystyle\int \coth x\,dx$.

När det inte finns med några integrationsgränser betyder det att vi ska bestämma alla primitiva funktioner till integranden. Cotangens hyperbolicus är i själva verket funktionen

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}}{\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}} = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Genom att stirra på kvoten ser vi att täljaren är derivatan av nämnaren. Alltså är de primitiva funktionerna lika med

$$\int \coth x\,dx = \ln|e^x-e^{-x}| + C,$$

där C är en konstant.

Anm. Vi kan skriva om den primitiva funktionen till

$$\begin{aligned}\ln|e^x-e^{-x}| + C &= \ln\Bigl|2\,\frac{e^x-e^{-x}}{2}\Bigr| + C = \ln|2\sinh x| + C\\ &= \ln 2 + \ln|\sinh x| + C = \ln|\sinh x| + C_2.\end{aligned}$$

601q Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \bigl(\sin 2x + \cos 3x\bigr)\,dx.$

Först delar vi upp integralen i två delar,

$$\int_0^{\pi/6} \bigl(\sin 2x + \cos 3x\bigr)\,dx = \int_0^{\pi/6} \sin 2x\,dx + \int_0^{\pi/6} \cos 3x\,dx = I_1 + I_2.$$

Vi ska beräkna de två integralerna i högerledet med substitutioner.

I_1: När vi ska beräkna en integral med hjälp av en substitution gäller det att kunna känna igen integranden som en uttryckskombination av typen

$$f(u)\cdot u',$$

där u är ett uttryck i x och f någon funktion. I vår integral kan vi se att med $u = 2x$ så är $u' = 2$ och integranden kan skrivas som

$$\tfrac{1}{2}\sin u \cdot u'.$$

Med substitutionen $u = 2x$ blir alltså integralen

$$\int \sin 2x\,dx = \bigl\{\, u = 2x,\ du = u'\,dx = 2\,dx \,\bigr\} = \int \tfrac{1}{2}\sin u\,du.$$

När vi gör substitutionen måste vi också byta integrationsgränserna till $u(0) = 2\cdot 0 = 0$ och $u(\pi/6) = 2\cdot\pi/6 = \frac{1}{3}\pi$. Alltså blir uträkningen

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6} \sin 2x\,dx &= \{\, u = 2x,\ du = 2\,dx,\ u\colon 0 \to \pi/3 \,\}\\ &= \int_0^{\pi/3} \tfrac{1}{2}\sin u\,du = \tfrac{1}{2}\Bigl[-\cos u\Bigr]_0^{\pi/3}\\ &= \tfrac{1}{2}\bigl(-\cos\tfrac{\pi}{3} + \cos 0\bigr) = \tfrac{1}{2}\bigl(1 - \tfrac{1}{2}\bigr) = \tfrac{1}{4}.\end{aligned}$$

I_2: På motsvarande sätt får vi

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6} \cos 3x\,dx &= \{\, u = 3x,\ du = 3\,dx,\ u\colon 0 \to \pi/2 \,\}\\ &= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{3}\cos u\,du = \tfrac{1}{3}\Bigl[\sin u\Bigr]_0^{\pi/2}\\ &= \tfrac{1}{3}\bigl(\sin\tfrac{\pi}{2} - \sin 0\bigr) = \tfrac{1}{3}.\end{aligned}$$

Sammantaget får vi

$$\int_0^{\pi/6} \bigl(\sin 2x + \cos 3x\bigr)\,dx = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{12}.$$

602b Beräkna integralen $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-2x)e^{-2x}\,dx.$

Om vi tittar på formeln för partialintegrering,

$$\int f\cdot g\,dx = F\cdot g - \int F\cdot g'\,dx,$$

så ser vi att om vi väljer $g = 1 - 2x$ så kommer den faktorn att deriveras till en konstant i högerledets integralterm. För att detta ska vara en förbättring förutsätter detta givetvis att vi kan hitta en primitiv funktion F till den andra faktorn $f = e^{-2x}$ och dessutom kunna integrera denna.

Med en liknande omskrivning som vi gjorde i uppgift 601h får vi att $F(x) = -\frac{1}{2}e^{2x}$. Med partiell integration får vi alltså

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (1-2x)e^{-2x}\,dx &= \Bigl[-\tfrac{1}{2}e^{-2x}\cdot(1-2x)\Bigr]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -\tfrac{1}{2}e^{-2x}\cdot(-2)\,dx\\ &= -\tfrac{1}{2}e^{-2}(1-2\cdot 1) + \tfrac{1}{2}e^{2}\bigl(1-2\cdot(-1)\bigr) - \int_{-1}^{1} e^{-2x}\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}e^{-2} + \tfrac{3}{2}e^{2} - \Bigl[-\tfrac{1}{2}e^{-2x}\Bigr]_{-1}^{1} = \tfrac{1}{2}e^{-2} + \tfrac{3}{2}e^{2} + \tfrac{1}{2}e^{-2} - \tfrac{1}{2}e^{2}\\ &= e^{2} + e^{-2}.\end{aligned}$$

602d Beräkna integralen $\displaystyle\int x^2 \cos x\,dx$.

Integranden består av två faktorer x^2 och $\cos x$ så partialintegration borde vara lämplig. Om vi ska använda partialintegration måste vi bestämma vilken faktor vi ska derivera och vilken vi ska integrera. I detta fall verkar det vara lämpligt att derivera x^2 för då sjunker dess gradtal med en enhet,

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \cdot \sin x - \int 2x \cdot \sin x\,dx.$$

Integralen i högerledet är fortfarande inte en integral som vi direkt kan bestämma, men problemet har faktiskt reducerats något. Istället för x^2 har vi x som faktor. Om vi partialintegrerar ytterligare en gång försvinner x,

$$\begin{aligned}\int x \sin x\,dx &= x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x)\,dx\\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

Sammanställer vi uträkningarna fås

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x\,dx &= x^2 \sin x - 2\Bigl(-x\cos x + \sin x + C\Bigr)\\ &= (x^2 - 2)\sin x + 2x\cos x + C.\end{aligned}$$

Anm. Istället för att beteckna integrationskonstanten med $2C$ i det sista ledet (som vi egentligen borde göra) skriver vi C och underförstår att vi har olika konstanter de i olika leden.

602h Beräkna integralen $\displaystyle\int_3^9 x\ln(x-1)\,dx$.

Vi kan utläsa två faktorer i integranden, x och $\ln(x-1)$, vilket antyder partialintegration. Om vi tänker använda partialintegration ska vi derivera den ena faktorn och integrera den andra. Ofta när logaritmfaktorer förekommer väljer man att derivera dessa,

$$\begin{aligned}\int_3^9 x\ln(x-1)\,dx &= \Bigl[\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x-1)\Bigr]_3^9 - \int_3^9 \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x-1}\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}\,9^2 \cdot \ln(9-1) - \tfrac{1}{2}\,3^2 \cdot (3-1) - \tfrac{1}{2}\int_3^9 \frac{x^2}{x-1}\,dx.\end{aligned}$$

Den rationella integranden i högerledet förenklar vi med en polynomdivision,

$$\begin{array}{rl|l} & x\ +1 & \\ \hline & x^2 & x-1 \\ \cline{3-3} & x^2 - x & \\ \cline{1-2} & x & \\ & x-1 & \\ \cline{2-2} & 1 & \end{array}$$

Alltså är

$$\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}.$$

En primitiv funktion är

$$\int \frac{x^2}{x-1}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + x + \log|x-1|.$$

Vi har alltså att

$$\begin{aligned}\int_3^9 x\ln(x-1)\,dx &= \tfrac{81}{2}\ln 8 - \tfrac{9}{2}\ln 2 - \tfrac{1}{2}\Bigl[\tfrac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1|\Bigr]_3^9\\ &= \tfrac{81}{2}\ln 2^3 - \tfrac{9}{2}\ln 2 - \tfrac{1}{2}\Bigl(\tfrac{1}{2}\,9^2 + 9 + \ln|9-1| - \tfrac{1}{2}\,3^2 - 3 - \ln|3-1|\Bigr)\\ &= \bigl(\tfrac{81\cdot 3}{2} - \tfrac{9}{2}\bigr)\ln 2 - \tfrac{81}{4} - \tfrac{9}{2} - \tfrac{1}{2}\ln 8 + \tfrac{9}{4} + \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\ln 2\\ &= \tfrac{81\cdot 3 - 9 - 3 + 1}{2}\ln 2 + \tfrac{-81-18+9+6}{4} = 116\,\ln 2 - 21.\end{aligned}$$

602k Beräkna integralen $\int x \arctan x \, dx$.

Återigen har vi en integrand bestående av två faktorer. Vid första påsyn kan det verka smart att derivera x för då blir den en konstant, men det betyder att vi måste hitta en primitiv funktion till $\arctan x$ och det verkar svårt. Vi deriverar därför $\arctan x$ istället. Partiell integration ger

$$\begin{aligned}\int x \arctan x \, dx &= \tfrac{1}{2}x^2 \arctan x - \int \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 \arctan x - \tfrac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx.\end{aligned}$$

Förenklar vi integranden i högerledet med en polynomdivision får vi

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

Vi har alltså

$$\begin{aligned}\int x \arctan x \, dx &= \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \arctan x - \tfrac{1}{2}\int \Bigl(1 - \frac{1}{1+x^2}\Bigr)\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 \arctan x - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\arctan x + C \\ &= \tfrac{1}{2}(x^2+1)\arctan x - \tfrac{1}{2}x + C.\end{aligned}$$

602m Beräkna integralen $\int e^{-x} \sin 2x \, dx$.

Eftersom integranden består av två faktorer som är elementära funktioner kan det ligga nära till hands att prova med partiell integrering. I detta fall verkar båda faktorerna vara lika enkla att derivera och integrera, så låt oss integrera e^{-x} och derivera $\sin 2x$ (utan speciell anledning),

$$\begin{aligned}\int e^{-x} \sin 2x \, dx &= -e^{-x} \cdot \sin 2x - \int -e^{-x} \cdot 2\cos 2x \, dx \\ &= -e^{-x} \sin 2x + 2\int e^{-x} \cos 2x \, dx.\end{aligned}$$

Integralen förenklades inte särskilt mycket; istället för faktorn $\sin 2x$ har vi $\cos 2x$. Kanske får vi tillbaka sinus-funktionen om vi partialintegrerar ytterligare en gång,

$$\begin{aligned}\int e^{-x} \cos 2x \, dx &= -e^{-x} \cdot \cos 2x - \int -e^{-x} \cdot (-2\sin 2x)\, dx \\ &= -e^{-x} \cos 2x - 2\int e^{-x} \sin 2x \, dx.\end{aligned}$$

Vi får alltså tillbaka vår ursprungsintegral! Alltså har vi visat att

$$\int e^{-x} \sin 2x \, dx = -e^{-x} \sin 2x - 2e^{-x} \cos 2x - 4\int e^{-x} \sin 2x \, dx.$$

Samlar vi integraltermerna i ena ledet får vi

$$\int e^{-x} \sin 2x \, dx = -\tfrac{1}{5}e^{-x} \sin 2x - \tfrac{2}{5}e^{-x} \cos 2x + C.$$

603b Beräkna integralen $\int \sin \sqrt{x} \, dx$.

Det som är besvärande med integranden är argumentet $\sqrt{x}$ till sinus-funktionen. För att försöka bli av med den provar vi med substitutionen $u = \sqrt{x}$,

$$\begin{aligned}\int \sin \sqrt{x} \, dx &= \Bigl\{\, u = \sqrt{x},\ \ du = u'\, dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \\ &= \frac{1}{2u}\, dx,\ \ dx = 2u\, du \,\Bigr\} = 2\int u \sin u \, du.\end{aligned}$$

Nu har vi fått en integral som lämpar sig för partiell integrering. Vi deriverar u och integrerar $\sin u$,

$$\begin{aligned}&= 2\Bigl(u\cdot(-\cos u) - \int 1\cdot(-\cos u)\,du\Bigr)\\ &= 2u\cos u - 2\int \cos u\,du = -2u\cos u + 2\sin u + C.\end{aligned}$$

I den ursprungliga variabeln x blir detta,

$$= -2\sqrt{x}\,\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C.$$

Anm. Som en extra kontroll att vi räknat rätt kan vi derivera den primitiva funktionen och se om vi får tillbaka vår integrand,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\Bigl(-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C\Bigr)\\ &\quad = -2\Bigl(\frac{1}{2\sqrt{x}}\Bigr)\cos\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\Bigl(-\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\Bigr) + 2\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0\\ &\quad = \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \sin\sqrt{x} + \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sin\sqrt{x}.\end{aligned}$$

603d Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\ln(x+1)\,dx$.

Integranden är ett förstagradsuttryck multiplicerat med en logaritm. Då kan det vara lämpligt att derivera bort logaritm-faktorn med partiell integrering,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x+1)\ln(x+1)\,dx &= \Bigl[\,(x^2+x)\cdot\ln(x+1)\,\Bigr]_0^1 - \int_0^1 (x^2+x)\cdot\frac{1}{x+1}\,dx\\ &= (1^2+1)\ln 2 - (0^2+0)\ln 1 - \int_0^1 x\,dx = 2\ln 2 - \Bigl[\,\tfrac{1}{2}x^2\,\Bigr]_0^1 = 2\ln 2 - \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

603f Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin x\,dx$.

Vi första påsyn kan integralen verka hopplös. Hemligheten är att se integranden som en produkt,

$$1\cdot\arcsin x,$$

och sen derivera bort arcsin-funktionen i en partiell integrering,

$$\int_0^{1/2} 1\cdot\arcsin x\,dx = \Bigl[\,x\arcsin x\,\Bigr]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} x\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

I integralen i högerledet förekommer uttrycket $1-x^2$ i nämnaren och detta uttrycks derivata i täljaren (sånär som på en faktor -2), så substitutionen $u=1-x^2$ verkar given,

$$\begin{aligned}&= \tfrac{1}{2}\arcsin\tfrac{1}{2} - 0\cdot\arcsin 0 + \tfrac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= \{\,u = 1-x^2,\ du = -2x\,dx,\ u\colon 1\to\tfrac{3}{4}\,\}\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{6}\pi - 0 + \tfrac{1}{2}\int_1^{3/4}\frac{du}{\sqrt{u}} = \tfrac{1}{12}\pi + \tfrac{1}{2}\Bigl[\,\frac{\sqrt{u}}{1/2}\,\Bigr]_1^{3/4}\\ &= \tfrac{1}{12}\pi + \sqrt{\tfrac{3}{4}} - \sqrt{1} = \tfrac{1}{12}\pi + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - 1.\end{aligned}$$

603i Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$.

Integranden är lite intressant. Kom ihåg att derivatan av $\arctan x$ är $\frac{1}{1+x^2}$, så om $u=\arctan x$ då kan integranden skrivas som $u\cdot u'$. Med andra ord ska vi substituera $u=\arctan x$,

$$\begin{aligned}\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx &= \{u=\arctan x;\ du = \frac{dx}{1+x^2}\,\}\\ &= \int u\,du = \tfrac{1}{2}u^2 + C = \tfrac{1}{2}\bigl(\arctan x\bigr)^2 + C.\end{aligned}$$

604e Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx$.

Om vi delar upp integralen i två delar,

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1},$$

får vi först en integral där täljaren är nämnarens derivata och sedan en integral som vi vet den primitiva funktionen till,

$$\begin{aligned}&= \Bigl[\ln|x^2+1|\Bigr]_0^1 + \Bigl[\arctan x\Bigr]_0^1\\ &= \ln 2 - \ln 1 + \arctan 1 - \arctan 0 = \ln 2 + \tfrac{1}{4}\pi.\end{aligned}$$

604f Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4}\,dx$.

Vi delar upp integralen i två delar,

$$\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4}\,dx = \int_0^2 \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}. \qquad (*)$$

I den första integralen i högerledet är täljaren derivatan av nämnaren (förutom en faktor 2) så vi har att

$$\begin{aligned}&\int_0^2 \frac{x}{x^2+4}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^2 \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \tfrac{1}{2}\Bigl[\ln|x^2+4|\Bigr]_0^2\\ &= \tfrac{1}{2}\bigl(\ln 8 - \ln 4\bigr) = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{8}{4} = \tfrac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

Den andra integralen i högerledet av $(*)$ liknar mycket en integral som har $\arctan x$ som primitiv funktion, men vi har inte riktigt den situationen. För att få en 1:a i nämnarens konstantterm bryter vi ut en faktor 4,

$$\frac{1}{x^2+4} = \frac{\frac{1}{4}}{x^2/4+1} = \frac{\frac{1}{4}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+1}.$$

Substituerar vi nu $u = x/2$ så får vi exakt den integrand som ger arctan,

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4} &= \tfrac{1}{4}\int_0^2 \frac{dx}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+1} = \{\, u = x/2,\ du = \tfrac{1}{2}\,dx,\ u\colon 0 \to 1\,\}\\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{u^2+1} = \tfrac{1}{2}\Bigl[\arctan u\Bigr]_0^1 = \tfrac{1}{2}\arctan 1 - \tfrac{1}{2}\arctan 0 = \tfrac{1}{8}\pi.\end{aligned}$$

Sammantaget har vi

$$\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4}\,dx = \int_0^2 \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int_0^2 \frac{dx}{x^2+4} = \tfrac{1}{2}\ln 2 - \tfrac{1}{8}\pi.$$

604g Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

I nämnaren har vi uttrycket x^2+1 och dess derivata förekommer i täljaren, så vi substituerar $u = x^2+1$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx &= \{\, u = x^2+1,\ du = 2x\,dx,\ u\colon 1 \to 2\,\}\\ &= \tfrac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u^2} = \tfrac{1}{2}\Bigl[-\frac{1}{u}\Bigr]_1^2 = \tfrac{1}{2}\Bigl(-\tfrac{1}{2} - (-\tfrac{1}{1})\Bigr) = \tfrac{1}{4}.\end{aligned}$$

604h Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3}\,dx$.

Om vi skriver om integranden som

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{x^2\cdot x}{(x^2+1)^3}$$

så ser vi att uttrycket $u = x^2+1$ har en derivata som förekommer i täljaren. Dessutom ingår faktorn x^2 i täljaren, men den kan vi skriva som $u-1$. Alltså verkar det upplagt för substitutionen $u = x^2+1$,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3}\,dx &= \tfrac{1}{2}\int \frac{x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^3}\,dx = \{\, u = x^2+1;\ du = 2x\,dx \,\}\\ &= \tfrac{1}{2}\int \frac{u-1}{u^3}\,du = \tfrac{1}{2}\int \bigl(u^{-2}-u^{-3}\bigr)\,du = \tfrac{1}{2}\Bigl(-\frac{1}{u}+\frac{1}{2u^2}\Bigr)+C\\ &= \tfrac{1}{2}\Bigl(-\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2(x^2+1)^2}\Bigr)+C = -\frac{2x^2+1}{4(x^2+1)^2}+C.\end{aligned}$$

604i Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx$.

Eftersom integranden är en rationell funktion finns en fastlagd arbetsgång. Vi bestämmer först nämnarens rötter. Om vi börjar med att kvadratkomplettera nämnarpolynomet får vi

$$x^2+2x+2 = (x+1)^2-1+2 = (x+1)^2+1.$$

Polynomet har alltså komplexa rötter och då kan vi inte faktorisera det i reella förstagradsfaktorer.

Eftersom vi har ett förstagradsuttryck i täljaren kan vi utnyttja det som nämnarens derivata efter en omskrivning,

$$\int_0^1 \frac{x+2}{(x+1)^2+1}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2+1}.$$

Den första integralen i högerledet är nu en logaritmisk derivata,

$$\int_0^1 \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1}\,dx = \Bigl[\ln\bigl|(x+1)^2+1\bigr|\Bigr]_0^1 = \ln 5-\ln 2 = \ln\tfrac{5}{2}.$$

Den andra integralen är en arctan-integral vilket vi ser efter en enkel substitution,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2+1} &= \{\, u = x+1;\ du = dx;\ u\colon 1\to 2 \,\}\\ &= \int_1^2 \frac{du}{u^2+1} = \Bigl[\arctan u\Bigr]_1^2 = \arctan 2-\arctan 1 = \arctan 2-\tfrac{1}{4}\pi.\end{aligned}$$

Sammantaget har vi

$$\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{5}{2}+\arctan 2-\tfrac{1}{4}\pi.$$

604k Beräkna integralen $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x^2+3x+2}$.

Vi undersöker först vilka nollställen nämnarpolynomet har. Kvadratkomplettering ger

$$\begin{aligned}x^2+3x+2 = \bigl(x+\tfrac{3}{2}\bigr)^2-\bigl(\tfrac{3}{2}\bigr)^2+2 = \bigl(x+\tfrac{3}{2}\bigr)^2-\tfrac{1}{4} = 0\\ \Leftrightarrow\qquad x = -\tfrac{3}{2}\pm\tfrac{1}{2} = \begin{cases}-1\\-2\end{cases}.\end{aligned}$$

Enligt faktorsatsen kan alltså integranden skrivas som

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}.$$

Vi kan nu partialbråkuppdela detta uttryck, vilket betyder att det finns konstanter A och B så att

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}. \tag{$*$}$$

För att bestämma konstanterna A och B ska vi använda två olika metoder.

Metod 1 (Identifikation av båda led)

Vi skriver högerledet i $(*)$ med gemensam nämnare,

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(A+B)x+(2A+B)}{(x+1)(x+2)},$$

och jämför med vänsterledet i $(*)$. Eftersom båda led ska vara lika för alla x måste täljarpolynom vara identiska, d.v.s. koefficienterna måste vara lika,

$$\begin{aligned} A+B&=0\\ 2A+B&=1 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} A&=1\\ B&=-1. \end{aligned}$$

Metod 2 (Handpåläggning)

Handpåläggning är en teknik som man kan använda för att bestämma de konstanter som svarar mot enkla faktorer (och multipla faktorer med maximalt gradtal, mer om detta i uppgift 604l).

För att bestämma konstanten A tar vi handen och täcker över den faktor i vänsterledet som svarar mot A,

$$\frac{1}{\qquad (x+2)},$$

och stoppar sedan istället för x in nollstället till den faktor vi täcker över; i detta fall $x=-1$. Vi får då värdet på konstanten A,

$$A = \frac{1}{\qquad (-1+2)} = 1.$$

På motsvarande sätt får vi fram B,

$$B = \frac{1}{(-2+1)\qquad} = -1.$$

Varför denna ”magiska” metod fungerar står förklarat i exempel 7.16 i kursboken.

Nu när vi partialbråkuppdelat integranden blir resten enkelt,

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{dx}{x^2+3x+2} &= \int_2^3 \Bigl(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\Bigr)\,dx = \Bigl[\ln|x+1| - \ln|x+2|\Bigr]_2^3 \\ &= \ln 4 - \ln 5 - \bigl(\ln 3 - \ln 4\bigr) = \ln \tfrac{4\cdot 4}{5\cdot 3} = \ln \tfrac{16}{15}. \end{aligned}$$

604l Beräkna integralen $\displaystyle\int_2^4 \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx.$

Eftersom vi har en rationell integrand (och täljaren är inte nämnarens derivata) så bestämmer vi först nämnarens rötter. Nämnaren är ett tredjegradspolynom och även om det finns formler för att beräkna rötterna är de så pass komplicerade att det är bättre att först försöka gissa rötterna. Vi börjar med att prova några enkla x-värden,

$$\begin{array}{lcl} x=0 & : & 0^3-3\cdot 0+2=2\neq 0,\\ x=1 & : & 1^3-3\cdot 1+2=0,\\ x=-1 & : & (-1)^3-3\cdot(-1)+2=5\neq 0,\\ x=2 & : & 2^3-3\cdot 2+2=4\neq 0,\\ x=-2 & : & (-2)^3-3\cdot(-2)+2=0. \end{array}$$

Vi undersöker inga fler heltal eftersom ett polynom med heltalskoefficienter kan inte ha några heltalsrötter som till beloppet är större än beloppet av polynomets konstantterm 2.

Eftersom vi nu vet två av rötterna ($x=1$ och $x=2$) ger faktorsatsen att polynomet kan skrivas som

$$x^3-3x+2 = (x-1)(x+2)(x-A).$$

Den tredje roten (A) får vi reda på genom att t.ex. stoppa in $x=0$ i sambandet ovan,

$$2 = (-1)\cdot 2\cdot(-A) \qquad\Leftrightarrow\qquad A=1.$$

Alltså kan integranden skrivas som

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}.$$

Med partialbråkuppdelning kan detta skrivas som

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}.$$

Eftersom $x+2$ är en enkel faktor i nämnaren ger handpåläggning

$$C = \frac{-2}{(-2-1)^2} = -\tfrac{2}{9}.$$

Konstanten A kan vi också bestämma med handpåläggning eftersom den svarar mot faktorn $(x-1)^2$ som har maximalt gradtal,

$$A = \frac{1}{(1+2)} = \tfrac{1}{3}.$$

Konstanten B kan vi däremot inte bestämma med handpåläggning eftersom den svarar mot $x-1$ och samma faktor finns upphöjd till en högre potens i partialbråkuppdelningen.

Hittills har vi alltså visat att

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} - \frac{\frac{2}{9}}{x+2}.$$

Stoppar vi in $x=0$ fås

$$0 = \tfrac{1}{3} - B - \tfrac{1}{9} \qquad \Leftrightarrow \qquad B = \tfrac{2}{9}.$$

Vi får nu att

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx &= \int_2^4 \Bigl(\frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{2}{9}}{x-1} - \frac{\frac{2}{9}}{x+2}\Bigr)\,dx \\
&= \Bigl[-\tfrac{1}{3}\frac{1}{x-1} + \tfrac{2}{9}\ln|x-1| - \tfrac{2}{9}\ln|x+2|\Bigr]_2^4 \\
&= -\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{9}\ln 3 - \tfrac{2}{9}\ln 6 - \Bigl(-\tfrac{1}{3}\cdot 1 + \tfrac{2}{9}\ln 1 - \tfrac{2}{9}\ln 4\Bigr) \\
&= \tfrac{2}{9} + \tfrac{2}{9}\ln\tfrac{3\cdot 4}{6} = \tfrac{2}{9}\bigl(1+\ln 2\bigr).
\end{aligned}$$

604m Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{x^4-x^2-4x+6}{x^3-2x-4}\,dx.$

Eftersom täljaren har högre gradtal än nämnaren förenklar vi integranden med en polynomdivision,

$$\begin{array}{l|l}
\quad x & \\
\hline
x^4 - x^2 \quad - 4x + 6 & x^3 - 2x - 4 \\
\cline{2-2}
x^4 - 2x^2 - 4x & \\
\hline
\qquad x^2 \qquad\quad + 6 &
\end{array}$$

Alltså är

$$\frac{x^4-x^2-4x+6}{x^3-2x-4} = x + \frac{x^2+6}{x^3-2x-4},$$

och

$$\int \frac{x^4-x^2-4x+6}{x^3-2x-4}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + \int \frac{x^2+6}{x^3-2x-4}\,dx. \qquad (*)$$

För att räkna ut integralen i högerledet bestämmer vi först nämnarens nollställen. Genom prövning ser vi att $x=2$ är en rot. Faktorsatsen ger att nämnaren kan skrivas

$$x^3 - 2x - 4 = (x-2)(x^2+Ax+B),$$

där vi får den andra faktorn med en polynomdivision

$$\begin{array}{r|l}
x^2 + 2x \ \ + 2 & \\
\hline
x^3 \qquad\quad - 2x - 4 & x - 2 \\
\cline{2-2}
x^3 - 2x^2 \qquad\qquad & \\
\hline
2x^2 - 2x \quad & \\
2x^2 - 4x \quad & \\
\hline
2x - 4 & \\
2x - 4 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Vi har alltså att

$$x^3 - 2x - 4 = (x-2)(x^2+2x+2).$$

Vi kvadratkompletterar den andra faktorn

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 - 1^2 + 2 = (x+1)^2 + 1,$$

och ser att den saknar reella rötter. En partialbråkuppdelning av integranden i högerledet av $(*)$ är alltså i formen

$$\frac{x^2+6}{(x-2)\big((x+1)^2+1\big)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{(x+1)^2+1} \tag{$\dagger$}$$

Handpåläggning ger

$$A = \frac{2^2+6}{\big((2+1)^2+1\big)} = 1.$$

Stoppar vi in $x = 0$ i $(\dagger)$ fås

$$\frac{6}{(-2)\cdot 2} = \frac{1}{-2} + \frac{0+C}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad C = -2.$$

Stoppar vi in $x = 1$ i $(\dagger)$ fås

$$\frac{7}{(-1)\cdot 5} = \frac{1}{-1} + \frac{B-2}{5} \qquad \Leftrightarrow \qquad B = 0.$$

Vi kan nu beräkna integralen i $(*)$,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-x^2-4x+6}{x^3-2x-4}\,dx &= \tfrac{1}{2}x^2 + \int \Big(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{(x+1)^2+1}\Big)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 + \ln|x-2| - 2\arctan(x+1) + C.\end{aligned}$$

604n Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{x^3+3x}{x^3-x^2-x+1}\,dx.$

För att undvika att behöva utföra en polynomdivision kan vi "lägga till och dra ifrån",

$$\frac{x^3+3x}{x^3-x^2-x+1} = \frac{x^3-x^2-x+1+x^2+4x-1}{x^3-x^2-x+1} = 1 + \frac{x^2+4x-1}{x^3-x^2-x+1}.$$

Vi behöver partialbråkuppdela kvoten i högerledet för att beräkna en primitiv funktion. Genom gissning får vi att -1 och $+1$ är rötter till nämnaren. Faktorsatsen ger därmed att

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x+1)(x-A).$$

Stoppar vi in $x = 0$ fås

$$1 = (-1)\cdot 1\cdot(-A) \qquad \Leftrightarrow \qquad A = 1.$$

Vi ansätter alltså

$$\frac{x^2+4x-1}{x^3-x^2-x+1} = \frac{x^2+4x-1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Handpåläggning ger

$$A = \frac{1^2+4\cdot 1-1}{(1+1)} = 2,$$

$$C = \frac{(-1)^2+4\cdot(-1)-1}{(-1-1)^2} = -1,$$

d.v.s.

$$\frac{x^2+4x-1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{-1}{x+1}.$$

Sätter vi in $x = 0$ fås

$$\frac{-1}{(-1)^2\cdot 1} = \frac{2}{(-1)^2} + \frac{B}{-1} + \frac{-1}{1} \qquad \Leftrightarrow \qquad B = 2.$$

Alltså är

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{x^3+3x}{x^3-x^2-x+1}\,dx &= \int_2^3 1\,dx + \int_2^3 \Big(\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Big)\,dx \\ &= \Big[\,x\,\Big]_2^3 + \Big[-\frac{2}{x-1} + 2\ln|x-1| - \ln|x+1|\Big]_2^3 \\ &= 3 - 2 - 1 + 2\ln 2 - \ln 4 - \big(-2 + 2\ln 1 - \ln 3\big) = 2 + \ln 3.\end{aligned}$$

604o Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2-4)^2}\,dx$.

Eftersom vi har en udda potens av x i täljaren är det lämpligt att göra substitutionen $u = x^2 - 4$ för att först förenkla integralen,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2-4)^2}\,dx &= \int_0^1 \frac{x^2\cdot x}{(x^2-4)^2}\,dx \\
&= \{\, u = x^2-4;\ du = 2x\,dx;\ u\colon -4 \to -3 \,\} = \tfrac{1}{2}\int_{-4}^{-3} \frac{u+4}{u^2}\,du \\
&= \tfrac{1}{2}\int_{-4}^{-3} \Bigl(\frac{1}{u} + \frac{4}{u^2}\Bigr)\,du = \tfrac{1}{2}\Bigl[\ln|u| - \frac{4}{u}\Bigr]_{-4}^{-3} \\
&= \tfrac{1}{2}\bigl(\ln 3 - \tfrac{4}{-3} - (\ln 4 - \tfrac{4}{-4})\bigr) = \ln\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{6}.
\end{aligned}$$

607c Beräkna integralen $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$.

Variabeln x förekommer i integranden endast som $\tan x$ och detta är ett av standardfallen då man ska substituera $t = \tan x$ (fall 3 på sidan 258 i kursboken),

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 x\,dx &= \{\, t = \tan x;\ dt = (1+\tan^2 x)\,dx \,\} \\
&= \int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt \\
&= \int \Bigl(1 - \frac{1}{1+t^2}\Bigr)\,dt = t - \arctan t + C \\
&= \tan x - \arctan\tan x + C = \tan x - x + C.
\end{aligned}$$

Anm. Notera att integranden har singulariteter i $x = \frac{n\pi}{2}$ (för $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$) så den primitiva funktionen gäller bara inom intervall mellan singulariteterna. T.ex. är användningen av integralkalkylens huvudsats i uträkningen

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \tan^2 x\,dx &= \Bigl[\tan x - x\Bigr]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \tan\tfrac{3\pi}{4} - \tfrac{3\pi}{4} - \bigl(\tan\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{4}\bigr) \\
&= -1 - \tfrac{3\pi}{4} - 1 + \tfrac{\pi}{4} = -2 - \tfrac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

felaktig. (Varför är förresten svaret orimligt?)

607d Beräkna integralen $\displaystyle\int \tan^3 x\,dx$.

Med hjälp av trigonometriska formler kan vi skriva om integranden,

$$\int \tan^3 x\,dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{\sin x\cdot\sin^2 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\,\sin x\,dx.$$

Här ser vi att vi har $\sin x$ som är derivatan av $\cos x$ som en faktor. Vi substituerar därför $t = \cos x$,

$$\begin{aligned}
&= \{\, t = \cos x,\ dt = -\sin x\,dx \,\} = -\int \frac{1-t^2}{t^3}\,dt \\
&= \int \Bigl(-\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t}\Bigr)\,dt = \frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C \\
&= \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + C.
\end{aligned}$$

Anm. Vi har att

$$\frac{1}{2\cos^2 x} = \Bigl\{\, \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \,\Bigr\} = \tfrac{1}{2}\tan^2 x + \tfrac{1}{2}$$

så svaret stämmer med facit.

607e Beräkna integralen $\int \tan^4 x\,dx$.

Integranden innehåller bara $\tan x$ så vi substituerar $t = \tan x$,

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x\,dx &= \{\, t = \tan x,\ dt = (1+\tan^2 x)\,dx = (1+t^2)\,dx \,\}\\ &= \int \frac{t^4}{1+t^2}\,dt = \{\,\text{polynomdivision}\,\} = \int \Big(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\Big)\,dt\\ &= \tfrac{1}{3}t^3 - t + \arctan t + C = \tfrac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C.\end{aligned}$$

607e Beräkna integralen $\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 2x\,dx$.

Med formeln för dubbla vinkeln har vi att

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 2x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot 2\cos x \sin x\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\,dx.$$

Faktorn $\cos x$ är derivatan av $\sin x$, så vi substituerar $t = \sin x$,

$$\begin{aligned}&= \{\, t = \sin x;\ dt = \cos x\,dx;\ t\colon 0 \to 1 \,\} = 2\int_0^1 t^2\,dt\\ &= 2\Big[\, \tfrac{1}{3}t^3 \,\Big]_0^1 = \tfrac{2}{3}.\end{aligned}$$

607h Beräkna integralen $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$.

Vi förlänger med $\sin x$ och använder trigonometriska ettan,

$$\begin{aligned}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} &= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx\\ &= \{\, t = \cos x;\ dt = -\sin x\,dx;\ t\colon \tfrac{1}{2} \to 0 \,\} = \int_{1/2}^{0} \frac{-1}{1-t^2}\,dt\\ &= \int_{1/2}^{0} \frac{1}{(t-1)(t+1)}\,dt = \{\,\text{partialbråkuppdelning}\,\}\\ &= \tfrac{1}{2}\int_{1/2}^{0} \Big(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\Big)\,dt = \tfrac{1}{2}\Big[\, \ln|t-1| - \ln|t+1| \,\Big]_{1/2}^{0}\\ &= \tfrac{1}{2}\Big(\ln 1 - \ln 1 - \big(\ln\tfrac{1}{2} - \ln\tfrac{3}{2}\big)\Big) = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{3/2}{1/2} = \tfrac{1}{2}\ln 3.\end{aligned}$$

2.2 Beräkna integralen $\int \sin^2 x\,dx$.

Formeln för halva vinkeln ger att

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\int \cos 2x\,dx\\ &= \{\, t = 2x;\ dt = 2\,dx \,\} = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\int \cos t\,dt = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin t + C\\ &= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + C.\end{aligned}$$

2.3 Beräkna integralen $\int \sin^3 x\,dx$.

Med den trigonometriska ettan kan vi skriva om integranden,

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\,dx = \int \bigl(1-\cos^2 x\bigr)\sin x\,dx.$$

Nu passar substitutionen $t = \cos t$ bra,

$$\begin{aligned}
&= \{\, t=\cos x;\ dt = -\sin x\,dx \,\} = -\int \bigl(1-t^2\bigr)\,dt \\
&= \tfrac{1}{3}t^3 - t + C = \tfrac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C.
\end{aligned}$$

2.4 Beräkna integralen $\int \sin^4 x\,dx$.

Vi använder formeln för halva vinkeln upprepade gånger,

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x\,dx &= \int \Bigl(\frac{1-\cos 2x}{2}\Bigr)^2 dx = \int \Bigl(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{1}{4}\cos^2 2x\Bigr)\,dx \\
&= \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + \tfrac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx = \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + \tfrac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx \\
&= \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + \tfrac{1}{8}x + \tfrac{1}{32}\sin 4x + C = \tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + \tfrac{1}{32}\sin 4x + C.
\end{aligned}$$

7.22 Beräkna

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$,

c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$.

b) Eftersom integranden har en singularitet i $x = 0$ är integralen generaliserad och lika med

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+} \Bigl[\,2\sqrt{x}\,\Bigr]_a^1 = \lim_{a\to 0^+} 2\bigl(1-\sqrt{a}\bigr) = 2.$$

c) I detta fall är integrationsintervallet obegränsat och integralen är därmed en generaliserad integral som ska tolkas som

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^\alpha} = \{\,\text{om } \alpha \neq 1\,\} = \lim_{R\to\infty} \Bigl[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigr]_1^R \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\cdot \lim_{R\to\infty} \bigl(R^{1-\alpha}-1\bigr) = \frac{1}{1-\alpha}\cdot \begin{cases} -1, & \text{om } \alpha > 1, \\ \text{divergent}, & \text{om } \alpha < 1. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{om } \alpha > 1, \\ \text{divergent}, & \text{om } \alpha < 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Om $\alpha = 1$ så blir integralen

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \Bigl[\,\ln|x|\,\Bigr]_1^R = \lim_{R\to\infty} \ln R = \text{divergent}.$$

Alltså blir svaret

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{om } \alpha > 1, \\ \text{divergent}, & \text{om } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

7.23b Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$ (Ledning: Sätt $x = \tan t$).

Integrandens nämnare blir aldrig noll så integranden har ingen singularitet i integrationsintervallet. Däremot är integrationsintervallet obegränsat så integralen är generaliserad. Vi har

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} \\
&= \{\, x = \tan t,\ dx = (1+\tan^2 t)\,dt = (1+x^2)\,dt,\ t\colon 0 \to \arctan R \,\} \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\arctan R} \frac{dt}{1+\tan^2 t} \\
&= \{\, R\to\infty \ \Rightarrow\ \arctan R \to \pi/2^-;\ 1+\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \,\} \\
&= \lim_{s\to\pi/2^-} \int_0^s \cos^2 t\,dt = \{\, \text{formeln för halva vinkeln} \,\} \\
&= \lim_{s\to\pi/2^-} \int_0^s \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \lim_{s\to\pi/2^-} \Big[\, \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin 2t \,\Big]_0^s \\
&= \lim_{s\to\pi/2^-} \Big(\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{4}\sin 2s \Big) = \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{4}\sin\pi = \tfrac{1}{4}\pi.
\end{aligned}$$

907d Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx$$

är konvergent eller divergent.

Om $a < 0$ så har integranden en singularitet i $x = 0$ och om $b < 0$ så finns en singularitet i $x = 1$. Det är i dessa fall integralen är generaliserad.

Eftersom vi har två singulariteter delar vi upp integrationsintervallet i två delar så att singulariteterna hamnar i varsina intervall,

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx = \int_0^{1/2} x^a(1-x)^b\,dx + \int_{1/2}^1 x^a(1-x)^b\,dx = I_1 + I_2.$$

För att integralen i vänsterledet ska existera måste båda integralerna i högerledet existera. Vi undersöker integraltermerna separat.

I_1: Det som avgör om integralen är konvergent är integrandens storleksordning då $x \to 0^+$. Vi ska alltså tänka smått! I närheten av origo är

$$x^a(1-x)^b \approx x^a \cdot 1.$$

så vi kan förvänta oss att integralen konvergerar/divergerar samtidigt med $\int_0^{1/2} x^a\,dx$. Denna integral är ett känt integralfall som man ofta använder som jämförelsefall,

$$\int_0^{1/2} x^a\,dx = \begin{cases} \text{konvergent,} & \text{om } a > -1, \\ \text{divergent,} & \text{om } a \le -1. \end{cases}$$

För att göra detta lösa resonemang giltigt använder vi jämförelseprincipen (sats 9.15) och jämför de två integranderna när $x \to 0^+$. Vi har att

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a(1-x)^b}{x^a} = \lim_{x\to 0^+} (1-x)^b = 1 \ne 0.$$

Jämförelseprincipen ger nu att

$$\int_0^{1/2} x^a(1-x)^b\,dx \quad \text{och} \quad \int_0^{1/2} x^a\,dx$$

konvergerar samtidigt, d.v.s.

$$\int_0^{1/2} x^a(1-x)^b\,dx = \begin{cases} \text{konvergent,} & \text{om } a > -1, \\ \text{divergent,} & \text{om } a \le -1. \end{cases}$$

I_2: Resonemanget liknar det vi gjorde för integralen I_1. I närheten av $x = 1$ har vi att

$$x^a(1-x)^b \approx 1 \cdot (1-x)^b$$

så vi jämför vår integral med

$$\int_{1/2}^{1} (1-x)^b\,dx = \begin{cases} \text{konvergent,} & \text{då } b > -1,\\ \text{divergent,} & \text{då } b \le -1. \end{cases}$$

Vi har att

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^a(1-x)^b}{(1-x)^b} = \lim_{x\to 1^-} x^a = 1 \neq 0.$$

Alltså konvergerar I_2 samtidigt med $\int (1-x)^b\,dx$, d.v.s.

$$\int_{1/2}^{1} x^a(1-x)^b\,dx = \begin{cases} \text{konvergent,} & \text{då } b > -1,\\ \text{divergent,} & \text{då } b \le -1. \end{cases}$$

Sammanfattningsvis har vi att

$$\int_{0}^{1} x^a(1-x)^b\,dx = \begin{cases} \text{konvergent,} & \text{om } a > -1 \text{ och } b > -1,\\ \text{divergent,} & \text{annars.} \end{cases}$$

907e Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx$$

är konvergent eller divergent.

Nämnaren är inte noll i integrationsintervallet så vi har inga singulariteter utan vi har "bara" ett obegränsat integrationsintervall. Konvergensen hos integralen bestäms av om integranden avtar "tillräckligt" fort när $x \to \infty$. I detta fall ser vi att

$$\frac{\ln(x^2+1)}{x} \ge \frac{1}{x} \qquad \text{för } x > 1,$$

så vi har att

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx &= \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx \ge \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x}\,dx\\ &= \lim_{R\to\infty} \Big[\ln|x|\Big]_1^R = \lim_{R\to\infty} \ln R = \infty.\end{aligned}$$

Alltså är vår integral divergent.

907g Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

är konvergent eller divergent.

Nämnaren antar värdet 0 för $x = -1$ och $x = 0$. Integranden har alltså singulariteter i dessa punkter. Eftersom $x = -1$ ligger utanför integrationsintervallet påverkar den inte konvergensen.

Förutom den singulära punkten $x = 0$ är integrationsintervallet obegränsat. Vi delar därför upp integrationsintervallet i två delar, en del som innehåller singulariteten i origo och en del som är obegränsad (men utan singulariteten),

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} + \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = I_1 + I_2.$$

För att integralen i vänsterledet ska vara konvergent måste båda integralerna i högerledet vara konvergenta.

I_1: Nära origo har integranden storleksordningen

$$\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \approx \frac{1}{1\cdot\sqrt{x}}$$

och eftersom integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

är konvergent så kan vi misstänka att vår integral också är konvergent. Jämför vi de två integranderna i $x = 0$ får vi att

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1 \neq 0$$

och jämförelseprincipen ger att I_1 är konvergent.

I_2: När $x \to \infty$ har integranden storleksordningen

$$\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \approx \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Integralen $\int_1^\infty x^{-3/2}\,dx$ är konvergent (se uppgift 7.22c), så eftersom

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{x}+1} = 1 \neq 0$$

ger jämförelseprincipen att I_2 är konvergent.

Alltså är integralen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

konvergent.

907m Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\ln x}$$

är konvergent eller divergent.

Vi har två singulariteter i integrationsintervallet

$$\begin{aligned} x &= 0, \quad \text{eftersom } \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0,\\ x &= 1, \quad \text{eftersom } \lim_{x\to 1^-} x\ln x = 0. \end{aligned}$$

Som vanligt gäller att integralen är konvergent om både

$$i)\ \int_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln x} \qquad \text{och} \qquad ii)\ \int_{1/2}^1 \frac{dx}{x\ln x}$$

är konvergenta.

Singulariteten i $x = 0$ verkar lite besvärlig så vi börjar med att undersöka integralen i punkt *ii*. När vi undersöker integranden nära $x = 1$ har vi att

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x\ln\bigl(1+(x-1)\bigr)} = \{\text{ Maclaurinutveckling av } \ln(1+x) = x + O(x^2)\,\}\\ &= \frac{1}{x\bigl((x-1)+O(x-1)^2\bigr)} = \frac{1}{(x-1)+O(x-1)^2}\\ &= \frac{1}{x-1} + O\Bigl(\frac{1}{(x-1)^2}\Bigr). \end{aligned}$$

Integranden har en singularitet av typen $1/(x-1)$ i $x = 1$ och då är integralen divergent (punkt 2 i sats 9.15).

Eftersom integralen *ii* är divergent är integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\ln x}$$

divergent.

628b Visa att

$$\int_0^1 \frac{x^5}{x^7+1}\,dx \geq \tfrac{1}{7}\ln 2.$$

När man ska visa olikheter av den här typen använder man oftast integralens monotonicitet, d.v.s.

Om $f(x) \geq g(x)$ i ett intervall $[a,b]$ så är

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx, \qquad \text{(Sats 7.3iv)}$$

Tanken är att vi hittar en enkel funktion $g(x)$ som går att integrera analytiskt och som ger värdet i högerledet. Detta kan vara ganska knepigt ibland. Låt oss först titta på ett misslyckat försök.

Metod 1 (misslyckande 1)

I intervallet $[0,1]$ är

$$x^7 \leq 1 \quad\Leftrightarrow\quad 1+x^7 \leq 2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{1+x^7} \geq \frac{1}{2}.$$

Alltså har vi att $\frac{x^5}{1+x^7} \geq \frac{x^5}{2}$ och integralens monotonicitet ger att

$$\int_0^1 \frac{x^5}{1+x^7}\,dx \geq \int_0^1 \frac{x^5}{2}\,dx = \tfrac{1}{12}\big[\,x^6\,\big]_0^1 = \tfrac{1}{12}.$$

Vi har visserligen fått fram en undre gräns på integralens värde men vår gräns är mindre än det önskade $\frac{1}{7}\ln 2$. Vi har alltså misslyckats.

Felet vi gjorde var att olikheten $x^7 \leq 1$ vi utgick från är för grov. Vi måste på något sätt skatta integranden bättre.

Metod 2 (misslyckande 2)

Istället för att planlöst försöka skatta integranden kan vi titta lite på vad vi har i högerledet och försöka arbeta baklänges. Uttrycket $\ln 2$ skulle kunna komma från

$$\big[\ln|x+1|\,\big]_0^1 = \ln 2,$$

d.v.s. från integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1}.$$

Hmm…, vi har att

$$\begin{aligned} x^6 \leq 1 \quad&\Leftrightarrow\quad x^7 \leq x \quad\Leftrightarrow\quad 1+x^7 \leq 1+x\\ &\Leftrightarrow\quad \frac{1}{1+x^7} \geq \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

men nu kommer faktorn x^5 in och förstör det roliga eftersom x^5 inte uppfyller $x^5 \geq \frac{1}{7}$ i hela intervallet.

Metod 3 (Lyckosamt)

Efter att ha tittat lite noggrannare på integralen ser vi att om vi ersätter x^5 i täljaren med det mindre uttrycket x^6 så får vi i täljaren derivatan av nämnaren och det ger just en logaritmisk primitiv funktion. Det verkar lovande!

$$\int_0^1 \frac{x^5}{1+x^7}\,dx \geq \int_0^1 \frac{x^6}{1+x^7}\,dx = \tfrac{1}{7}\int_0^1 \frac{7x^6}{1+x^7}\,dx = \tfrac{1}{7}\big[\ln|1+x^7|\,\big]_0^1 = \tfrac{1}{7}\ln 2.$$

628c Visa att $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^{-x}+x^2} \geq \frac{\pi}{2}$.

Det som förhindrar oss från att enkelt hitta en primitiv funktion är e^{-x} i nämnaren. Tittar vi dessutom på högerledet $\pi/2$ så skulle den kunna uppstå av

$$\big[\arctan x\,\big]_0^\infty = \pi/2,$$

d.v.s. av integralen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$$

En tänkbar strategi är alltså att ersätta e^{-x} med 1. Vi får se om det fungerar. Funktionen $x \mapsto e^{-x}$ är avtagande och eftersom $e^{-0} = 1$ så är

$$e^{-x} \leq 1 \quad \text{för } x \text{ i intervallet } [0, \infty).$$

Detta ger att

$$e^{-x} + x^2 \leq 1 + x^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{e^{-x} + x^2} \geq \frac{1}{1 + x^2}.$$

Integralens monotonicitet ger

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{-x} + x^2} \geq \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \big[\arctan x\big]_0^\infty = \pi/2.$$

628d Visa att $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2} \sin x \, dx \leq \frac{e-1}{2}$.

Just faktorn e^{x^2} brukar vålla besvär vid analytiska integralberäkningar. Dess primitiva funktion går inte att uttrycka i elementära funktioner, så en naiv skattning av typen

$$\sin x \leq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{x^2} \sin x \leq e^{x^2}$$

har vi inget för. Samtidigt vill vi inte försöka skatta bort e^{x^2} eftersom talet e förekommer i högerledet och det är ett tecken på att exponentialfunktionen på något sätt är inblandad och bör möjligtvis sparas.

Från tidigare i kursen kanske vi kommer ihåg olikheten

$$\sin x \leq x, \quad \text{för } x \geq 0. \qquad \text{(Sats 2.1)}$$

Den är värd att prova, för om vi ersätter $\sin x$ med x får vi dessutom derivatan av exponentialfunktionens argument x^2 som en faktor i integranden och detta öppnar för en substitution. Vi provar!

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2} \sin x \, dx &\leq \int_0^1 e^{x^2} x \, dx = \{\, s = x^2,\ dx = 2x\,dx,\ s\colon 0 \to 1 \,\}\\ &= \tfrac{1}{2} \int_0^1 e^s \, ds = \tfrac{1}{2}\big[\, e^s \,\big]_0^1 = \frac{e-1}{2}.\end{aligned}$$

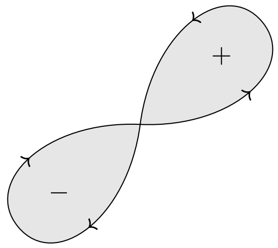
705 Beräkna arean inom kurvan

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t + \sin t, \\ y = \cos t - \sin t, \end{cases} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

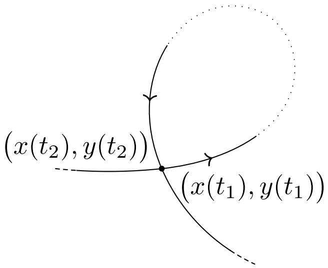
Kurvan är en parameterkurva så arean ges av

$$\tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} \big(x\dot{y} - \dot{x}y\big) \, dt,$$

om kurvan genomlöper randen i positivt led. Det där med "positivt led" är viktigt att komma ihåg. Problemet är inte så mycket att vi skulle råka integrera kurvan i negativt led för då blir areaintegralen negativ och det räcker om vi byter tecken för att få arean. Problemet är om kurvan har öglor, för då kan kurvan innesluta olika delområden med olika omloppsriktningar och delareorna börjar kancellera varandra.



Vi kan upptäcka möjliga öglor genom att undersöka om det finns punkter på kurvan som genomlöps fler gånger, d.v.s. om det finns två olika parametervärden $t = t_1$ och $t = t_2$ som ger samma punkt,



$$\begin{aligned} x(t_1) &= x(t_2),\\ y(t_1) &= y(t_2). \end{aligned}$$

Så låt oss undersöka detta,

$$1 + \cos t_1 + \sin t_1 = 1 + \cos t_2 + \sin t_2, \tag{1}$$
$$\cos t_1 - \sin t_1 = \cos t_2 - \sin t_2. \tag{2}$$

Adderar vi (1) och (2) fås

$$1 + 2\cos t_1 = 1 + 2\cos t_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos t_1 = \cos t_2.$$

Detta insatt i t.ex. (2) ger

$$\sin t_1 = \sin t_2.$$

Vi måste alltså ha att

$$\cos t_1 = \cos t_2, \tag{3}$$
$$\sin t_1 = \sin t_2. \tag{4}$$

Flytta över allt i vänsterledet och använd additionsformlerna

$$\begin{aligned} \cos t_1 - \cos t_2 &= 0\\ \sin t_1 - \sin t_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -2\sin\frac{t_1-t_2}{2}\sin\frac{t_1+t_2}{2} &= 0 \qquad (5)\\ 2\sin\frac{t_1-t_2}{2}\cos\frac{t_1+t_2}{2} &= 0 \qquad (6) \end{aligned}$$

För att (5) ska vara uppfylld måste vi ha ett av fallen

$\sin\frac{t_1-t_2}{2} = 0$: Då är (5) också uppfylld. Detta ger att

$$\frac{t_1-t_2}{2} = n\pi \qquad \Leftrightarrow \qquad t_1 = t_2 + 2n\pi$$

för något heltal n. Eftersom parameterintervallet $[0, 2\pi]$ har längd 2π kan den enda lösningen som uppfyller $t_1 \neq t_2$ vara $t_1 = 0$ och $t_2 = 2\pi$ (eller ombytta roller), vilket betyder att kurvans startpunkt och ändpunkt sammanfaller.

$\cos\frac{t_1+t_2}{2} = 0$: Då är $\sin\frac{t_1+t_2}{2} \neq 0$ eftersom cosinus och sinus har olika nollställen. (5) ger därför att $\sin\frac{t_1-t_2}{2} = 0$ vilket är fallet ovan.

Vi har alltså visat att förutom kurvans start- och ändpunkt finns det ingen punkt som svarar mot två parametervärden, d.v.s. kurvan är enkel och saknar öglor.

Areaintegralen blir nu

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x\dot{y} - \dot{x}y)\,dt\\ &\quad= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \bigl((1+\cos t+\sin t)(-\sin t-\cos t) -\\ &\qquad\qquad (-\sin t+\cos t)(\cos t-\sin t)\bigr)\,dt\\ &\quad= \{\text{ förenklingar och trigonometriska ettan }\}\\ &\quad= -\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\sin t+\cos t+2)\,dt = -\tfrac{1}{2}\bigl[-\cos t+\sin t+2t\bigr]_0^{2\pi}\\ &\quad= -\tfrac{1}{2}\cdot 4\pi = -2\pi. \end{aligned}$$

Eftersom areaintegralen har ett negativt värde har vi alltså integrerat kurvan i negativ led och arean ska vara 2π.

706 Beräkna arean inom kurvan

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 t,\\ y &= \sin^3 t, \end{aligned} \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

Vi ska först undersöka om kurvan har några öglor, d.v.s. om det finns någon punkt på kurvan som svarar mot olika parametervärden $t = t_1$ och $t = t_2$, m.a.o.

$$\begin{aligned} \cos^3 t_1 &= \cos^3 t_2,\\ \sin^3 t_1 &= \sin^3 t_2. \end{aligned}$$

Eftersom funktionen $x \mapsto x^3$ är en-entydig är dessa båda ekvationer ekvivalenta med

$$\begin{aligned}\cos t_1 &= \cos t_2,\\ \sin t_1 &= \sin t_2.\end{aligned}$$

Detta är precis samma system som vi undersökte i uppgift 705. Vi visade då att, förutom start- och ändpunkten, finns det inga punkter som uppfyller sambanden.

Arean ges då av (beloppstecknen tar vi med eftersom vi inte vet i vilken riktning vi genomlöper kurvan),

$$\begin{aligned}
&\Bigl|\int_0^{2\pi} x\dot{y}\,dt\Bigr| = \Bigl|\int_0^{2\pi} \cos^3 t \cdot 3\sin t^2 \cos t\,dt\Bigr|\\
&\quad = 3\Bigl|\int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t\,dt\Bigr| = 3\Bigl|\int_0^{2\pi} \Bigl(\frac{1+\cos 2t}{2}\Bigr)^2 \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt\Bigr|\\
&\quad = \{\,\text{konjugatregeln}\,\} = \tfrac{3}{8}\Bigl|\int_0^{2\pi} (1+\cos 2t)(1-\cos^2 2t)\,dt\Bigr|\\
&\quad = \tfrac{3}{8}\Bigl|\int_0^{2\pi} \bigl(1+\cos 2t - \cos^2 2t - \cos^3 2t\bigr)\,dt\Bigr|\\
&\quad = \tfrac{3}{8}\Bigl|\int_0^{2\pi} dt + \int_0^{2\pi} \cos 2t\,dt - \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 4t}{2}\,dt\\
&\qquad - \int_0^{2\pi} (1-\sin^2 2t)\cos 2t\,dt\Bigr|\\
&\quad = \{\, s = \sin 2t,\ ds = 2\sin 2t\,dt,\ s\colon 0 \to 0\,\}\\
&\quad = \tfrac{3}{8}\bigl|2\pi + 0 - \pi - 0\bigr| = \tfrac{3}{8}\pi.
\end{aligned}$$

708 Beräkna arean av var och en av de öglor i x,y-planet som bildas av kurvan

$$\begin{aligned}x &= \sin t,\\ y &= \sin 2t.\end{aligned}$$

Eftersom $x = \sin t$ är 2π-periodisk och $y = \sin 2t$ är π-periodisk så har de minsta gemensamma period 2π vilket betyder att kurvan genomlöps helt om vi väljer ett parameterintervall med längd 2π. Vi kan för enkelhets skull välja parameterintervallet $[0, 2\pi]$.

Vi bestämmer öglorna genom att undersöka i vilka punkter kurvan skär sig själv, d.v.s. när det finns två parametervärden $t = t_1$ och $t = t_2$ som ger samma punkt. Med andra ord söker vi lösningarna till

$$\sin t_1 = \sin t_2, \tag{1}$$
$$\sin 2t_1 = \sin 2t_2. \tag{2}$$

Vi skriver om (2) med formeln för dubbla vinkeln,

$$2\sin t_1 \cos t_1 = 2\sin t_2 \cos t_2. \tag{2'}$$

För att lösa (1) och (2′) undersöker vi två fall

$\sin t_1 \neq 0$: Då får vi från (1) och (2′) att

$$\cos t_1 = \cos t_2. \tag{3}$$

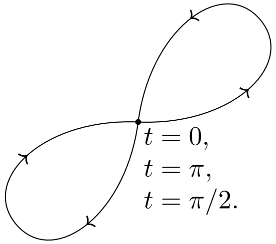
Vi har alltså att

$$\begin{aligned}\sin t_1 &= \sin t_2,\\ \cos t_1 &= \cos t_2,\end{aligned}$$

och detta system har inga lösningar ($t_1 \neq t_2$) vilket vi visat tidigare i uppgift 705.

$\sin t_1 = 0$: I detta fall är båda ekvationerna uppfyllda, och vi har att $t_1 = 0$, $t_1 = \pi$ eller $t_1 = 2\pi$.

Kurvan skär alltså sig själv i punkten som svarar mot parametervärdena $t = 0$, $t = \pi$ och $t = 2\pi$.



Kurvan har därmed två öglor med randkurvorna $\{x = \sin t,\ y = \sin 2t,\ 0 \le t \le \pi\}$ respektive $\{x = \sin t,\ y = \sin 2t,\ \pi \le t \le 2\pi\}$. Områdena som innesluts av respektive ögla har areorna

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\pi x\dot{y}\,dt\right| &= \left|\int_0^\pi \sin t \cdot 2\cos 2t\,dt\right| = \{\,\text{formeln för dubbla vinkeln}\,\}\\ &= \left|\int_0^\pi \sin t \cdot 2(2\cos^2 t - 1)\,dt\right| = \left|4\int_0^\pi \cos^2 t \sin t\,dt - 2\int_0^\pi \sin t\,dt\right|\\ &= \left|4\Big[-\tfrac{1}{3}\cos^3 t\Big]_0^\pi + 2\Big[\cos t\Big]_0^\pi\right| = \left|\tfrac{4}{3}\big(1-(-1)\big) + 2(-1-1)\right| = \tfrac{4}{3},\end{aligned}$$

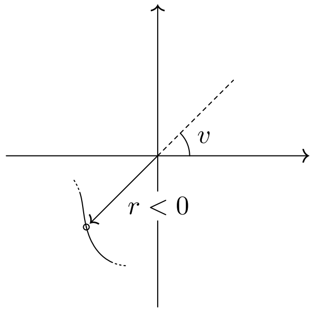
och

$$\begin{aligned}\left|\int_\pi^{2\pi} x\dot{y}\,dt\right| &= \{\,\text{Samma primitiva funktion som ovan}\,\}\\ &= \left|4\Big[-\tfrac{1}{3}\cos^3 t\Big]_\pi^{2\pi} + \Big[\cos t\Big]_\pi^{2\pi}\right| = \left|\tfrac{4}{3}(-1-1) + 2\big(1-(-1)\big)\right| = \tfrac{4}{3}.\end{aligned}$$

712 Beräkna arean av det område som i polära koordinater definieras av

$$r \le \frac{1}{\sin v + \cos v} \quad \text{och } 0 \le v \le \pi/2.$$

Det man måste se upp med är att den polära representationen inte är unik. De två polära koordinaterna (r, v) och $(-r, v+\pi)$ svarar mot samma punkt. Det kan innebära att två kurvsegment som till synes är olika (har olika vinklar) ändå innesluter samma område eftersom den ena kurvan har negativ radie och då speglas över till motstående vinkelområde.



I vårt fall är vinkeln begränsad till $[0, \pi/2]$ så detta fenomen kan inte uppstå.

Arean ges av formeln

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r(v)^2\,dv &= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{dv}{(\sin v + \cos v)^2}\\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{dv}{\sin^2 v + 2\sin v\cos v + \cos^2 v} = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{dv}{1+\sin 2v}\\ &= \{\,x = 2v,\ dx = 2\,dv,\ x\colon 0 \to \pi\,\} = \tfrac{1}{4}\int_0^\pi \frac{dx}{1+\sin x}.\end{aligned}$$

Det kan vara svårt att direkt se någon metod för att räkna ut integralen, men eftersom integranden är ett rationellt uttryck i en trigonometrisk funktion kan vi alltid ta till universalsubstitutionen

$$t = \tan\frac{x}{2}.$$

Denna inverssubstitution fungerar eftersom tan är strängt växande på $[0, \pi/2]$. Vi behöver uttrycka $\sin x$ i t,

$$\sin x = \sin\bigl(2\,\tfrac{x}{2}\bigr) = 2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2} = 2\tan\tfrac{x}{2}\cos^2\tfrac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Vi har också att

$$dt = (1+\tan^2\tfrac{x}{2})\,dx = (1+t^2)\,dx \qquad \Leftrightarrow \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

och integrationsgränserna blir

$$\begin{aligned} x &= 0 & \Leftrightarrow \quad & t = 0,\\ x &= \pi/2 & \Leftrightarrow \quad & t = \infty. \end{aligned}$$

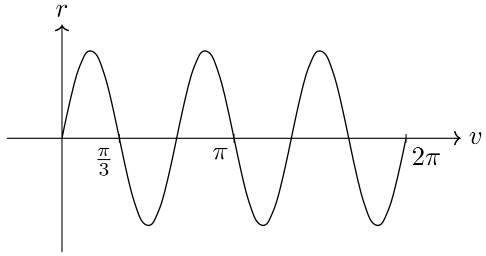
Integralen blir alltså

$$\begin{aligned} &= \tfrac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\dfrac{2}{1+t^2}\,dt}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}} = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+2t+t^2}\\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{(t+1)^2} = \lim_{R\to\infty} \tfrac{1}{2}\Bigl[-\frac{1}{t+1}\Bigr]_0^R = \tfrac{1}{2}\bigl(0-(-1)\bigr) = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

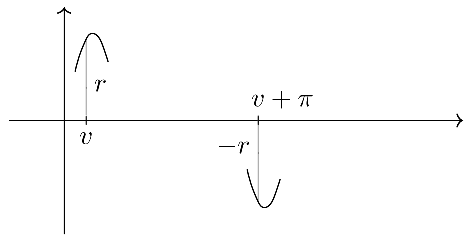
713b Beräkna arean av det område som begränsas av

$$r = \sin 3v, \qquad \text{(polära koordinater)}.$$

Vi måste först undersöka om vi har problemet med att den polära kurvan beskriver samma kurvområde två gånger på grund av identifikationen $(r, v) = (-r, v+\pi)$. Vi ritar upp hur radien r beror av den polära vinkeln v,



Här ser vi att vi just drabbas av detta eftersom alla vinklar $v+\pi$ till höger om π ger en radie med omvänt tecken än den med vinkel v.



Analytiskt ser vi detta också

$$r(v+\pi) = \sin(3v+3\pi) = -\sin 3v = -r(v).$$

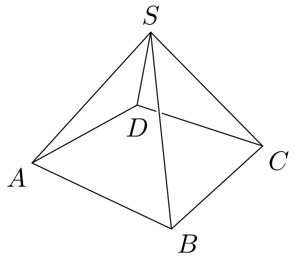
Alltså beskriver parametervärdena mellan π och 2π samma kurva som parametervärdena mellan 0 och π. Kurvan innesluter därmed arean

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\int_0^\pi r(v)^2\,dv &= \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 3v\,dv = \{\,\text{formeln för halva vinkeln}\,\}\\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \frac{1-\cos 6v}{2}\,dv = \tfrac{1}{4}\Bigl[v - \tfrac{1}{6}\sin 6v\Bigr]_0^\pi\\ &= \tfrac{1}{4}\bigl(\pi - 0 - (0-0)\bigr) = \tfrac{1}{4}\pi. \end{aligned}$$

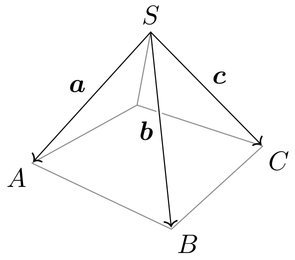
Avsnitt 2, Vektorer

W109 $ABCD$ är basytan (en kvadrat) i en regelbunden fyrsidig pyramid med spetsen S. Låt $\overrightarrow{SA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{SB} = \boldsymbol{b}$ och $\overrightarrow{SC} = \boldsymbol{c}$. Beräkna $\overrightarrow{SD}$.

Vi ritar först en figur av hur pyramiden måste se ut.

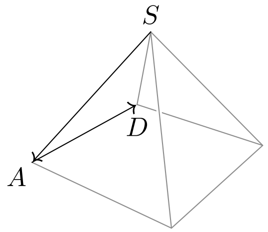


Vi kan också rita in de vektorer som är givna i uppgiftstexten.



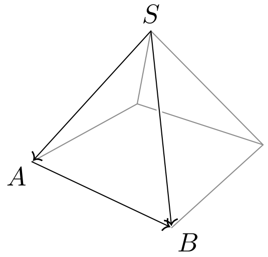
Vi ska nu försöka uttrycka vektorn $\overrightarrow{SD}$ i de givna vektorerna $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$.

Som ett första steg kan vi uttrycka $\overrightarrow{SD}$ genom att gå via hörnet A,

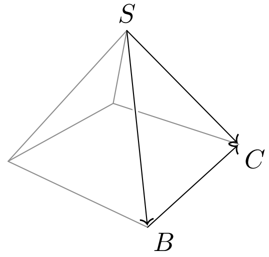


$$\begin{aligned}\overrightarrow{SD} &= \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD}\\ &= \boldsymbol{a} + \overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Nu behöver vi uttrycka en av baskvadratens kantvektorer $\overrightarrow{AD}$ i $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$. Om vi tittar på de övriga hörnen och kanterna i kvadraten så ser vi att vissa kantvektorer kan vi uttrycka med $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$.

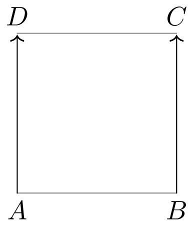


$$\begin{aligned}&\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB}\\ \Leftrightarrow\quad &\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a},\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}&\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SC}\\ \Leftrightarrow\quad &\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

Eftersom basytan är en kvadrat så är $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}$.

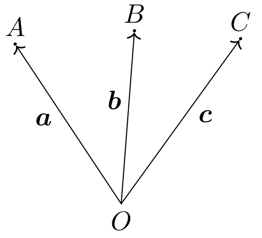


Alltså är

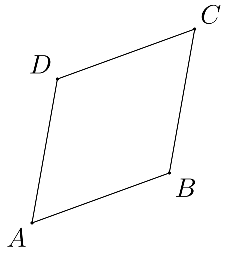
$$\overrightarrow{SD} = \boldsymbol{a} + \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}.$$

W110 O, A, B och C är fyra givna punkter i rummet med $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ och $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$. Bestäm en vektor $\overrightarrow{OD}$ uttryckt i $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$, så att de fyra punkterna A, B, C och D (i valfri ordning) blir hörnen i ett parallellogram.

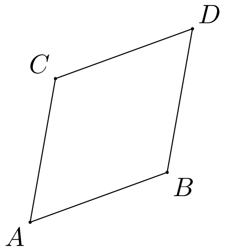
Låt oss rita upp en figur av den information som är given i uppgiften.



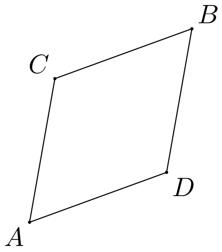
Vad vi söker är en femte punkt D så att punkterna A, B, C och D bildar hörnen i ett parallellogram.



Figuren är inte helt korrekt, för enligt uppgiftstexten behöver inte hörnpunkterna vara i någon speciell ordning, och då finns två andra möjliga konfigurationer.



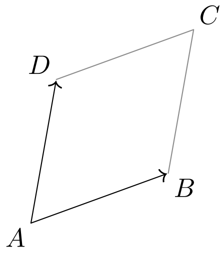
A granne med B och C



A granne med C och D

Men vi kan börja med att undersöka om det är möjligt att välja $\overrightarrow{OD}$ så att den första konfigurationen uppstår. Skulle det visa sig att det inte är möjligt, då kan vi undersöka de övriga två fallen.

Det som utmärker ett parallellogram är att motstående kanter är lika långa och parallella. Uttryckt med vektorer betyder detta att



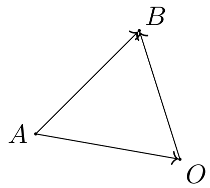
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

Vi kan också formulera uppgiften som

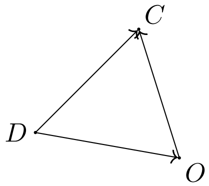
Givet: $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ och $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$.

Bestäm: $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{OD}$, så att $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ och $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

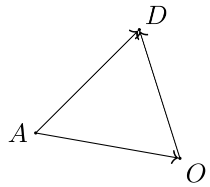
Eftersom vi i slutänden ska ge svaret i $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$ så kan vi uttrycka villkoren i det vi vill visa med dessa vekorer.



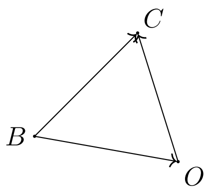
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\\ &= -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}\\ &= -\boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\\ &= -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d}\end{aligned}$$



$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = -\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$$

Uppgiften kan alltså formuleras som

Givet: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$.

Bestäm: $\boldsymbol{d}$ så att

$$-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}, \qquad (1)$$
$$-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} = -\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}. \qquad (2)$$

För att (1) ska vara uppfylld ser vi att $\boldsymbol{d}$ måste väljas som

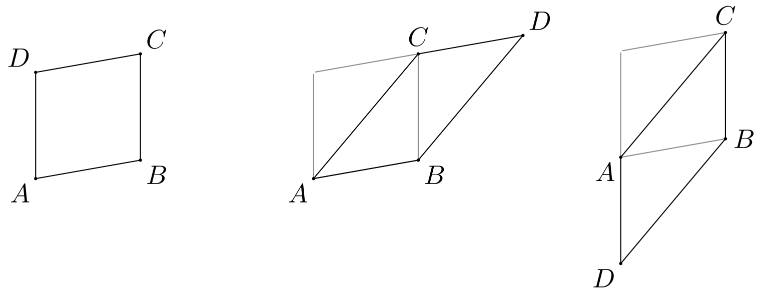
$$-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{d} + \boldsymbol{c} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}.$$

Stoppar vi in detta in i (2) fås

$$\text{VL} = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} = -\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \text{HL}.$$

Alltså, genom att välja $\overrightarrow{OD} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ så bildar punkterna A, B, C och D hörnen i ett parallellogram.

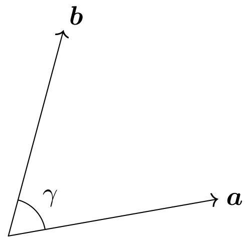
Anm. Om vi hade valt en av de andra konfigurationerna skulle vi fått ett annat svar.



A granne med B och D $\quad$ A granne med B och C $\quad$ A granne med C och D

W141 Beräkna vinkeln mellan vektorerna $(1, 1, 0)$ och $(1, 0, 1)$. (ON–system)

Vinkeln mellan vektorerna får vi från formeln



$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|}.$$

I vårt fall ger detta

$$\cos\gamma = \frac{(1,1,0)\cdot(1,0,1)}{\|(1,1,0)\|\,\|(1,0,1)\|} = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\,\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

vilket svarar mot $\gamma = \frac{1}{3}\pi$.

W142 Beräkna längden av vektorn $\overrightarrow{PQ}$ om

a) $P=(4,0,-1)$, $Q=(1,0,2)$,

b) $P=(1,2,3)$, $Q=(6,5,4)$,

c) $P=(-1,2,-4)$, $Q=(3,3,-5)$,

om vi har ett ortonormerat koordinatssystem.

Vi löser uppgiften på två olika sätt.

Metod 1 (Uträkning av $\overrightarrow{PQ}$)

Först räknar vi ut vektorn $\overrightarrow{PQ}$ med formeln $\overrightarrow{PQ}=Q-P$,

a) $\overrightarrow{PQ}=Q-P=(1,0,2)-(4,0,-1)=\big(1-4,0-0,2-(-1)\big)=(-3,0,3)$,

b) $\overrightarrow{PQ}=Q-P=(6,5,4)-(1,2,3)=(6-1,5-2,4-3)=(5,3,1)$,

c) $\overrightarrow{PQ}=Q-P=(3,3,-5)-(-1,2,-4)=\big(3-(-1),3-2,-5-(-4)\big)=(4,1,-1)$.

Eftersom koordinatsystemet är ON ges längden av $\overrightarrow{PQ}=(a,b,c)$ av formeln

$$\|\overrightarrow{PQ}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

a) $\|\overrightarrow{PQ}\|=\sqrt{(-3)^2+0^2+3^2}=\sqrt{18}$,

b) $\|\overrightarrow{PQ}\|=\sqrt{5^2+3^2+1^2}=\sqrt{35}$,

c) $\|\overrightarrow{PQ}\|=\sqrt{4^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{18}$.

Metod 2 (Avståndsformeln)

Längden av $\overrightarrow{PQ}$ är lika med avståndet mellan punkterna $P=(p_1,p_2,p_3)$ och $Q=(q_1,q_2,q_3)$, och detta avstånd ges av formeln

$$\|\overrightarrow{PQ}\|=\sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2+(p_3-q_3)^2},$$

eftersom koordinatsystemet är ON.

a) $\|\overrightarrow{PQ}\|=\sqrt{(4-1)^2+(0-0)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{3^2+0^2+3^2}=\sqrt{18}$,

b) $\|\overrightarrow{PQ}\|=\sqrt{(1-6)^2+(2-5)^2+(3-4)^2}=\sqrt{5^2+3^2+1^2}=\sqrt{35}$,

c) $\|\overrightarrow{PQ}\|=\sqrt{(-1-3)^2+(2-3)^2+\big(-4-(5)\big)^2}=\sqrt{4^2+1^2+1^2}=\sqrt{18}$.

W143 Beräkna arbetet W som uträttas av kraften $\boldsymbol{a}$ vid den rätlinjiga förflyttningen från P till Q i följande fall (ON-system):

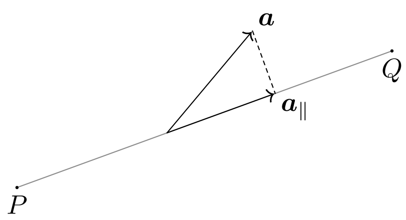
a) $\boldsymbol{a}=(1,2,0)$, $P=(4,-7,3)$, $Q=(6,2,-1)$,

b) $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$, $P=(2,1,3)$, $Q=(-1,-1,-1)$.

Från mekaniken vet vi att arbetet W är

$$W=\text{kraften}\cdot\text{sträckan}.$$

Med "kraften" menar vi den verksamma kraften, d.v.s. den komposant $\boldsymbol{a}_\|$ av kraften som pekar i förflyttningens riktning.



Det uträttade arbetet ges därmed av

$$W=\|\boldsymbol{a}_\|\|\cdot\|\overrightarrow{PQ}\|=\{\,\boldsymbol{a}_\| \text{ och } \overrightarrow{PQ} \text{ är parallella}\,\}=\boldsymbol{a}_\|\cdot\overrightarrow{PQ}. \qquad (*)$$

Om det är så att $\boldsymbol{a}_\|$ är motriktad förflyttningens riktning definierar man arbetet med ett negativt värde så att $(*)$ fortfarande gäller.

Formeln $(*)$ kan faktiskt skrivas om till en räknemässigt enklare formel genom att notera att den andra komposanten av kraften $\boldsymbol{a}_\perp$ (den overksamma kraften) är vinkelrät mot $\overrightarrow{PQ}$. Därmed är

$$W=\boldsymbol{a}_\|\cdot\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{a}_\|\cdot\overrightarrow{PQ}+\boldsymbol{a}_\perp\cdot\overrightarrow{PQ}=(\boldsymbol{a}_\|+\boldsymbol{a}_\perp)\cdot\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{PQ}.$$

Vi har nu

a) $\overrightarrow{PQ}=Q-P=(6-4,2-(-7),-1-3)=(2,9,-4)$,

$W=\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{PQ}=(1,2,0)\cdot(2,9,-4)=1\cdot 2+2\cdot 9+0\cdot(-4)=20$,

b) $\overrightarrow{PQ}=Q-P=(-1-2,-1-3,-1-3)=(-3,-2,-4)$,

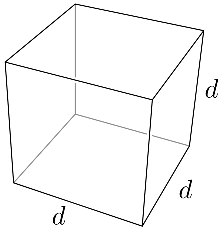
$W=\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{PQ}=(1,1,1)\cdot(-3,-2,-4)=1\cdot(-3)+1\cdot(-2)+1\cdot(-4)=-9$.

W146 Punkterna $(0,0,0)$, $(6,7,6)$ och $(2,6,-9)$ är hörn i en kub. Bestäm de övriga hörnen.

Låt oss för enkelhets skull införa beteckningar på de givna hörnpunkterna

$$\begin{aligned} P &= (0,0,0), \\ Q &= (6,7,6), \\ R &= (2,6,-9). \end{aligned}$$

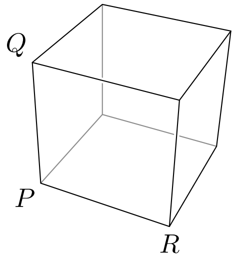
En kub är ett rätblock med alla kanter lika långa.



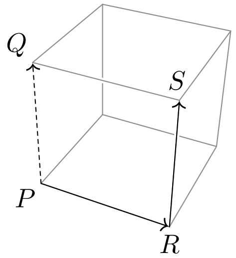
Punkterna P, Q och R skulle kunna vara vilka tre hörn som helst i kuben, men vi kan sortera bort vissa konfigurationer som omöjliga genom att undersöka avståndet mellan punkterna.

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{PQ}\| &= \sqrt{(0-6)^2+(0-7)^2+(0-6)^2} = \sqrt{121} = 11, \\ \|\overrightarrow{PR}\| &= \sqrt{(0-2)^2+(0-6)^2+(0-(-9))^2} = \sqrt{121} = 11, \\ \|\overrightarrow{QR}\| &= \sqrt{(6-2)^2+(7-6)^2+(6-(-9))^2} = \sqrt{242} = 11\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Nu ser vi att det enda möjliga förhållandet mellan P, Q och R är



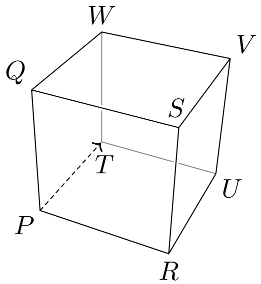
Den fjärde hörnpunkten S som ligger på samma yta som P, Q, R ges av



$$\begin{aligned} S &= P + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} = \{\, \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PQ} \,\} \\ &= P + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ} \\ &= (0,0,0) + (2-0, 6-0, -9-0) + (6-0, 7-0, 6-0) \\ &= (8, 13, -3), \end{aligned}$$

där likheten $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PQ}$ följer av att kuben har lika långa sidor.

För att komma åt de övriga hörnpunkterna, som vi döper till T, U, V och W enligt figuren nedan, behöver vi en kantvektor som inte ligger i planet $PQRS$, t.ex. $\overrightarrow{PT}$.



Villkoren för att bestämma $\overrightarrow{PT}$ får vi från att vi har en kub, vilket ger att $\overrightarrow{PT}$ är vinkelrät mot de två kantvektorerna $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{PR}$, d.v.s.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{PQ} &= 0, \\ \overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{PR} &= 0, \end{aligned}$$

och att $\overrightarrow{PT}$ är lika lång som $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{PR}$,

$$\|\overrightarrow{PT}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{PR}\| = 11.$$

Om vi skriver $\overrightarrow{PT}$ i komponentform som (a,b,c), då ger ovanstående villkor att

$$(a,b,c)\cdot(6-0, 7-0, 6-0) = 6a+7b+6c = 0, \tag{1}$$

$$(a,b,c)\cdot(2-0, 6-0, -9-0) = 2a+6b-9c = 0, \tag{2}$$

$$\|(a,b,c)\|^2 = a^2+b^2+c^2 = 121. \tag{3}$$

Vi ska nu försöka lösa ekvationssystemet (1), (2) och (3).

$3 \cdot (2) - (1)$ ger

$$3 \cdot (2a + 6b - 9c) - (6a + 7b + 6c) = 11b - 33c = 11(b - 3c) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad b = 3c.$$

Detta insatt i (2) ger

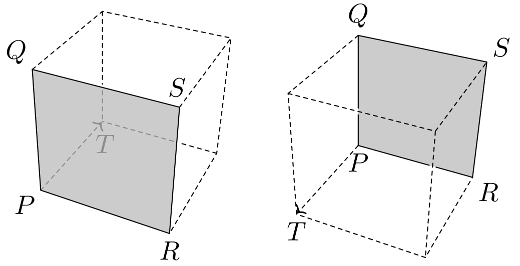
$$2a + 6 \cdot 3c - 9c = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a = -\tfrac{9}{2}c.$$

Både $a = -\frac{9}{2}c$ och $b = 3c$ insatt i (3) ger

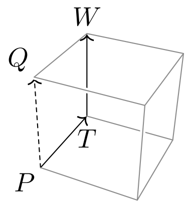
$$\bigl(-\tfrac{9}{2}c\bigr)^2 + \bigl(3c\bigr)^2 + c^2 = 121 \qquad \Leftrightarrow \qquad c = \pm 2,$$

vilket ger $a = -\frac{9}{2}c = \mp 9$ och $b = 3c = \pm 6$. Alltså finns två lösningar $(a, b, c) = (-9, 6, 2)$ eller $(a, b, c) = (9, -6, -2)$.

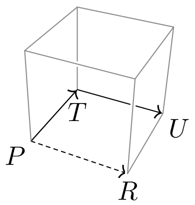
De två lösningarna svarar mot att T kan ligga på ömse sidor om ytan $PQRS$.



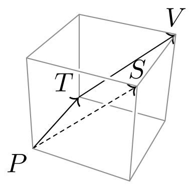
Med $\overrightarrow{PT}$ given kan vi räkna ut de övriga hörnen i kuben genom att uttrycka dem i de kända kantvektorerna.



$$\overrightarrow{PW} = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TW} = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{PQ}$$



$$\overrightarrow{PU} = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TU} = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{PR}$$



$$\overrightarrow{PV} = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TV} = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{PS}$$

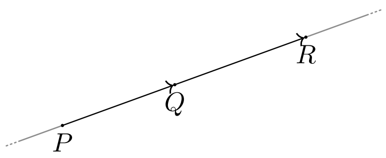
Med insatta siffror blir detta

$\overrightarrow{PT} = (-9, 6, 2)$: $\overrightarrow{PW} = (-9, 6, 2) + (6, 7, 6) = (-3, 13, 8)$,
$\overrightarrow{PU} = (-9, 6, 2) + (2, 6, -9) = (-7, 12, -7)$,
$\overrightarrow{PV} = (-9, 6, 2) + (8, 13, -3) = (-1, 19, -1)$

$\overrightarrow{PT} = (9, -6, -2)$: $\overrightarrow{PW} = (9, -6, -2) + (6, 7, 6) = (15, 1, 4)$,
$\overrightarrow{PU} = (9, -6, -2) + (2, 6, -9) = (11, 0, -11)$,
$\overrightarrow{PV} = (9, -6, -2) + (8, 13, -3) = (17, 7, -5)$.

W151 Kan konstanten a bestämmas så att punkterna $(1, a, a^2)$, $(-4, 5, 0)$ och $(5, -1, 3a)$ ligger i rät linje? Bestäm i så fall ekvationerna för denna räta linje.

Om punkterna $P = (1, a, a^2)$, $Q = (-4, 5, 0)$ och $R = (5, -1, 3a)$ ska ligga på en rät linje måste vektorerna $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{QR}$ vara parallella,



d.v.s. de ska uppfylla villkoret

$$\overrightarrow{PQ} = \alpha\, \overrightarrow{QR}$$

för någon skalär α. Detta ger i komponentform

$$(-4-1, 5-a, 0-a^2) = \alpha\bigl(5-(-4), -1-5, 3a-0\bigr)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \qquad -5 &= 9\alpha, && (1)\\ 5-a &= -6\alpha, && (2)\\ -a^2 &= 3a\alpha. && (3) \end{aligned}$$

(1) ger att $\alpha = -\frac{5}{9}$. (2) ger att

$$a = 5 + 6\alpha = \tfrac{5}{3},$$

och detta ger att (3) blir uppfylld,

$$\begin{aligned} \text{VL av (3)} &= -a^2 = -\tfrac{25}{9},\\ \text{HL av (3)} &= 3a\,\alpha = 3\cdot(-\tfrac{5}{9})\cdot\tfrac{5}{3} = -\tfrac{25}{9}. \end{aligned}$$

Alltså måste $a = \frac{5}{3}$ för att punkterna ska ligga på en rät linje. En riktningsvektor till linjen får vi då som

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{QR} = R - Q = \bigl(5-(-4), -1-5, 3\cdot\tfrac{5}{3}-0\bigr) = (9,-6,5).$$

En punkt på linjen är $Q = (-4,5,0)$ så linjens ekvation är

$$\frac{x-(-4)}{9} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z-0}{5}.$$

W152 Kan konstanterna a, b, c och d bestämmas så att parameterframställningarna

$$\begin{cases} x = 1+2t\\ y = 2-3t\\ z = t \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \begin{cases} x = 4+as\\ y = b+cs\\ z = d+5s \end{cases}$$

betyder samma linje?

Vi ska lösa uppgiften med två olika metoder.

Metod 1 (Geometriskt)

De två linjerna är lika om de har riktningsvektorer som är parallella och en punkt gemensam. Från parameteriseringen av linjerna kan vi avläsa respektive linjes riktningsvektor (koefficienterna framför t respektive s),

$$(2,-3,1) \quad \text{och} \quad (a,c,5).$$

Om de ska vara parallella måste det finnas en skalär α så att

$$(2,-3,1) = \alpha\,(a,c,5),$$

d.v.s.

$$\begin{aligned} 2 &= a\,\alpha, && (1)\\ -3 &= c\,\alpha, && (2)\\ 1 &= 5\alpha. && (3) \end{aligned}$$

Från (3) får vi att $\alpha = \frac{1}{5}$. Ekvation (1) och (2) ger då att

$$a = 2/\alpha = 10 \quad \text{och} \quad c = -3/\alpha = -15.$$

Med dessa värden på a och c är linjerna parallella.

Linjerna sammanfaller om de dessutom har en punkt gemensam. Tag punkten $(1,2,0)$ på den första linjen (svarar mot parametervärdet $t=0$). Vi ska nu visa att den punkten även ligger på den andra linjen genom att ta fram ett parametervärde s som ger just $(1,2,0)$, d.v.s.

$$\begin{aligned} 1 &= 4+10s && (4)\\ 2 &= b-15s && (5)\\ 0 &= d+5s && (6) \end{aligned}$$

Ekvation (4) ger att $s = -\frac{3}{10}$. Detta insatt i (5) och (6) ger

$$\begin{aligned} 2 &= b - 15\cdot\bigl(-\tfrac{3}{10}\bigr) \qquad \Leftrightarrow \qquad b = -\tfrac{5}{2},\\ 0 &= d + 5\cdot\bigl(-\tfrac{3}{10}\bigr) \qquad \Leftrightarrow \qquad d = \tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

Alltså, om $a = 10$, $b = -\frac{5}{2}$, $c = -15$ och $d = \frac{3}{2}$ så beskriver de två parametriseringarna samma linje.

METOD 2 (Analytiskt)

De två linjerna är lika om varje punkt på den ena linjen också tillhör den andra linjen.

Tag därför en godtycklig punkt på den första linjen

$$(x, y, z) = (1 + 2t_0, 2 - 3t_0, t_0),$$

där t_0 är ett godtyckligt fixt parametervärde. Vi ska nu visa att det finns ett parametervärde $s = s_0$ som ger denna punkt (givetvis efter att ha anpassat konstanterna a, b, c och d). Vi ska alltså ta fram s_0 (och a, b, c, d) så att

$$\begin{aligned} 1 + 2t_0 &= 4 + as_0, && (7)\\ 2 - 3t_0 &= b + cs_0, && (8)\\ t_0 &= d + 5s_0. && (9) \end{aligned}$$

Från (9) får vi $s_0 = \frac{1}{5}(t_0 - d)$ som vi stoppar in i (7) och (8),

$$\begin{aligned} 1 + 2t_0 &= 4 + a\,\tfrac{1}{5}(t_0 - d),\\ 2 - 3t_0 &= b + c\,\tfrac{1}{5}(t_0 - d), \end{aligned}$$

Vi samlar t_0 i ena ledet

$$\begin{aligned} (-3 + \tfrac{1}{5}ad) + (2 - \tfrac{1}{5}a)t_0 &= 0,\\ (2 - b + \tfrac{1}{5}cd) + (-3 - \tfrac{1}{5}c)t_0 &= 0. \end{aligned}$$

Konstanterna a, b, c, d ska nu väljas så att ovanstående ekvationer är uppfyllda oavsett vilket värde t_0 har. Detta betyder att vi måste ha att

$$\begin{aligned} -3 + \tfrac{1}{5}ad &= 0,\\ 2 - \tfrac{1}{5}a &= 0,\\ 2 - b + \tfrac{1}{5}cd &= 0,\\ -3 - \tfrac{1}{5}c &= 0. \end{aligned}$$

vilket ger

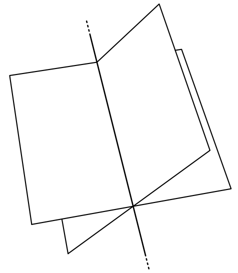
$$a = 10, \quad b = -\tfrac{5}{2}, \quad c = -15 \quad \text{och} \quad d = \tfrac{3}{2}.$$

W155 Bestäm ekvationerna i parameterform för skärningslinjen till planen

a) $x + y + z = 6$ och $2x - y + z = 3$, respektive

b) $x + 2y - z = 2$ och $z = 0$.

a) Skärningslinjen består av alla punkter som tillhör båda planen.



skärningslinje

Det betyder att en punkt (x, y, z) på skärningslinjen uppfyller båda planens ekvationer,

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6, && (1)\\ 2x - y + z &= 3. && (2) \end{aligned}$$

(1) + (2) ger

$$3x + 2z = 9 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 3 - \tfrac{2}{3}z.$$

Detta insatt i (1) ger

$$3 - \tfrac{2}{3}z + y + z = 6 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 3 - \tfrac{1}{3}z.$$

Alltså, om

$$\begin{aligned} x &= 3 - \tfrac{2}{3}z,\\ y &= 3 - \tfrac{1}{3}z, \end{aligned}$$

så ligger (x, y, z) på skärningslinjen. Vi kan variera z och på så sätt röra oss längs skärningslinjen. Variabeln z spelar alltså rollen av parameter till linjen. Om vi döper z till t så får vi alltså

$$\begin{aligned} x &= 3 - \tfrac{2}{3}t,\\ y &= 3 - \tfrac{1}{3}t,\\ z &= t, \end{aligned}$$

vilket är en parametrisering av skärningslinjen. (Hade vi istället satt $z = -3t$ skulle vi fått svaret i facit. Det är en annan parametrisering av samma skärningslinje.)

b) Lösningsgången är precis densamma som till a-uppgiften. Skärningslinjen ges av alla punkter som uppfyller båda planens ekvationer

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2, && (3)\\ z &= 0. && (4)\end{aligned}$$

(4) insatt i (3) ger $x + 2y = 2$ d.v.s. $x = 2 - 2y$. Om

$$\begin{aligned} x &= 2 - 2y, && (1)\\ z &= 0, && (2)\end{aligned}$$

så ligger (x, y, z) på skärningslinjen. Denna gång är det y som agerar som parameter, och med $y = t$ får vi följande parametrisering av skärningslinjen

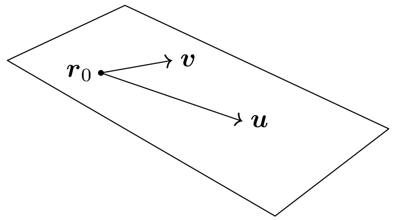
$$\begin{aligned} x &= 2 - 2t,\\ y &= t,\\ z &= 0.\end{aligned}$$

W157 Bestäm ekvationen för planet genom punkterna $(3, 2, -1)$, $(7, 1, 1)$ och $(0, 2, 4)$

a) i parameterform, och

b) utan parametrar.

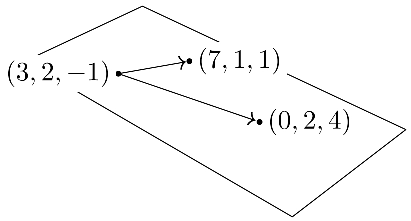
a) För att bestämma en parametrisering av planet behöver vi en punkt $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i planet och två icke-parallella (linjärt oberoende) vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ som är parallella med planet.



Parametriseringen blir då

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + s\,\boldsymbol{u} + t\,\boldsymbol{v}$$

eftersom varje punkt i planet kan skrivas som en linjärkombination av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ om vi utgår från baspunkten $\boldsymbol{r}_0$. Som punkt i planet kan vi t.ex. välja $\boldsymbol{r}_0 = (3, 2, -1)$. Vi får två vektorer som är parallella med planet om vi tar vektorn från $(3, 2, -1)$ till $(7, 1, 1)$ och vektorn från $(3, 2, -1)$ till $(0, 2, 4)$,



d.v.s. $\bigl(7 - 3, 1 - 2, 1 - (-1)\bigr) = (4, -1, 2)$, och $\bigl(0 - 3, 2 - 2, 4 - (-1)\bigr) = (-3, 0, 5)$. Planet parametriseras alltså av

$$(3, 2, -1) + s(4, -1, 2) + t(-3, 0, 5).$$

b) Den allmänna formen för ett plan i koordinatform är

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

där A, B och C är konstanter och (x_0, y_0, z_0) är en punkt i planet. Eftersom vi redan vet punkter som ingår i planet kan vi sätta t.ex.

$$(x_0, y_0, z_0) = (3, 2, -1).$$

De andra två punkterna ska också ligga i planet och därför uppfylla planets ekvation, d.v.s.

$$\begin{aligned} A(7-3) + B(1-2) + C\bigl(1-(-1)\bigr) &= 0,\\ A(0-3) + B(2-2) + C\bigl(4-(-1)\bigr) &= 0,\end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} 4A - B + 2C &= 0 \quad (1)\\ -3A + 5C &= 0 \quad (2)\end{aligned}$$

Från (2) får vi att $A = \frac{5}{3}C$ och detta insatt i (1) ger

$$4 \cdot \tfrac{5}{3}C - B + 2C = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad B = \tfrac{26}{3}C.$$

Vi kan alltså välja

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{5}{3}t, \\ B &= \tfrac{26}{3}t, \\ C &= t, \end{aligned}$$

för vilket som helst värde på $t \neq 0$ och få värden på A, B och C. Väljer vi $t = 3$ fås heltalen $A = 5$, $B = 26$ och $C = 3$. Planets ekvation blir

$$5(x-3) + 26(y-2) + 3(z+1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 5x + 26y + 3z = 64.$$

Anm. Konstanterna (A, B, C) svarar mot det sökta planets normalvektor och olika val av t ger olika längd på denna normalvektor.

W159 Beräkna $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ om

a) $\boldsymbol{a} = (5, -1, 4)$, $\boldsymbol{b} = (-3, 2, 1)$,

b) $\boldsymbol{a} = (2, 1, 0)$, $\boldsymbol{b} = (1, -2, 5)$,

och vi har ett högerhänt ON–system.

Vi använder formeln i sats 1.17,

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1), \qquad (*)$$

och sen kan vi använda den antikommutativa lagen för att bestämma $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$.

a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (5, -1, 4) \times (-3, 2, 1) = \big((-1) \cdot 1 - 4 \cdot 2, -5 \cdot 1 + 4 \cdot (-3), 5 \cdot 2 - (-1) \cdot (-3)\big) = (-9, -17, 7,$

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (9, 17, -7),$$

b) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (2, 1, 0) \times (1, -2, 5) = \big(1 \cdot 5 - 0 \cdot (-2), -2 \cdot 5 + 0 \cdot 1, 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1\big) = (5, -10, -5),$

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (-5, 10, 5).$$

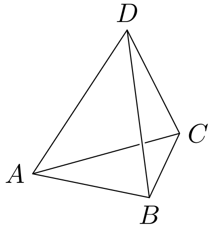
Anm. Formeln $(*)$ kan vara ganska svår att komma ihåg. I avsnitt 1.12 ges en determinantformel för kryssprodukten som är enklare att lägga på minnet.

W160 En tetraeder har hörnen $A = (2, 3, 2)$, $B = (-1, 5, 4)$, $C = (1, 7, -2)$ och $D = (6, 4, 1)$. Bestäm ekvationen för

a) planet genom ABC,

b) höjden genom hörnet D.

En tetraeder är den figur vi får när vi förbinder fyra punkter, som inte alla ligger i ett plan, med räta linjer.



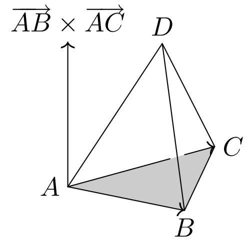
a) För att bestämma en ekvation för planet ABC behöver vi en punkt i planet $\boldsymbol{r}_0$ och en normalvektor $\boldsymbol{n}$ till planet (en vektor vinkelrät mot planet). Då ges planets ekvation i vektorform av

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0.$$

Vi har redan givet tre punkter i planet så vi kan t.ex. välja

$$\boldsymbol{r}_0 = A = (2, 3, 2).$$

De två kantvektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ är båda parallella med planet så deras kryssprodukt är vinkelrät mot planet.



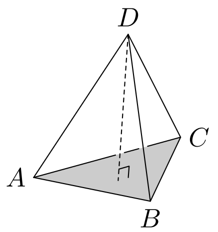
Vi sätter alltså

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} &= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-1-2, 5-3, 4-2) \times (1-2, 7-3, -2-2)\\
&= (-3, 2, 2) \times (-1, 4, -4)\\
&= \big(2\cdot(-4) - 2\cdot 4, -(-3)\cdot(-4) + 2\cdot(-1), (-3)\cdot 4 - 2\cdot(-1)\big)\\
&= (-16, -14, -10).
\end{aligned}$$

Planets ekvation blir alltså

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0\\
\Leftrightarrow\quad & (-16, -14, -10)\cdot\big((x,y,z) - (2,3,2)\big) = 0\\
\Leftrightarrow\quad & -16(x-2) - 14(y-3) - 10(z-2) = 0\\
\Leftrightarrow\quad & 8x + 7y + 5z = 47.
\end{aligned}$$

b) Höjden till hörnet D är den vinkelräta sträcka från basplanet ABC till D.



Höjden är alltså parallell med normalvektorn $\boldsymbol{n} = (-16, -14, -10)$ till planet ABC. Vi vet dessutom att punkten $D = (6, 4, 1)$ ligger på höjdlinjen, så ekvationen för höjden blir

$$\frac{x-6}{-16} = \frac{y-4}{-14} = \frac{z-1}{-10} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x-6}{8} = \frac{y-4}{7} = \frac{z-1}{5}.$$

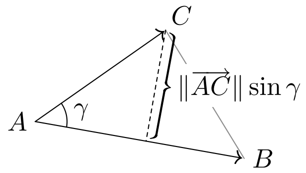
W161 Beräkna arean av den triangel, vars hörn är

a) punkterna $(4, 1, 2)$, $(6, 2, -1)$ och $(3, 3, 4)$,

b) punkterna $(1, 1, 1)$, $(-1, 0, 1)$ och $(2, 3, 0)$.

(ON–system)

Den triangel med hörn i punkterna A, B och C har två kantvektorer $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$. Om γ betecknar vinkeln mellan $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$, då ges triangeln area av



$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \tfrac{1}{2}\text{basen}\cdot\text{höjden} = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|\sin\gamma\\
&= \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|.
\end{aligned}$$

a) Med $A = (4, 1, 2)$, $B = (6, 2, -1)$ och $C = (3, 3, 4)$ bli alltså arean

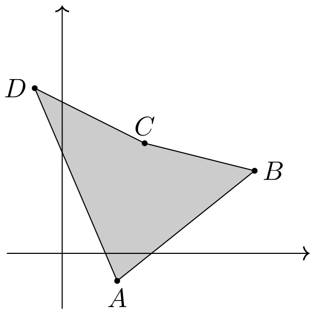
$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| = \tfrac{1}{2}\|(6-4, 2-1, -1-2)\times(3-4, 3-1, 4-2)\|\\
&= \tfrac{1}{2}\|(2, 1, -3)\times(-1, 2, 2)\|\\
&= \tfrac{1}{2}\big\|\big(1\cdot 2 - (-3)\cdot 2, -2\cdot 2 + (-3)\cdot(-1), 2\cdot 2 - 1\cdot(-1)\big)\big\|\\
&= \tfrac{1}{2}\|(8, -1, 5)\| = \tfrac{1}{2}\sqrt{8^2 + (-1)^2 + 5^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{90} = \tfrac{3}{2}\sqrt{10}.
\end{aligned}$$

b) I detta fall är $A = (1, 1, 1)$, $B = (-1, 0, 1)$ och $C = (2, 3, 0)$ och triangelns area är

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| = \tfrac{1}{2}\|(-1-1, 0-1, 1-1)\times(2-1, 3-1, 0-1)\|\\
&= \tfrac{1}{2}\|(-2, -1, 0)\times(1, 2, -1)\|\\
&= \tfrac{1}{2}\big\|\big((-1)\cdot(-1) - 0\cdot 2, -(-2)\cdot(-1) + 0\cdot 1, (-2)\cdot 2 - (-1)\cdot 1\big)\big\|\\
&= \tfrac{1}{2}\|(1, -2, -3)\| = \tfrac{1}{2}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{14}.
\end{aligned}$$

W162 Beräkna arean av fyrhörningen $ABCD$ då $A = (2, -1)$, $B = (7, 3)$, $C = (3, 4)$ och $D = (-1, 6)$. (ON-system)

Vi ritar upp fyrhörningen.



Nu ser vi att fyrhörningens area är lika med den sammanlagda arean av trianglarna ABC och ACD.

Eftersom vi har en formel för arean av en triangel i tre dimensioner kan vi tänka oss att fyrhörningen ligger i x, y-planet och att vi tillfogar en z-riktning, d.v.s.

$$\begin{aligned} A &= (2, -1, 0), \qquad & B &= (7, 3, 0), \\ C &= (3, 4, 0), \qquad & D &= (-1, 6, 0). \end{aligned}$$

Vi får nu att

$$\begin{aligned} \text{area}(ABCD) &= \text{area}(ABC) + \text{area}(ACD) = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| + \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\| \\ &= \tfrac{1}{2}\|(7-2, 3-(-1), 0-0) \times (3-2, 4-(-1), 0-0)\| \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\|(3-2, 4-(-1), 0-0) \times (-1-2, 6-(-1), 0-0)\| \\ &= \tfrac{1}{2}\|(5,4,0) \times (1,5,0)\| + \tfrac{1}{2}\|(1,5,0) \times (-3,7,0)\| \\ &= \tfrac{1}{2}\|(4\cdot 0 - 0\cdot 5, -5\cdot 0 + 0\cdot 1, 5\cdot 5 - 4\cdot 1)\| \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\big\|\big(5\cdot 0 - 0\cdot 7, 1\cdot 0 - 0\cdot(-3), 1\cdot 7 - 5\cdot(-3)\big)\big\| \\ &= \tfrac{1}{2}\|(0,0,21)\| + \tfrac{1}{2}\|(0,0,22)\| \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{0^2+0^2+21^2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{0^2+0^2+22^2} = \frac{21+22}{2} = \frac{43}{2}. \end{aligned}$$

W167 Beräkna

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} \sin v & -\cos v \\ \cos v & \sin v \end{vmatrix}$,

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix}$,

g) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

2×2-determinanter beräknar vi med minneregeln

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{array}{cc} + & - \\ a & b \\ c & d \end{array} = ad - bc.$$

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 3\cdot 5 = 8 - 15 = -7,$

c) $\begin{vmatrix} \sin v & -\cos v \\ \cos v & \sin v \end{vmatrix} = \sin v \cdot \sin v - (-\cos v)\cdot \cos v = \sin^2 v + \cos^2 v = 1.$

3×3-determinanter beräknas med en kofaktorutveckling längs första raden,

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} - 2\cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}$
$= 1\cdot\big(4\cdot 5 - 1\cdot(-6)\big) - 2\cdot\big((-3)\cdot 5 - 2\cdot 1\big) + 3\cdot\big((-3)\cdot(-6) - 4\cdot 2\big) =$
$26 + 34 + 30 = 90,$

g) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - (-1)\cdot \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 4\cdot \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$
$= 3\big(5\cdot(-3) - (-2)\cdot 1\big) + 1\cdot\big(6\cdot(-3) - (-2)\cdot 1\big) + 4\cdot\big(6\cdot 1 - 5\cdot 1\big) =$
$-39 - 16 + 4 = -51.$

W168 Beräkna vektorn $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ med hjälp av determinantframställningen, då i ett ortonormerat högersystem,

a) $\quad \boldsymbol{a}=(1,1,0)$, $\boldsymbol{b}=(-1,2,0)$,

c) $\quad \boldsymbol{a}=(1,-1,3)$, $\boldsymbol{b}=(5,1,-1)$.

Determinantformeln för kryssprodukten lyder

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

och vi räknar ut determinanten med kofaktorutveckling längs första raden

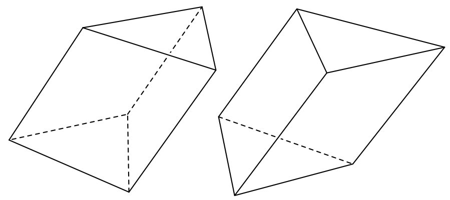
a) $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_1\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}-\boldsymbol{e}_2\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}+\boldsymbol{e}_3\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=$$
$$0\,\boldsymbol{e}_1+0\,\boldsymbol{e}_2+3\,\boldsymbol{e}_3=(0,0,3).$$

c) $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 1 & -1 & 3\\ 5 & 1 & -1\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_1\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}-\boldsymbol{e}_2\begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & -1\end{vmatrix}+\boldsymbol{e}_3\begin{vmatrix}1 & -1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=$$
$$-2\,\boldsymbol{e}_1+16\,\boldsymbol{e}_2+6\,\boldsymbol{e}_3=(-2,16,6).$$

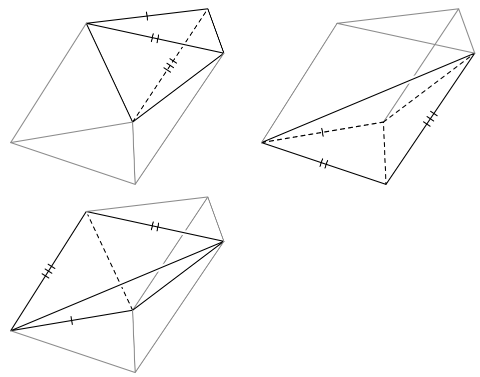
W170 Beräkna volymen av tetraedern med hörnen $(1,2,3)$, $(2,2,5)$, $(5,8,5)$ och $(4,5,-3)$. (ON-system)

Geometriskt kan man se att om vi tar sex kopior av tetraedern kan vi pussla ihop dem så att vi får en parallellepiped.

Vi kan se detta genom följande förfarande. Vi delar först upp parallellepipedern i två lika stora halvor,

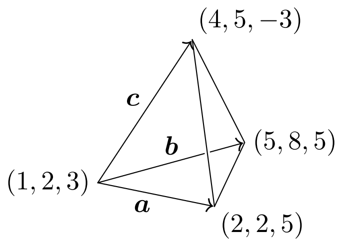


Varje halva kan sedan delas upp i tre tetraedrar,



Eftersom parallellepipedern har volym $V=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$, där $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$ är tre vektorer som spänner upp epipedern, så har tetraedern volymen $\frac{1}{6}V=\frac{1}{6}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$.

I detta fall kan vi välja kantvektorerna till



$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=(2,2,5)-(1,2,3)=(1,0,2),\\ \boldsymbol{b}&=(5,8,5)-(1,2,3)=(4,6,2),\\ \boldsymbol{c}&=(4,5,-3)-(1,2,3)=(3,3,-6),\end{aligned}$$

och volymen blir

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{6}V = \tfrac{1}{6}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] &= \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & -6 \end{vmatrix} \\
&= \tfrac{1}{6}\Bigl(1\cdot\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}\Bigr) \\
&= \tfrac{1}{6}\bigl(6\cdot(-6) - 2\cdot 3 - 0 + 2\cdot(4\cdot 3 - 6\cdot 3)\bigr) \\
&= \tfrac{1}{6}(-36 - 6 + 24 - 36) = -9.
\end{aligned}$$

Eftersom vi fick ett negativt värde var $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ ett vänstersystem och volymen är $+9$.

W172 Undersök om följande vektorer är linjärt beroende eller oberoende:

a) $\boldsymbol{a} = (0,2,1)$, $\boldsymbol{b} = (0,-1,4)$ och $\boldsymbol{c} = (1,-1,0)$,

b) $\boldsymbol{a} = (1,-6,2)$, $\boldsymbol{b} = (0,2,7)$ och $\boldsymbol{c} = (-2,12,-4)$.

Vektorerna är linjärt beroende omm (om och endast om) de alla ligger i ett plan, vilket är detsamma som att parallellepipedern de spänner upp har volym noll. Vektorerna är alltså linjärt beroende omm

$$\text{Volym} = [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] = 0.$$

a) Vi har att

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \{\,\text{Kofaktorutveckling 1:a raden}\,\} \\
&= 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 0 - 2\cdot\bigl(0\cdot 0 - 4\cdot 1\bigr) + 1\cdot\bigl(0\cdot(-1) - (-1)\cdot 1\bigr) = 0 + 8 + 1 = 9 \neq 0.
\end{aligned}$$

Alltså är vektorerna linjärt oberoende.

c) Vi har att

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] &= \begin{vmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ -2 & 12 & -4 \end{vmatrix} = \{\,\text{Kofaktorutveckling 1:a raden}\,\} \\
&= 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 12 & -4 \end{vmatrix} - (-6)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 12 \end{vmatrix} \\
&= 1\cdot\bigl(2\cdot(-4) - 7\cdot 12\bigr) + 6\cdot\bigl(0\cdot(-4) - 7\cdot(-2)\bigr) \\
&\quad + 2\cdot\bigl(0\cdot 12 - 2\cdot(-2)\bigr) = -92 + 84 + 8 = 0.
\end{aligned}$$

Alltså är vektorerna linjärt beroende.

W173 För vilka värden på talet a är vektorerna $(1,a^3,a)$, $(0,a^2,1)$ och $(1,a,1)$ linjärt beroende? Bestäm för dessa a-värden en linjärkombination av vektorerna (med minst en koefficient $\neq 0$), som är $\mathbf{0}$.

De tre vektorerna är linjärt beroende omm deras trippelprodukt är noll. Eftersom

$$\begin{aligned}
\bigl[(1,a^3,a);(0,a^2,1);(1,a,1)\bigr] &= \begin{vmatrix} 1 & a^3 & a \\ 0 & a^2 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} \\
&= \{\,\text{Kofaktorutveckling 1:a raden}\,\} \\
&= 1\cdot\begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} - a^3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + a\cdot\begin{vmatrix} 0 & a^2 \\ 1 & a \end{vmatrix} \\
&= 1\cdot(a^2 - a) - a^3\cdot(0\cdot 1 - 1\cdot 1) + a\cdot(0\cdot a - a^2\cdot 1) \\
&= a^2 - a + a^3 - a^3 = a^2 - a = a(a-1),
\end{aligned}$$

så ser vi att vektorerna är linjärt beroende när $a = 0$ eller $a = 1$.

För $a = 0$ och $a = 1$ ska vi nu hitta konstanter c_1, c_2 och c_3, som alla inte är noll, så att

$$c_1\,(1,a^3,a) + c_2\,(0,a^2,1) + c_3\,(1,a,1) = (0,0,0).$$

$a=0$: I detta fall är vektorerna

$$(1,0,0), \quad (0,0,1) \quad \text{och} \quad (1,0,1),$$

och då ser vi att den första vektorn plus den andra vektorn ger den tredje vektorn, d.v.s.

$$\begin{aligned}&(1,0,0)+(0,0,1)=(1,0,1)\\ \Leftrightarrow \qquad & 1\cdot(1,0,0)+1\cdot(0,0,1)-1\cdot(1,0,1)=\mathbf{0}\end{aligned}$$

vilket är den sökta linjärkombinationen.

$a=1$: Vi har att vektorerna är

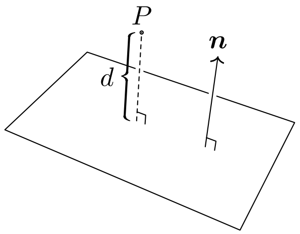
$$(1,1,1), \quad (0,1,1) \quad \text{och} \quad (1,1,1).$$

Den första och den tredje vektorn är lika,

$$(1,1,1)=(1,1,1) \qquad \Leftrightarrow \qquad 1\cdot(1,1,1)+0\cdot(0,1,1)-1\cdot(1,1,1)=\mathbf{0}.$$

W174 Beräkna avståndet från punkten $(2,1,1)$ till planet $x+y-z+1=0$. (ON-system)

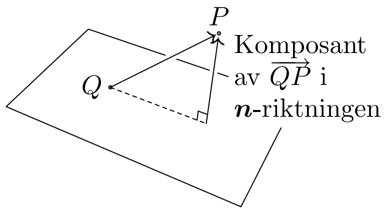
Låt $P=(2,1,1)$. Det kortaste avståndet mellan P och planet är det vinkelräta avståndet.



Avståndsvektorn är alltså parallell med normalvektorn $\boldsymbol{n}$ till planet. Normalvektorn kan vi avläsa från planets ekvation (koefficienterna framför x, y och z),

$$\boldsymbol{n}=(1,1,-1).$$

Tar vi en punkt $Q=(1,1,3)$ i planet (välj bara en punkt som uppfyller planets ekvation) så är avståndet mellan P och planet lika med längden av vektorn $\overrightarrow{QP}$:s komposant i $\boldsymbol{n}$-riktningen.



Alltså är

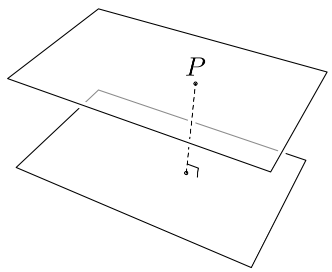
$$\begin{aligned} d &= \|(\overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n\| = |\overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{e}_n| = \frac{|\overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{n}\|}\\ &= \frac{|(2-1,1-1,1-3)\cdot(1,1,-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}\\ &= \frac{1\cdot1+0\cdot1+(-2)\cdot(-1)|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

W176a Beräkna avståndet mellan planen $x-2y+z-1=0$ och $2x-4y+2z-1=0$. (ON-system)

För att planen ska ha ett positivt avstånd mellan sig måste de vara parallella (annars skär de varandra), vilket är samma sak som att deras normalvektorer är parallella. I detta fall kan vi avläsa att normalvektorerna är

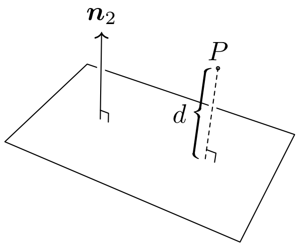
$$\boldsymbol{n}_1=(1,-2,1) \quad \text{och} \quad \boldsymbol{n}_2=(2,-4,2)$$

och då ser vi direkt att $\boldsymbol{n}_2 = 2\boldsymbol{n}_1$, d.v.s. de pekar i samma riktning. Tar vi nu en punkt $P = (1, 1, 2)$ i det första planet så är avståndet mellan planen lika med avståndet mellan punkten P och det andra planet.

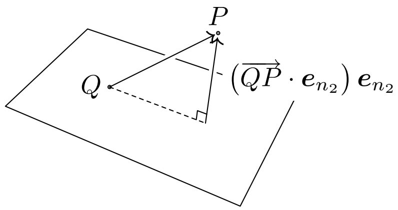


Vi har alltså reducerat avståndsproblemet mellan två plan till att bestämma avståndet mellan en punkt och ett plan $2x - 4y + 2z - 1 = 0$.

Det kortaste avståndet mellan P och planet är det vinkelräta avståndet, d.v.s. avståndsvektorn är parallell med $\boldsymbol{n}_2 = (2, -4, 2)$.



Välj nu en punkt $Q = (2, 1, \frac{1}{2})$ i planet (uppfyller planets ekvation). Då är avståndet d lika med längden av vektorn $\overrightarrow{QP}$:s komposant i $\boldsymbol{n}_2$-riktningen.



Alltså,

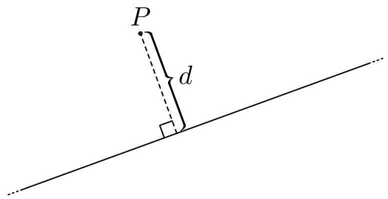
$$
\begin{aligned}
d &= \|(\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n\| = |\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{e}_n| = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{n}\|} \\
&= \frac{|(1-2, 1-1, 2-\frac{1}{2}) \cdot (2, -4, 2)|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 2^2}} \\
&= \frac{|(-1) \cdot 2 + 0 \cdot (-4) + \frac{3}{2} \cdot 2|}{\sqrt{24}} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.
\end{aligned}
$$

W177a Beräkna i ett ON-system avståndet från punkten $(0, 0, 1)$ till linjen $y + 1 = 0$, $x + 2z - 7 = 0$.

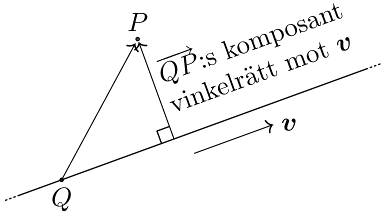
Vi skriver om linjens evation i en mer standardform,

$$y = -1, \qquad \frac{x-1}{1} + \frac{z-3}{1/2} = 0. \tag{$*$}$$

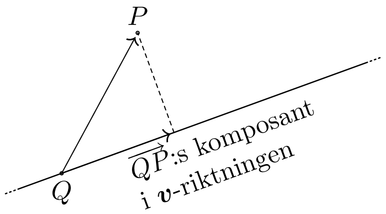
Avståndet mellan punkten $P = (0, 0, 1)$ och linjen är det vinkelräta avståndet.



Från planets ekvation $(*)$ kan vi avläsa linjens riktningsvektor $\boldsymbol{v} = (1, 0, \frac{1}{2})$, (talen i nämnarna). Tar vi en punkt $Q = (0, -1, \frac{7}{2})$ på linjen (uppfyller linjens ekvation; tag $x = 0$, $(*)$ ger att $z = \frac{7}{2}$) så är avståndet d lika längden av med $\overrightarrow{QP}$:s komposant vinkelrätt mot $\boldsymbol{v}$.



Vi får denna komposant som differensen mellan $\overrightarrow{QP}$ och $\overrightarrow{QP}$:s komposant i $\boldsymbol{v}$-riktningen.



d.v.s.

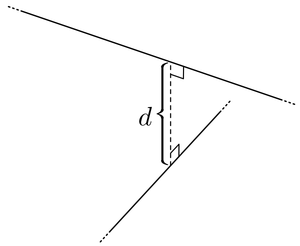
$$d = \|\overrightarrow{QP} - (\overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{e}_v)\boldsymbol{e}_v\| = \left\|\overrightarrow{QP} - \frac{\overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\boldsymbol{v}\right\|$$
$$= \left\|(0-0, 0-(-1), 1-\tfrac{7}{2}) - \frac{\bigl(0-0, 0-(-1), 1-\tfrac{7}{2}\bigr)\cdot(1,0,\tfrac{1}{2})}{1^2+0^2+(\tfrac{1}{2})^2}\,(1,0,\tfrac{1}{2})\right\|$$
$$= \left\|(0,1,-\tfrac{5}{2}) - \frac{0\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-\tfrac{5}{2})\cdot\tfrac{1}{2}}{\tfrac{5}{4}}\,(1,0,\tfrac{1}{2})\right\|$$
$$= \|(0,1,-\tfrac{5}{2}) + (1,0,\tfrac{1}{2})\| = \|(1,1,-2)\| = \sqrt{1^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{6}.$$

W179 Beräkna avståndet mellan följande linjer i ett ON-system:

a) $\quad \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{-1} \quad \text{och} \quad \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-3}{1},$

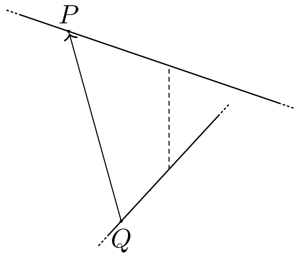
c) $\quad \begin{cases} x = 2+t \\ y = 4+t \\ z = 6+t \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = 2t \\ y = -2+t\,. \\ z = 2+t \end{cases}$

Det kortaste avståndet mellan linjerna är det vinkelräta avståndet.



Om $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ är respektive linjes riktning så är alltså avståndsvektorn parallell med $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ (vinkelrät mot både $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$).

Om vi tar två punkter P och Q på respektive linje så är avståndet d lika med längden av vektorn $\overrightarrow{QP}$:s komposant i $\boldsymbol{n}$-riktning.



$$d = |\overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{e}_n|.$$

a) I detta fall ser vi från linjernas ekvationer (läs av talen i nämnarna) att de har riktningsvektorerna

$$\boldsymbol{v}_1 = (2,1,-1) \quad \text{respektive} \quad \boldsymbol{v}_2 = (1,5,1).$$

Vektorn vinkelrät mot linjerna blir

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1&\boldsymbol{e}_2&\boldsymbol{e}_3\\2&1&-1\\1&5&1\end{vmatrix}\\&=\boldsymbol{e}_1\begin{vmatrix}1&-1\\5&1\end{vmatrix}-\boldsymbol{e}_2\begin{vmatrix}2&-1\\1&1\end{vmatrix}+\boldsymbol{e}_3\begin{vmatrix}2&1\\1&5\end{vmatrix}\\&=\boldsymbol{e}_1\bigl(1\cdot1-(-1)\cdot5\bigr)-\boldsymbol{e}_2\bigl(2\cdot1-(-1)\cdot1\bigr)\\&\quad+\boldsymbol{e}_3\bigl(2\cdot5-1\cdot1\bigr)=6\,\boldsymbol{e}_1-3\,\boldsymbol{e}_2+9\,\boldsymbol{e}_3=(6,-3,9).\end{aligned}$$

Två punkter på linjen får vi t.ex. genom att sätta $x=0$ i linjernas ekvationer

$$\frac{0+1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-1}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{aligned}y&=-\tfrac{5}{2}\\z&=-\tfrac{1}{2}\end{aligned}\quad\Leftrightarrow\quad P=\bigl(0,-\tfrac{5}{2},-\tfrac{1}{2}\bigr),$$

$$\frac{0-4}{1}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{1}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{aligned}y&=-18\\z&=-1\end{aligned}\quad\Leftrightarrow\quad Q=\bigl(0,-18,-1\bigr)$$

Vi får nu att avståndet mellan linjerna blir

$$\begin{aligned}d=|\overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{e}_n|&=\frac{|\overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{n}\|}\\&=\frac{\bigl|\bigl(0-0,-\frac{5}{2}-(-18),-\frac{1}{2}-(-1)\bigr)\cdot(6,-3,9)\bigr|}{\sqrt{6^2+(-3)^2+9^2}}\\&=\frac{|0\cdot6+\frac{31}{2}\cdot(-3)+\frac{1}{2}\cdot9}{\sqrt{126}}=\frac{42}{\sqrt{126}}=\sqrt{14}.\end{aligned}$$

c) Vi kan avläsa linjernas riktningsvektorer (koefficienterna framför t) från deras parametriseringar

$$\boldsymbol{v}_1=(1,1,1)\quad\text{och}\quad\boldsymbol{v}_2=(2,1,1).$$

Det vinkelräta avståndet är alltså längden av en vektor som är parallell med

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1&\boldsymbol{e}_2&\boldsymbol{e}_3\\1&1&1\\2&1&1\end{vmatrix}\\&=\boldsymbol{e}_1\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}-\boldsymbol{e}_2\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}+\boldsymbol{e}_3\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}\\&=\boldsymbol{e}_1\bigl(1\cdot1-1\cdot1\bigr)-\boldsymbol{e}_2\bigl(1\cdot1-1\cdot2\bigr)+\boldsymbol{e}_3\bigl(1\cdot1-1\cdot2\bigr)\\&=0\,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3=(0,1,-1).\end{aligned}$$

Vi får två punkter på respektive linje genom att välja ett parametervärde, t.ex. $t=0$,

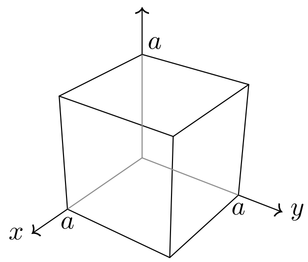
$$P=(2,4,6)\quad\text{och}\quad Q=(0,-2,2).$$

Avståndet mellan linjerna är

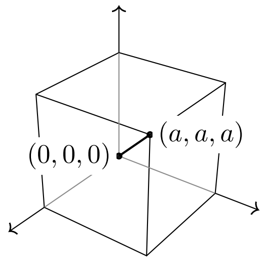
$$\begin{aligned}d=|\overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{e}_n|=\frac{|\overrightarrow{QP}\cdot\boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{n}\|}&=\frac{|(2-0,4-(-2),6-2)\cdot(0,1,-1)|}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}}\\&=\frac{|2\cdot0+6\cdot1+4\cdot(-1)|}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.\end{aligned}$$

W180 Beräkna det kortaste avståndet mellan rymddiagonalen i en kub med sidan a (längdenheter) och en av sidoytornas diagonaler, som inte skär rynddiagonalen.

Vi placerar kuben i ett koordinatsystem med ena hörnet i origo och de från hörnet utgående kanterna längs koordinataxlarna.

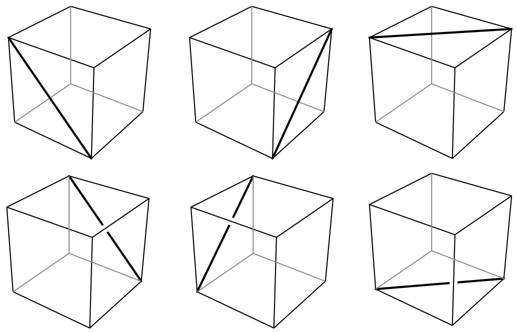


Rymddiagonalen är den linje som sammanbinder hörnet i origo med hörnet (a, a, a). (Vi kan annars placera kuben så att rymddiagonalen blir denna linje.) Eftersom den går genom origo och har riktningsvektor (a, a, a) kan linjen parametriseras som



$$x = 0 + at,\quad y = 0 + at,\quad z = 0 + at.$$

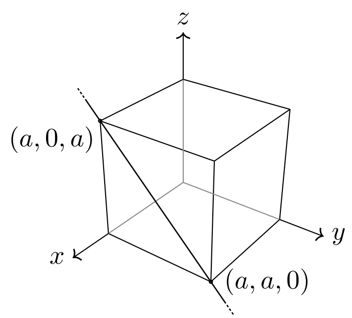
Nu finns en hel del diagonaler längs sidoytorna som inte skär rymddiagonalen.



Men alla dessa diagonaler ligger symmetriskt kring rymddiagonalen så de kommer ha samma avstånd till rymddiagonalen. (De diagonaler på samma rad kan fås att övergå till varandra genom att vrida kuben med rymddiagonalen som axel. Diagonaler i samma kolumn övergår i varandra genom att vrida kuben så att origo och (a, a, a) byter plats.)

Vi kan alltså välja en av dessa diagonaler, säg den som går genom $(a, 0, a)$ och $(a, a, 0)$. Diagonalen går genom punkten $(a, 0, a)$ och har riktningen

$$(a, a, 0) - (a, 0, a) = (0, a, -a).$$



Alltså kan den parametriseras som

$$x = a + 0\,t,\quad y = 0 + a\,t,\quad z = a - a\,t.$$

Vi söker alltså avståndet mellan linjerna

$$\begin{aligned} x &= at, \\ y &= at, \\ z &= at, \end{aligned} \qquad \text{och} \qquad \begin{aligned} x &= a, \\ y &= at, \\ z &= a - at. \end{aligned}$$

Avståndet mellan linjerna är det vinkelräta avståndet, d.v.s. avståndsvektorn är parallell med kryssprodukten av linjernas riktningsvektorer

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} = (a, a, a) \times (0, a, -a) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a & a & a \\ 0 & a & -a \end{vmatrix} \\ &= \boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} a & a \\ a & -a \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & -a \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & a \end{vmatrix} \\ &= -2a^2\,\boldsymbol{e}_1 + a^2\,\boldsymbol{e}_2 + a^2\,\boldsymbol{e}_3 = (-2a^2, a^2, a^2). \end{aligned}$$

Vi tar nu två punkter på respektive linje

$$P = (a, a, a) \quad \text{och} \quad Q = (a, 0, a).$$

Avståndet mellan linjerna är då längden av $\overrightarrow{QP}$:s komposant i $\boldsymbol{n}$-riktning,

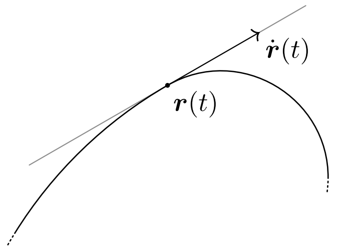
$$\begin{aligned} d = |\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{e}_n| = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{n}\|} &= \frac{|(0, a, 0) \cdot (-2a^2, a^2, a^2)|}{\sqrt{(-2a^2)^2 + (a^2)^2 + (a^2)^2}} \\ &= \frac{a^3}{a^2\sqrt{6}} = \frac{a}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

303b Beräkna derivatan av $\boldsymbol{r}(t) = \bigl(\arcsin t, \sqrt{t}\,\bigr)$.

Uttrycket

$$\boldsymbol{r}(t) = \bigl(\arcsin t, \sqrt{t}\,\bigr)$$

beskriver en parameterkurva i planet. Dess derivata $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ är kurvans tangentriktning i punkten $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$.



Vi får derivatan genom att derivera $\boldsymbol{r}(t)$ komponentvis,

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \Bigl(\frac{d}{dt}\arcsin t, \frac{d}{dt}\sqrt{t}\Bigr) = \Bigl(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \frac{1}{2\sqrt{t}}\Bigr).$$

304 Funktionen $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t, \cos t, \cos 2t)$, $0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$, beskriver en partikels rörelse, där t betecknar tiden. I vilken punkt är partikelns fart störst?

Farten $v(t)$ är beloppet av partikelns hastighet,

$$v(t) = \|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\|.$$

Farten är alltså bara ett mått på hur stor hastigheten är, medan hastighetsvektorn dessutom anger i vilken riktning rörelsen sker. Partikelns hastighet är

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{d}{dt}\bigl(\sin t, \cos t, \cos 2t\bigr) = \bigl(\cos t, -\sin t, -2\sin 2t\bigr)$$

och partikelns fart blir

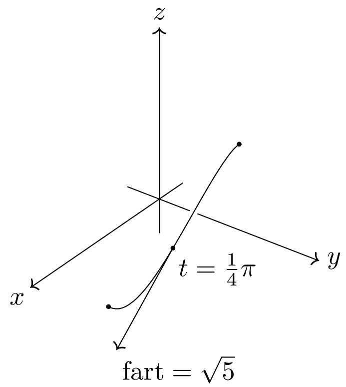
$$\begin{aligned} v(t) = \|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\| &= \sqrt{(\cos t)^2 + (-\sin t)^2 + (-2\sin 2t)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 4\sin^2 2t} = \sqrt{1 + 4\sin^2 2t}. \end{aligned}$$

Vi ska nu bestämma vid vilken tidpunkt farten är som störst, d.v.s. lösa problemet:

$$\text{Maximera}\quad v(t) = \sqrt{1+4\sin^2 2t}, \qquad \text{när } 0 \le t \le \tfrac{1}{2}\pi.$$

Här ser vi direkt att farten blir störst när $\sin 2t = \pm 1$. Eftersom $0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$ sker detta endast när $t = \frac{1}{4}\pi$. Vi denna tidpunkt befinner sig partikeln i punkten

$$\boldsymbol{r}\bigl(\tfrac{\pi}{4}\bigr) = \bigl(\sin\tfrac{\pi}{4}, \cos\tfrac{\pi}{4}, \cos\tfrac{\pi}{2}\bigr) = \bigl(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\bigr).$$



305 Bestäm tangenten till kurvan $\boldsymbol{r}(t) = (t^3 - t^2, t^2, t^2)$

a) i punkten $(0, 1, 1)$,

b) i punkten $(0, 0, 0)$.

För att bestämma tangentlinjen behöver vi en punkt $\boldsymbol{r}_0$ på linjen och linjens riktning $\boldsymbol{v}$. Tangentlinjen kan då skrivas i parameterformen

$$\boldsymbol{r}_{\text{tang}}(s) = \boldsymbol{r}_0 + s\,\boldsymbol{v}.$$

a) Som punkt på linjen väljer vi tangeringspunkten $\boldsymbol{r}_0 = (0, 1, 1)$. Eftersom vi söker tangentlinjen är linjens riktning lika med kurvans riktningsvektor i tangeringspunkten

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}(t_0),$$

där t_0 är parametervärdet som svarar mot punkten $(0, 1, 1)$, d.v.s. $t_0 = 1$. Vi får

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}(1) = (3t^2 - 2t, 2t, 2t)\Big|_{t=1} = (1, 2, 2).$$

Den sökta tangentlinjen är alltså

$$\boldsymbol{r}_{\text{tang}}(s) = (0, 1, 1) + s\,(1, 2, 2).$$

b) Vi väljer tangeringspunkten som punkt på linjen $\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, 0)$. Linjens riktning är lika med kurvans riktning i tangeringspunkten,

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}(0),$$

där $t = 0$ svara mot punkten $(0, 0, 0)$. Alltså,

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}(0) = \big(3t^2 - 2t, 2t, 2t\big)\Big|_{t=0} = (0, 0, 0).$$

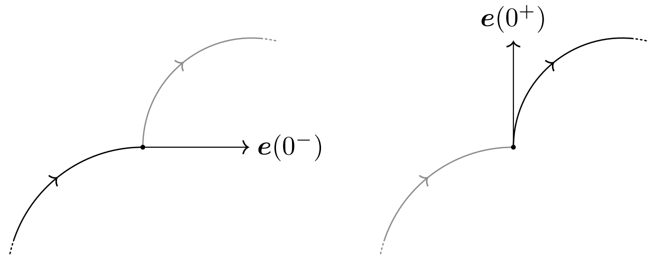
Att kurvan har nollvektorn som riktningsvektor betyder att parameterkurvan är singulär i punkten.

Detta beror på att kurvan (eller snarare parametriseringen) saktar ner och passerar punkten med fart noll. För att ändå få en uppfattning av kurvans riktning i punkten kan vi normalisera riktningsvektorn

$$\boldsymbol{e}(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\|}$$

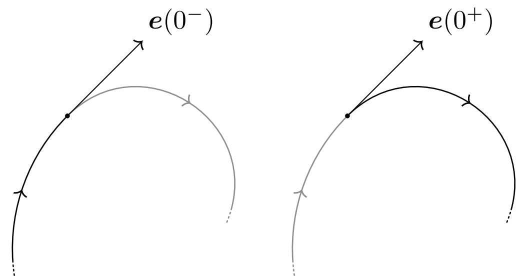
och bara betrakta hur riktningens enhetsvektor uppträder när $t \to 0$.

Det kan vara så att efter passagen fortsätter kurvan i en annan riktning.



Då kan vi givetvis inte tala om någon tangentriktning till kurvan; kurvan har en s.k. spets i punkten.

Men om det är så att kurvan fortsätter i samma riktning efter passagen, då är det meningsfullt att tala om en riktning hos kurvan i punkten.



Kurvans riktning ges alltså av

$$\lim_{t\to 0} \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\|}$$

om gränsvärdet existerar. Vi har att

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{\big(3t^2 - 2t, 2t, 2t\big)}{\big\|(3t^2 - 2t, 2t, 2t)\big\|} &= \lim_{t\to 0} \frac{(3t^2 - 2t, 2t, 2t)}{\sqrt{(3t^2 - 2t)^2 + (2t)^2 + (2t)^2}}\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t(3t - 2, 2, 2)}{|t|\sqrt{(3t - 2)^2 + 4 + 4}}\end{aligned}$$

Detta gränsvärde existerar inte eftersom vänster- och högergränsvärdena är olika (kom ihåg: $|t| = -t$ när $t < 0$ och $|t| = +t$ när $t > 0$),

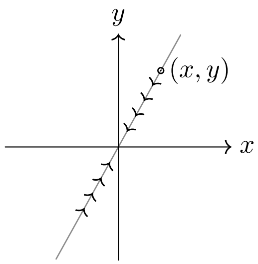
$$\lim_{t\to 0^-} \frac{t(3t-2,2,2)}{-t\sqrt{(3t-2)^2+4+4}} = -\big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\big),$$
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t(3t-2,2,2)}{+t\sqrt{(3t-2)^2+4+4}} = +\big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\big).$$

Svaret är alltså att det inte finns någon tangentlinje.

310a Sök gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x+y}$.

För att gränsvärdet ska existera måste gränsvärdesuttrycket närma sig ett och samma värde oavsett hur vi låter $(x,y) \to (0,0)$.

Ett första test kan därför vara att låta (x,y) närma sig origo längs en rät linje.



En rät linje genom origo kan allmänt skrivas i parameterformen

$$(x,y) = t\,(a,b) \qquad (t \text{ parameter}),$$

där (a,b) är riktningsvektorn för linjen och $t = 0$ svarar mot origo. När vi närmar oss origo längs denna linje blir gränsvärdet

$$\lim_{t\to 0} \frac{(at)^3+(bt)^3}{at+bt} = \lim_{t\to 0} t^2 \cdot \frac{a^3+b^3}{a+b} = 0.$$

Eftersom detta gränsvärde är oberoende av a och b spelar det ingen roll i vilken riktning vi närmar oss origo. Detta betyder *inte* att gränsvärdet måste existera (se övning 3.4 i Petermann II) men *om* gränsvärdet existerar är det lika med noll.

För att beräkna gränsvärdet ska vi skriva om gränsvärdet. Betraktar vi i gränsvärdeskvoten

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}$$

y som en konstant, så ser vi att nämnaren har ett nollställe i $x = -y$ och att täljaren också har en rot i $x = -y$. Faktorsatsen ger då att $x + y$ är en faktor i täljarpolynomet,

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 + Ax + B).$$

Den andra faktorn i högerledet får vi med en polynomdivision.

$$\begin{array}{rl}
x^2 - xy \;\; + y^2 & \\
\hline
x^3 + y^3 & \big|\; x+y \\
\underline{x^3 + x^2y} & \\
-x^2y + y^3 & \\
\underline{-x^2y - xy^2} & \\
xy^2 + y^3 & \\
\underline{xy^2 + y^3} & \\
0 &
\end{array}$$

Alltså är

$$\frac{x^3+y^3}{x+y} = x^2 - xy + y^2.$$

Notera att högerledet är ett enkelt polynomuttryck som vi enkelt kan räkna ut gränsvärdet för,

$$\begin{aligned}
\lim_{x,y\to 0} \frac{x^3+y^3}{x+y} &= \lim_{x,y\to 0} \big(x^2 - xy + y^2\big) = \lim_{x,y\to 0} x^2 - \lim_{x,y\to 0} xy + \lim_{x,y\to 0} y^2 \\
&= 0 - 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

310c Sök gränsvärdet $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}$.

Vi börjar med att undersöka gränsvärdet när vi låter (x,y) närmar sig origo längs en rät linje.

En allmän linje genom origo kan i parameterform skrivas som $(x,y) = t\,(a,b)$. När punkten närmar sig origo längs denna linje blir gränsvärdet

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0} \frac{at+bt}{(at)^2+at\cdot bt+(bt)^2}\\&\qquad = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\cdot\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \begin{cases}0, & \text{om } a+b=0,\\ \text{divergent}, & \text{annars.}\end{cases}\end{aligned}$$

Alltså existerar inte gränsvärdet.

310e Sök gränsvärdet $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$.

Som ett första test låter vi $(x,y)\to(0,0)$ längs en rät linje. En parametrisering av en linje genom origo är i formen $(x,y) = t\,(a,b)$. Gränsvärdet blir då

$$\lim_{t\to 0}\bigl((at)^2+(bt)^2\bigr)\,\sin\frac{1}{at\cdot bt} = \lim_{t\to 0} t^2\cdot(a^2+b^2)\sin\frac{1}{abt^2} = 0.$$

Gränsvärdet är alltså oberoende av a och b, d.v.s. oberoende av i vilken riktning punkten närmar sig origo. Precis som sagts tidigare innebär inte detta att gränsvärdet existerar. Testet kan bara användas för att sortera bort gränsvärden som inte existerar.

I gränsvärdesuttrycket ser vi att sinusfaktorn uppfyller

$$-1 \le \sin\frac{1}{xy} \le +1$$

så hela uttrycket uppfyller

$$-\bigl(x^2+y^2\bigr) \le \bigl(x^2+y^2\bigr)\,\sin\frac{1}{xy} \le \bigl(x^2+y^2\bigr)$$

och eftersom både vänster- och högerledet går mot noll då $(x,y)\to(0,0)$, går även mittenledet mot noll enligt instängningsprincipen. Alltså är

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\,\sin\frac{1}{xy} = 0.$$

415 Bestäm gradienten till funktionen

a) $z = x^2y^3 - 2x^2y$,

b) $z = \arctan\dfrac{y}{x}$, $x\neq 0$.

Gradienten till en funktion $z = z(x,y)$ är vektorn

$$\Bigl(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\Bigr).$$

När vi beräknar partialderivatan $\frac{\partial z}{\partial x}$ betraktar vi y som en konstant och deriverar z med avseende på x,

a) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\bigl(x^2y^3-2x^2y\bigr) = 2xy^3-4xy,$$

b) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{1+\bigl(\frac{y}{x}\bigr)^2}\cdot\Bigl(-\frac{y}{x^2}\Bigr) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Partialderivatan $\frac{\partial z}{\partial y}$ beräknar vi på motsvarande sätt. Vi betraktar x som en konstant och deriverar med avseende på y,

a) $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\bigl(x^2y^3-2x^2y\bigr) = x^2\cdot 3y^2-2x^2\cdot 1 = 3x^2y^2-2x^2,$$

b) $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Gradientvektorn är alltså

a) $\bigl(2xy^3-4xy, 3x^2y^2-2x^2\bigr)$,

b) $\Bigl(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\Bigr)$.

416 Bestäm partialderivatorna av första och andra ordningen till

a) $z = 2xy^2 - x^2y$,

b) $z = \arcsin\dfrac{y}{x}$, där $x<0$, $x^2 \neq y^2$,

c) $z = x\,e^{xy}$.

Funktionen $z = z(x,y)$ har två partialderivator av första ordningen

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad\text{och}\quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Dessa två derivator får vi fram genom att betrakta y som en konstant och derivera z med avseende på x i det första fallet, och ha x som en konstant och derivera z med avseende på y i det andra fallet.

a) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\bigl(2xy^2-x^2y\bigr) = 2y^2-2xy,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\bigl(2xy^2-x^2y\bigr) = 2x\cdot 2y - x^2\cdot 1 = 4xy-x^2,$$

b) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\arcsin\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}}\cdot\Bigl(-\frac{y}{x^2}\Bigr) = \frac{-y}{x^2\cdot\dfrac{1}{|x|}\sqrt{x^2-y^2}}$$
$$= \frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\arcsin\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\cdot\dfrac{1}{|x|}\sqrt{x^2-y^2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Notera att vi får $|x| = -x$ eftersom $x<0$ enligt uppgiftstexten.

c) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\bigl(x\,e^{xy}\bigr) = 1\cdot e^{xy} + x\cdot e^{xy}y = (1+xy)e^{xy},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\bigl(x\,e^{xy}\bigr) = x\,e^{xy}\cdot x = x^2e^{xy}.$$

Andra ordningens partialderivator får vi genom att derivera förstaderivatorerna ytterligare en gång,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\quad\text{och}\quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Man brukar skriva dessa derivator som

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\quad\text{och}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Innan vi sätter igång och deriverar noterar vi att eftersom uttrycken i uppgiftstexten är elementära uttryck (uppbyggda av elementära funktioner) så är andraderivatorerna kontinuerliga och då är blandderivatorna lika,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}.$$

Vi får nu att

a) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\bigl(2y^2-2xy\bigr) = 0-2y = -2y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\bigl(2y^2-2xy\bigr) = 4y-2x,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\bigl(4xy-x^2\bigr) = 4x,$$

b)
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$$
$$= -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}} + \frac{1}{x}\cdot\frac{-\frac{1}{2}y}{\bigl(x^2-y^2\bigr)^{3/2}}\cdot 2x$$
$$= -\frac{y}{x^2\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{y}{\bigl(x^2-y^2\bigr)^{3/2}} = -\frac{y(x^2-y^2)+yx^2}{x^2\bigl(x^2-y^2\bigr)^{3/2}}$$
$$= -\frac{y(2x^2-y^2)}{x^2(x^2-y^2)^{3/2}},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$$
$$= \frac{1\cdot x\sqrt{x^2-y^2} - y\cdot x\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2-y^2}}(-2y)}{\bigl(x\sqrt{x^2+y^2}\,\bigr)^2}$$
$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\bigl(x(x^2-y^2)+xy^2\bigr)}{x^2(x^2-y^2)} = \frac{x}{(x^2-y^2)^{3/2}},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{-1}{\sqrt{x^2-y^2}}$$
$$= -\frac{-\frac{1}{2}}{(x^2-y^2)^{3/2}}\cdot(-2y) = \frac{-y}{\bigl(x^2-y^2\bigr)^{3/2}},$$

c)
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Bigl((1+xy)e^{xy}\Bigr) = y\cdot e^{xy} + (1+xy)\cdot e^{xy}y$$
$$= y(2+xy)e^{xy},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\Bigl((1+xy)e^{xy}\Bigr)$$
$$= x\cdot e^{xy} + (1+xy)\cdot e^{xy}x = x(2+xy)e^{xy},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\bigl(x^2e^{xy}\bigr) = x^2e^{xy}\cdot x = x^3e^{xy}.$$

417 Beräkna i punkten $(1, \frac{1}{4}\pi)$ partialderivatorna av första ordningen av

a) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$,

b) $f(x,y) = \ln\tan\dfrac{y}{x}$.

Vi beräknar partialderivatorna och stoppar sedan in $x=1$ och $y=\frac{1}{4}\pi$.

a)
$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(1,\tfrac{1}{4}\pi\bigr) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)\Big|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}} = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x\,\Big|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}} = \frac{2}{1+\pi^2/16},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(1,\tfrac{1}{4}\pi\bigr) = \frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2+y^2)\Big|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}} = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y\,\Big|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}} = \frac{\pi/2}{1+\pi^2/16}.$$

b)
$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(1,\tfrac{1}{4}\pi\bigr) = \frac{\partial}{\partial x}\ln\tan\frac{y}{x}\,\Big|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}} = \frac{1}{\tan\dfrac{y}{x}}\cdot\frac{d}{dx}\tan\frac{y}{x}\,\Big|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}}$$
$$= \frac{1}{\tan\dfrac{y}{x}}\cdot\Bigl(1+\tan^2\frac{y}{x}\Bigr)\cdot\Bigl(-\frac{y}{x^2}\Bigr)\Big|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}}$$
$$= -\frac{y\bigl(1+\tan^2\dfrac{y}{x}\bigr)}{x^2\tan\dfrac{y}{x}}\,\Bigg|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}} = -\frac{\frac{\pi}{4}\cdot\bigl(1+\tan^2\frac{\pi}{4}\bigr)}{1^2\cdot\tan\frac{\pi}{4}}$$
$$= -\frac{\frac{\pi}{4}\cdot(1+1)}{1^2\cdot 1} = -\tfrac{1}{2}\pi,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(1,\tfrac{1}{4}\pi\bigr) = \frac{\partial}{\partial y}\ln\tan\frac{y}{x}\,\Big|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}} = \frac{1}{\tan\dfrac{y}{x}}\cdot\frac{d}{y}\tan\frac{y}{x}\,\Big|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}}$$
$$= \frac{1}{\tan\dfrac{y}{x}}\cdot\Bigl(1+\tan^2\frac{y}{x}\Bigr)\cdot\frac{1}{x}\,\Big|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}} = \frac{1+\tan^2\dfrac{y}{x}}{x\tan\dfrac{y}{x}}\,\Bigg|_{\substack{x=1\\y=\pi/4}}$$
$$= \frac{1+\tan^2\frac{\pi}{4}}{1\cdot\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{1+1}{1\cdot 1} = 2.$$

419a Låt f vara en deriverbar funktion av en variabel. Visa att

$$x^2 z'_x - xy\, z'_y + y^2 = 0$$

då $z = \dfrac{y^2}{3x} + f(xy)$.

Med beteckningarna i uppgiften menar man

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{och} \quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

När vi beräknar z'_x deriverar vi

$$z = \frac{y^2}{3x} + f(xy)$$

med avseende på x och betraktar y som en konstant,

$$\begin{aligned} z'_x &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{y^2}{3x} + f(xy)\Big) = \frac{y^2}{3}\cdot\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\big(f(xy)\big) \\ &= \{\,\text{Kedjeregeln}\,\} = -\frac{y^2}{3x^2} + f'(xy)\frac{\partial}{\partial x}(xy) = -\frac{y^2}{3x^2} + yf'(xy). \end{aligned}$$

På motsvarande sätt deriverar vi med avseende på y och ser x som en konstant för att få

$$\begin{aligned} z'_y &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y^2}{3x} + f(xy)\Big) = \frac{2y}{3x} + \frac{\partial}{\partial y}\big(f(xy)\big) \\ &= \frac{2y}{3x} + f'(xy)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(xy) = \frac{2y}{3x} + xf'(xy). \end{aligned}$$

Nu får vi att

$$\begin{aligned} x^2 z'_x - xy\, z'_y + y^2 &= x^2\Big(-\frac{y^2}{3x^2} + yf'(xy)\Big) - xy\Big(\frac{2y}{3x} + xf'(xy)\Big) + y^2 \\ &= -\tfrac{1}{3}y^2 + x^2yf'(xy) - \tfrac{2}{3}y^3 - x^2yf'(xy) + y^2 \\ &= \big(-\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3} + 1\big)y^2 + (x^2y - x^2y)f'(xy) = 0, \end{aligned}$$

vilket visar likheten i uppgiftstexten.

419c Låt f vara en deriverbar funktion av en variabel. Visa att

$$x\, z'_x + 2y\, z'_y = nz$$

då $z = x^n f\big(y/x^2\big)$.

Med $z = x^n f\big(y/x^2\big)$ får vi att

$$\begin{aligned} z'_x &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\big(x^n f(y/x^2)\big) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\big(x^n\big)\cdot f(y/x^2) + x^n\cdot\frac{\partial}{\partial x}\big(f(y/x^2)\big) \\ &= nx^{n-1}f(y/x^2) + x^n f'(y/x^2)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{y}{x^2}\Big) \\ &= nx^{n-1}f(y/x^2) + x^n f'(y/x^2)\cdot\Big(-\frac{2y}{x^3}\Big) \\ &= nx^{n-1}f(y/x^2) - \tfrac{1}{2}x^{n-3}yf'(y/x^2), \\ z'_y &= \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\big(x^n f(y/x^2)\big) = x^n\frac{\partial}{\partial y}\big(f(y/x^2)\big) \\ &= x^n f'(y/x^2)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{x^2}\Big) = x^n f'(y/x^2)\cdot\frac{1}{x^2} = x^{n-2}f'(y/x^2). \end{aligned}$$

De båda leden i likheten i uppgiftstexten blir

$$\begin{aligned} \text{VL} &= x\, z'_x + 2y\, z'_y = x\big(nx^{n-1}f(y/x^2) - 2x^{n-3}yf'(y/x^2)\big) + 2y\cdot x^{n-2}f'(y/x^2) \\ &= nx^n f(y/x^2) + (-2x^{n-2}y + 2x^{n-2}y)f'(y/x^2) = nx^n f(y/x^2), \\ \text{HL} &= nz = nx^n f(y/x^2). \end{aligned}$$

Alltså är $\text{VL} = \text{HL}$ och likheten är uppfylld.

420 Verifiera att funktionen z definierad genom $z(x,y) = f\Big(\dfrac{x}{x^2+y^2}\Big)$ satisfierar differentialekvationen

$$2xy\,\frac{\partial z}{\partial x} + (y^2 - x^2)\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

då f är en godtycklig deriverbar funktion av en variabel.

Vi har att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} f\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big) = \{\,\text{Kedjeregeln}\,\}\\
&= f'\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\\
&= f'\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\cdot\frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot(2x+0)}{(x^2+y^2)^2}\\
&= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\,f'\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big),\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} f\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big) = \{\,\text{Kedjeregeln}\,\}\\
&= f'\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\\
&= f'\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\cdot\frac{-x}{(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\\
&= -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,f'\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big).
\end{aligned}$$

Differentialekvationen blir då

$$\begin{aligned}
2xy\,\frac{\partial z}{\partial x} + (y^2-x^2)\,\frac{\partial z}{\partial y} &= 2xy\cdot\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}f'\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\\
&\quad + (y^2-x^2)\cdot\Big(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,f'\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\Big)\\
&= \Big(\frac{2xy(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\Big)f'\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big) = 0.
\end{aligned}$$

423 Visa att $z = \dfrac{1}{\sqrt{y}}e^{-x^2/4y}$ satisfierar $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Genom att derivera får vi att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-x^2/4y}\Big) = \frac{1}{\sqrt{y}}e^{-x^2/4y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{x^2}{4y}\Big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{y}}e^{-x^2/4y}\cdot\Big(-\frac{2x}{4y}\Big) = -\frac{x}{2y^{3/2}}e^{-x^2/4y},\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{x}{2y^{3/2}}e^{-x^2/4y}\Big)\\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{2y^{3/2}}\Big)\cdot e^{-x^2/4y} - \frac{x}{2y^{3/2}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\big(e^{-x^2/4y}\big)\\
&= -\frac{1}{2y^{3/2}}\,e^{-x^2/4y} - \frac{x}{2y^{3/2}}\cdot e^{-x^2/4y}\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{x^2}{4y}\Big)\\
&= -\frac{1}{2y^{3/2}}\,e^{-x^2/4y} - \frac{x}{2y^{3/2}}\cdot e^{-x^2/4y}\cdot\Big(-\frac{2x}{4y}\Big)\\
&= \Big(-\frac{1}{2y^{3/2}} - \frac{x^2}{4y^{5/2}}\Big)\,e^{-x^2/4y}\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{\sqrt{y}}\,e^{-x^2/4y}\Big)\\
&= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{\sqrt{y}}\Big)\cdot e^{-x^2/4y} + \frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\big(e^{-x^2/4y}\big)\\
&= -\frac{1}{2y^{3/2}}\,e^{-x^2/4y} + \frac{1}{\sqrt{y}}\,e^{-x^2/4y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{x^2}{4y}\Big)\\
&= -\frac{1}{2y^{3/2}}\,e^{-x^2/4y} + \frac{1}{\sqrt{y}}\,e^{-x^2/4y}\cdot\frac{x^2}{4y^2}\\
&= \Big(-\frac{1}{2y^{3/2}} - \frac{x^2}{4y^{5/3}}\Big)\,e^{-x^2/4y}.
\end{aligned}$$

och då ser vi direkt att

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

426 Låt $z = (x^2 - y^2)\arctan\frac{y}{x} + xy\ln(x^2+y^2)$. Beräkna $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Vi får att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big((x^2-y^2)\arctan\frac{y}{x}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(xy\ln(x^2+y^2)\Big)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2)\cdot\arctan\frac{y}{x} + (x^2-y^2)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x}\\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x}(xy)\cdot\ln(x^2+y^2) + xy\cdot\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2+y^2)\\
&= 2x\cdot\arctan\frac{y}{x} + (x^2-y^2)\cdot\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{y}{x}\Big)\\
&\quad + y\cdot\ln(x^2+y^2) + xy\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)\\
&= 2x\cdot\arctan\frac{y}{x} + (x^2-y^2)\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\Big(-\frac{y}{x^2}\Big)\\
&\quad + y\cdot\ln(x^2+y^2) + \frac{xy}{x^2+y^2}\cdot 2x\\
&= 2x\arctan\frac{y}{x} - \frac{x^2y-y^3}{x^2+y^2} + y\cdot\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}\\
&= 2x\arctan\frac{y}{x} + \frac{(x^2+y^2)y}{x^2+y^2} + y\ln(x^2+y^2)\\
&= 2x\arctan\frac{y}{x} + y + y\ln(x^2+y^2),\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(2x\arctan\frac{y}{x}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}y + \frac{\partial}{\partial x}\Big(y\ln(x^2+y^2)\Big)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}(2x)\cdot\arctan\frac{y}{x} + 2x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x}\\
&\quad + 0 + y\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)\\
&= 2\cdot\arctan\frac{y}{x} + 2x\cdot\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{y}{x}\Big) + \frac{y}{x^2+y^2}\cdot 2x\\
&= 2\arctan\frac{y}{x} + 2x\cdot\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\Big(-\frac{y}{x^2}\Big) + \frac{2xy}{x^2+y^2}\\
&= 2\arctan\frac{y}{x} - \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2}\\
&= 2\arctan\frac{y}{x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big((x^2-y^2)\arctan\frac{y}{x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(xy\ln(x^2+y^2)\Big)\\
&= \frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2)\cdot\arctan\frac{y}{x} + (x^2-y^2)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\arctan\frac{y}{x}\\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}(xy)\cdot\ln(x^2+y^2) + xy\cdot\frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2+y^2)\\
&= -2y\cdot\arctan\frac{y}{x} + (x^2-y^2)\cdot\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{x}\Big)\\
&\quad + x\cdot\ln(x^2+y^2) + xy\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\\
&= -2y\arctan\frac{y}{x} + (x^2-y^2)\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{1}{x}\\
&\quad + x\ln(x^2+y^2) - \frac{xy}{x^2+y^2}\cdot 2y\\
&= -2y\arctan\frac{y}{x} - \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} + x\ln(x^2+y^2) - \frac{2xy^2}{x^2+y^2}\\
&= -2y\arctan\frac{y}{x} - \frac{x(x^2+y^2)}{x^2+y^2} + x\ln(x^2+y^2)\\
&= -2y\arctan\frac{y}{x} - x + x\ln(x^2+y^2),\\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(-2y\arctan\frac{y}{x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}(-x) + \frac{\partial}{\partial y}\big(x\ln(x^2+y^2)\big)\\
&= \frac{\partial}{\partial y}(-2y)\cdot\arctan\frac{y}{x} - 2y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\arctan\frac{y}{x}\\
&\quad + 0 + x\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\\
&= -2\arctan\frac{y}{x} - 2y\cdot\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{x}\Big) + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot 2y\\
&= -2\arctan\frac{y}{x} - 2y\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{2xy}{x^2+y^2}\\
&= -2\arctan\frac{y}{x} - \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2} = -2\arctan\frac{y}{x}.
\end{aligned}$$

Alltså är

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\arctan\frac{y}{x} - 2\arctan\frac{y}{x} = 0.$$

430 Visa att funktionen $f(x,y)=\cos(x-y)\cdot\cosh(x+y)$ satisfierar differentialekvationen
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

Eftersom
$$\begin{aligned}\mathrm{D}\cosh x&=\mathrm{D}\,\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x,\\ \mathrm{D}\sinh x&=\mathrm{D}\,\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x,\end{aligned}$$
så får vi att
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\cos(x-y)\cdot\cosh(x+y)+\cos(x-y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\cosh(x+y)\\ &=-\sin(x-y)\cdot\cosh(x+y)+\cos(x-y)\cdot\sinh(x+y),\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}&=-\frac{\partial}{\partial x}\sin(x-y)\cdot\cosh(x+y)-\sin(x-y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\cosh(x+y)\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial x}\cos(x-y)\cdot\sinh(x+y)+\cos(x-y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\sinh(x+y)\\ &=-\cos(x-y)\cdot\cosh(x+y)-\sin(x-y)\cdot\sinh(x+y)\\ &\quad-\sin(x-y)\cdot\sinh(x+y)+\cos(x-y)\cdot\cosh(x+y)\\ &=-2\sin(x-y)\cdot\sinh(x+y),\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\cos(x-y)\cdot\cosh(x+y)+\cos(x-y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\cosh(x+y)\\ &=-\sin(x-y)\cdot(-1)\cdot\cosh(x+y)+\cos(x-y)\cdot\sinh(x+y)\\ &=\sin(x-y)\cdot\cosh(x+y)+\cos(x-y)\cdot\sinh(x+y),\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\sin(x-y)\cdot\cosh(x+y)+\sin(x-y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\cosh(x+y)\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial y}\cos(x-y)\cdot\sinh(x+y)+\cos(x-y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\sinh(x+y)\\ &=\cos(x-y)\cdot(-1)\cdot\cosh(x+y)+\sin(x-y)\cdot\sinh(x+y)\\ &\quad-\sin(x-y)\cdot(-1)\cdot\sinh(x+y)+\cos(x-y)\cdot\cosh(x+y)\\ &=2\sin(x-y)\cdot\sinh(x+y).\end{aligned}$$

Därmed är
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2\sin(x-y)\sinh(x+y)+2\sin(x-y)\sinh(x+y)=0.$$

433 Låt f vara en två gånger deriverbar funktion av typen $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$. Sätt $z(x,y)=xf(x+2y)$. Visa att $z''_{xx}-z''_{xy}+\frac{1}{4}z''_{yy}=0$.

Vi får att
$$\begin{aligned}z'_x&=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\big(xf(x+2y)\big)=1\cdot f(x+2y)+x\cdot\frac{\partial}{\partial x}f(x+2y)\\ &=f(x+2y)+x\cdot f'(x+2y)\,\frac{\partial}{\partial x}(x+2y)\\ &=f(x+2y)+xf'(x+2y)\cdot 1,\\ z''_{xx}&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(f(x+2y)\Big)+\frac{\partial}{\partial x}\Big(xf'(x+2y)\Big)\\ &=f'(x+2y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x+2y)+1\cdot f'(x+2y)+x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\,f'(x+2y)\\ &=f'(x+2y)\cdot 1+f'(x+2y)+x\cdot f''(x+2y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x+2y)\\ &=2f'(x+2y)+xf''(x+2y),\\ z''_{xy}&=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}f(x+2y)+\frac{\partial}{\partial y}\big(xf'(x+2y)\big)\\ &=f'(x+2y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x+2y)+xf''(x+2y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x+2y)\\ &=2f'(x+2y)+2xf''(x+2y),\\ z'_y&=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\big(xf(x+2y)\big)\\ &=xf'(x+2y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x+2y)=2xf'(x+2y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z''_{yy} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\big(2xf'(x+2y)\big) \\ &= 2xf''(x+2y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x+2y) = 4xf''(x+2y). \end{aligned}$$

Alltså är

$$\begin{aligned} &z''_{xx} - z''_{xy} + \tfrac{1}{4}z''_{yy} \\ &\qquad = 2f'(x+2y) + xf''(x+2y) - 2f'(x+2y) \\ &\qquad\quad - 2xf''(x+2y) + xf''(x+2y) \\ &\qquad = (2-2)f'(x+2y) + (x-2x+x)f''(x+2y) = 0. \end{aligned}$$

439 Bestäm riktningsderivatan av funktionen $f(x,y,z) = x\arctan\dfrac{y}{z}$ i punkten $(1,2,2)$ i riktning mot origo.

Riktningsderivatan av en differentierbar funktion f i en viss riktning $\boldsymbol{e}$ ges av

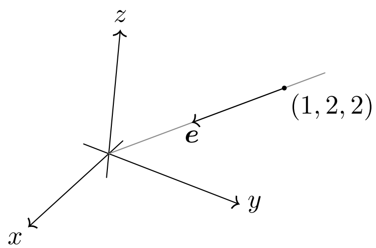
$$f'_{\boldsymbol{e}}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)\cdot\boldsymbol{e}, \qquad (*)$$

där ∇f är gradienten till f och $\boldsymbol{e}$ är enhetsvektor.

Eftersom f är uppbyggd av elementära funktioner och definierad i punkten $(1,2,2)$ är f differentierbar i punkten.

I vårt fall ska vi välja $\boldsymbol{e}$ som riktningen hos vektorn från $P=(1,2,2)$ till origo $O=(0,0,0)$, d.v.s.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e} &= \frac{\overrightarrow{PO}}{\|\overrightarrow{PO}\|} = \frac{(0-1,0-2,0-2)}{\|(0-1,0-2,0-2)\|} \\ &= \frac{(-1,-2,-2)}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-2)^2}} \\ &= \frac{(-1,-2,-2)}{3} = \left(-\tfrac{1}{3},-\tfrac{2}{3},-\tfrac{2}{3}\right) \end{aligned}$$



Gradienten till f är

$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\Big),$$

där partialderivatorna är

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(x\arctan\frac{y}{z}\Big) = \arctan\frac{y}{z}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(x\arctan\frac{y}{z}\Big) = x\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{z}\right)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{z}\Big) \\ &= \frac{x}{1+\left(\frac{y}{z}\right)^2}\cdot\frac{1}{z} = \frac{xz}{y^2+z^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\Big(x\arctan\frac{y}{z}\Big) = x\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{z}\right)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{y}{z}\Big) \\ &= \frac{x}{1+\left(\frac{y}{z}\right)^2}\cdot\Big(-\frac{y}{z^2}\Big) = -\frac{xy}{y^2+z^2}. \end{aligned}$$

Vi har alltså att

$$\nabla f(x,y,z) = \Big(\arctan\frac{y}{z}, \frac{xz}{y^2+z^2}, -\frac{xy}{y^2+z^2}\Big)$$

och speciellt

$$\nabla f(1,2,2) = \Big(\arctan\frac{2}{2}, \frac{1\cdot 2}{2^2+2^2}, -\frac{1\cdot 2}{2^2+2^2}\Big) = \left(\tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}\right).$$

Riktningsderivatan i punkten $(1,2,2)$ i riktningen $\boldsymbol{e} = \left(-\tfrac{1}{3},-\tfrac{2}{3},-\tfrac{2}{3}\right)$ blir därmed

$$\begin{aligned} f'_{\boldsymbol{e}}(1,2,2) &= \nabla f(1,2,2)\cdot\boldsymbol{e} = \left(\tfrac{1}{4}\pi,\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{4}\right)\cdot\left(-\tfrac{1}{3},-\tfrac{2}{3},-\tfrac{2}{3}\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\pi\cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right) + \tfrac{1}{4}\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right) + \left(-\tfrac{1}{4}\right)\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right) = -\tfrac{1}{12}\pi. \end{aligned}$$

440 Låt $z(x,y) = 3\arctan e^{2x-3y} - 10\ln(2+x^2y)$. Beräkna riktningsderivatan av z i $P=(3,2)$ i riktning mot $Q=(11,-4)$.

Funktionen $z(x,y)$ har i punkten $P=(3,2)$ och riktningen $\overrightarrow{PQ} = (11-3,-4-2) = (8,-6)$ derivatan

$$z'_{\boldsymbol{e}}(3,2) = \nabla z(3,2)\cdot \boldsymbol{e}.$$

om z är differentierbar i $(3,2)$.

Eftersom z är uppbyggd av elementära funktioner och definierad i punkten P är z differentierbar där.

Vektorn $\boldsymbol{e}$ är enhetsvektorn i $\overrightarrow{PQ}$-riktningen, d.v.s.

$$\boldsymbol{e} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{(8,-6)}{\sqrt{8^2+(-6)^2}} = \tfrac{1}{\sqrt{100}}(8,-6) = \big(\tfrac{4}{5},-\tfrac{3}{5}\big).$$

Gradienten ∇z har komponenterna

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(3\arctan e^{2x-3y}\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(10\ln(2+x^2y)\Big)\\
&= \frac{\partial}{\partial\,\Box}\Big(3\arctan e^{2x-3y}\Big)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\,e^{2x-3y} - \frac{\partial}{\partial\,\Box}\Big(10\ln(2+x^2y)\Big)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(2+x^2y)\\
&= \frac{3}{1+\big(e^{2x-3y}\big)^2}\cdot 2\,e^{2x-3y} - \frac{10}{2+x^2y}\cdot 2xy\\
&= \frac{6\,e^{2x-3y}}{1+e^{4x-6y}} - \frac{20xy}{2+x^2y},\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(3\arctan e^{2x-3y}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(10\ln(2+x^2y)\Big)\\
&= \frac{\partial}{\partial\,\Box}\Big(3\arctan e^{2x-3y}\Big)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\,e^{2x-3y} - \frac{\partial}{\partial\,\Box}\Big(10\ln(2+x^2y)\Big)\\
&= \frac{3}{1+\big(e^{2x-3y}\big)^2}\cdot(-3e^{2x-3y}) - \frac{10}{2+x^2y}\cdot x^2\\
&= -\frac{9e^{2x-3y}}{1+e^{4x-6y}} - \frac{10x^2}{2+x^2y}.
\end{aligned}$$

I punkten $P=(3,2)$ har dessa partialderivator värdet

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}(3,2) &= \Big(\frac{6e^{2x-3y}}{1+e^{4x-6y}} - \frac{20xy}{2+x^2y}\Big)\Big|_{\substack{x=3\\y=2}}\\
&= \frac{6e^{2\cdot3-3\cdot2}}{1+e^{4\cdot3-6\cdot2}} - \frac{20\cdot3\cdot2}{2+3^2\cdot2} = \frac{6}{1+1} - \frac{120}{20} = -3,\\
\frac{\partial z}{\partial y}(3,2) &= \Big(-\frac{9e^{2x-3y}}{1+e^{4x-6y}} - \frac{10x^2}{2+x^2y}\Big)\Big|_{\substack{x=3\\y=2}}\\
&= -\frac{9e^{2\cdot3-3\cdot2}}{1+e^{4\cdot3-6\cdot2}} - \frac{10\cdot3^2}{2+3^2\cdot2} = -\frac{9}{1+1} - \frac{90}{20} = -9.
\end{aligned}$$

Alltså är $\nabla z(3,2) = (-3,-9)$ och vi får att riktningsderivatan är

$$\begin{aligned}
z'_{\boldsymbol{e}}(3,2) &= \nabla z(3,2)\cdot\boldsymbol{e} = (-3,-9)\cdot\big(\tfrac{4}{5},-\tfrac{3}{5}\big)\\
&= (-3)\cdot\tfrac{4}{5} + (-9)\cdot\big(-\tfrac{3}{5}\big) = 3.
\end{aligned}$$

441 Bestäm riktningsderivatan av funktionen $f(x,y,z) = x^{2y}+yz$ i punkten $(1,1,1)$ i riktning av vektorn $\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

Funktionen f har partialderivatorna

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\big(x^{2y}+yx\big) = 2y\,x^{2y-1},\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\big(x^{2y}+yz\big) = \frac{\partial}{\partial y}\big(e^{2y\ln x}+yz\big) = e^{2y\ln x}\cdot 2\ln x + z\\
&= x^{2y}\cdot 2\ln x + z,\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\big(x^{2y}+yz\big) = y,
\end{aligned}$$

och de är kontinuerliga i närheten av $(x,y,z)=(1,1,1)$ eftersom partialderivatorna är uppbyggda av elementära funktioner och uttrycken är definierade i $(1,1,1)$. Funktionen f är därmed differentierbar i punkten och riktningsderivatan ges av

$$\begin{aligned}
f'_{\boldsymbol{v}}(1,1,1) &= \nabla f(1,1,1)\cdot\boldsymbol{v} = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1), \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)\Big)\cdot\boldsymbol{v}\\
&= \big(2\cdot1\cdot1^{2\cdot1-1}, 1^{2\cdot1}\cdot 2\ln 1 + 1, 1\big)\cdot\tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{3}}(2,1,1)\cdot(1,1,1) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\big(2\cdot1+1\cdot1+1\cdot1\big) = \tfrac{4}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

443 Bestäm derivatan av funktionen f given av $f(x,y,z) = (xy)^{yz}$ i punkten $A = (1,2,3)$ i riktning mot $B = (2,4,5)$.

Vi har att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= yz(xy)^{yz-1} \cdot y = y^2 z (xy)^{yz-1},\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} e^{yz\ln(xy)} = e^{yz\ln(xy)} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\bigl(yz\ln(xy)\bigr)\\
&= (xy)^{yz}\Bigl(z\ln(xy) + yz \cdot \frac{1}{xy} \cdot x\Bigr) = (xy)^{yz}\bigl(z\ln(xy) + z\bigr),\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} e^{yz\ln(xy)} = e^{yz\ln(xy)} \cdot y\ln(xy) = (xy)^{yz} \cdot y\ln(xy).
\end{aligned}$$

Partialderivatorna är uppbyggda av elementära funktioner och de är definierade i punkten $(1,2,3)$ så partialderivatorna är kontinuerliga kring punkten och då är f differentierbar i punkten.

Riktningsderivatan av f i riktningen $\overrightarrow{AB}$ ges av

$$\begin{aligned}
f_{\overrightarrow{AB}}(1,2,3) &= \nabla f(1,2,3) \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\\
&= \Bigl(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3), \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3)\Bigr) \cdot \frac{B-A}{\|B-A\|}\\
&= \bigl(2^2 \cdot 3 \cdot (1\cdot 2)^{2\cdot 3-1}, (1\cdot 2)^{2\cdot 3} \cdot (3\ln(1\cdot 2) + 3),\\
&\qquad (1\cdot 2)^{2\cdot 3} \cdot 2\ln(1\cdot 2)\bigr) \cdot \frac{(2-1, 4-2, 5-3)}{\sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2 + (5-3)^2}}\\
&= \bigl(384, 192\ln 2 + 192, 128\ln 2\bigr) \cdot \tfrac{1}{3}(1,2,2)\\
&= \tfrac{1}{3}\bigl(384 \cdot 1 + (192\ln 2 + 192) \cdot 2 + 2 \cdot 128\ln 2\bigr)\\
&= \tfrac{1}{3}(768 + 640\ln 2) = 256 + \frac{640}{3}\ln 2.
\end{aligned}$$

446 Låt $f(x,y)$ vara en differentierbar funktion och $\boldsymbol{v} = (a,b)$ samt $\boldsymbol{s} = (b,-a)$ två enhetsvektorer. Visa att $(f'_{\boldsymbol{s}})^2 + (f'_{\boldsymbol{v}})^2 = (f'_x)^2 + (f'_y)^2$.

Eftersom f är differentierbar och $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{s}$ är enhetsvektorer så är

$$\begin{aligned}
f'_{\boldsymbol{v}} &= \nabla f \cdot \boldsymbol{v} = \bigl(f'_x, f'_y\bigr) \cdot (a,b) = af'_x + bf'_y,\\
f'_{\boldsymbol{s}} &= \nabla f \cdot \boldsymbol{s} = \bigl(f'_x, f'_y\bigr) \cdot (b,-a) = bf'_x - af'_y.
\end{aligned}$$

Vi får därför att

$$\begin{aligned}
(f'_{\boldsymbol{v}})^2 + (f'_{\boldsymbol{s}})^2 &= \bigl(af'_x + bf'_y\bigr)^2 + \bigl(bf'_x - af'_y\bigr)^2\\
&= a^2(f'_x)^2 + 2abf'_xf'_y + b^2(f'_y)^2 + b^2(f'_x)^2 - 2abf'_xf'_y + a^2(f'_y)^2\\
&= (a^2+b^2)(f'_x)^2 + (a^2+b^2)(f'_y)^2.
\end{aligned}$$

Eftersom $\boldsymbol{v}$ är en enhetsvektor är

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 = a^2 + b^2 = 1,$$

vilket ger att

$$(f'_{\boldsymbol{v}})^2 + (f'_{\boldsymbol{s}})^2 = (f'_x)^2 + (f'_y)^2.$$

448 Om $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ och $(x,y) \neq (0,0)$ samt $f(0,0) = 0$. Visa att f är deriverbar, men att $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(0,0)$ inte existerar om $\boldsymbol{s} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$.

Funktionen f är deriverbar i origo om partialderivatorna

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

existerar. Eftersom f är definierat av ett elementärt uttryck som är odefinierat i origo (varför man givit en separat definition av f där) så följer det inte automatiskt att f är deriverbar.

För att avgöra om partialderivatorna existerar i origo undersöker vi derivatans definition. Partialderivatan $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ är definierad om gränsvärdet

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$

existerar. Vi har att

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h\cdot 0}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Detta visar att $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existerar och är lika med 0 i origo. På motsvarande sätt har vi att

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{0\cdot h}{0^2+h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

existerar och är lika med 0. Funktionen f är alltså deriverbar i origo.

Riktningsderivatan av f i origo i riktningem $\boldsymbol{s} = (s_x, s_y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ defineras som

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+s_x h, 0+s_y h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\frac{h}{\sqrt{2}}\cdot\frac{h}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^2/2}{h^2/2+h^2/2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}\end{aligned}$$

och eftersom detta gränsvärde inte existerar är denna riktningsderivata inte definierad.

601 Bestäm alla singulära punkter på parameterkurvan

a) $x = 2t + t^2,$
$y = t - t^2$

b) $x = \cos 2t,$
$y = \cos t.$

En parameterkurva har singulära punkter där

1. $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ inte är kontinuerlig, eller
2. $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{0}$.

Eftersom båda parameterkurvorna ges av elementära funktioner (polynom respektive trigonometriska funktioner) så existerar derivatan $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ överallt och är kontinuerlig, och fall 1 inträffar inte. Vi behöver alltså bara undersöka fall 2.

a) Riktningsvektorn $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ är nollvektorn då

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = (2+2t, 1-2t) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2+2t &= 0 \\ 1-2t &= 0 \end{aligned}$$

Detta ekvationssystem saknar lösning (första ekvationen ger $t = -1$ vilket inte uppfyller den andra ekvationen) vilket betyder att kurvan saknar singulära punkter.

b) Riktningsvektorn $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ lika med nollvektorn ger

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = (-2\sin 2t, -\sin t) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \sin 2t &= 0 \\ \sin t &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2\sin t\cos t &= 0 \\ \sin t &= 0 \end{aligned}$$

Vi har alltså singulära punkter när $t = n\pi$ för något heltal. Dessa parametervärden svarar mot punkterna

n udda: $\boldsymbol{r}(n\pi) = (\cos n\pi, \cos 2n\pi) = (-1,1),$
n jämn: $\boldsymbol{r}(n\pi) = (\cos n\pi, \cos 2n\pi) = (1,1).$

Därmed är $(1,1)$ och $(-1,1)$ singulära punkter på kurvan.

614 Bestäm ekvationen för tangentplanet till den hyperboliska paraboloiden $z = x^2 - 4y^2$ i punkten $(1, -1, -3)$.

För att bestämma tangentplanet behöver vi en punkt $\boldsymbol{r}_0$ i planet och planets normalvektor $\boldsymbol{n}$.

Som punkt i planet väljer vi tangeringspunkten $\boldsymbol{r}_0 = (1, -1, -3)$. Genom att skriva om paraboloidens ekvation som

$$z - x^2 + 4y^2 = 0$$

ser vi att paraboloiden är 0-nivåytan till funktionen

$$g(x, y, z) = z - x^2 + 4y^2.$$

Funktionen g:s 0-nivåyta har i punkten $(1, -1, -3)$ normalvektorn

$$\begin{aligned}\nabla g(1,-1,-3) &= \Bigl(\frac{\partial g}{\partial x}(1,-1,-3), \frac{\partial g}{\partial y}(1,-1,-3), \frac{\partial g}{\partial z}(1,-1,-3)\Bigr)\\ &= \bigl(-2x, 8y, 1\bigr)\Big|_{\substack{x=1\\y=-1\\z=-3}} = (-2,-8,1).\end{aligned}$$

Denna normalvektor är också normalvektor till tangentplanet, så vi sätter $\boldsymbol{n} = (-2, -8, 1)$. Tangentplanet har då ekvationen

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (-2,-8,1)\cdot\bigl((x,y,z)-(1,-1,-3)\bigr) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad (-2,-8,1)\cdot(x-1, y+1, z+3) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad -2(x-1) - 8(y+1) + (z+3) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad -2x - 8y + z = 3.\end{aligned}$$

615 Bestäm ekvationen för tangentplanet till $x^3 - xyz + yz^2 - z^3 = 0$ i punkten $(1, 1, 1)$.

Vi behöver en punkt $\boldsymbol{r}_0$ i planet och en normalvektor $\boldsymbol{n}$ till planet för att bestämma planets ekvation.

Vi väljer tangeringspunkten som punkt i planet $\boldsymbol{r}_0 = (1, 1, 1)$. Om vi sätter

$$g(x, y, z) = x^3 - xyz + yz^2 - z^3$$

så ser vi att ytan i uppgiftstexten är 0-nivåytan till g. I punkten $(1, 1, 1)$ har därför ytan normalvektorn

$$\begin{aligned}\nabla g(1,1,1) &= \Bigl(\frac{\partial g}{\partial x}(1,1,1), \frac{\partial g}{\partial y}(1,1,1), \frac{\partial g}{\partial z}(1,1,1)\Bigr)\\ &= \bigl(3x^2 - yz, -xz + z^2, -xy + 2yz - 3z^2\bigr)\Big|_{x=y=z=1} = (2,0,-2).\end{aligned}$$

Vektorn $(2, 0, -2)$ är även normalvektor till tangentplanet. Sätt därför $\boldsymbol{n} = (2, 0, -2)$. Tangentplanets ekvation blir alltså

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (2,0,-2)\cdot\bigl((x,y,z)-(1,1,1)\bigr) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad (2,0,-2)\cdot(x-1, y-1, z-1) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad 2(x-1) - 2(z-1) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad x - z = 0.\end{aligned}$$

622 Visa att planet $2x + 2y - 3z = 2$ tangerar ytan $2x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 4$.

Tangeringspunkten tillhör både planet och ytan, och uppfyller därför bådas ekvationer

$$2x + 2y - 3z = 2, \tag{1}$$

$$2x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 4. \tag{2}$$

I tangeringspunkten ska dessutom planets normal $(2, 2, -3)$ vara parallell med ytans normal som ges av

$$\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\bigl(2x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 4\bigr), \frac{\partial}{\partial y}\bigl(2x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 4\bigr),$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\bigl(2x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 4\bigr)\Bigr) = (4x, 4y - 6z),$$

d.v.s. det ska finnas en skalär α så att

$$\alpha(2, 2, -3) = (4x, 4y, -6z),$$

eller utskrivet i komponenter

$$2\alpha = 4x, \tag{3}$$
$$2\alpha = 4y, \tag{4}$$
$$-3\alpha = -6z. \tag{5}$$

Vi ska alltså bestämma alla punkter (x, y, z) som uppfyller ekvation (1) till (5). Från (3), (4) och (5) får vi att

$$x = \tfrac{1}{2}\alpha, \quad y = \tfrac{1}{2}\alpha, \quad z = \tfrac{1}{2}\alpha,$$

d.v.s. $x = y = z$. Detta insatt i (1) ger

$$2x + 2x - 3x = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 2,$$

vilket betyder att $y = z = 2$. Vi måste även kontrollera att (2) är uppfylld, d.v.s.

$$2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2^2 = 2^2 = 4.$$

Alltså tangerar planet $2x+2y-3z = 2$ ytan $2x^2+2y^2-3z^2 = 4$ i punkten $(2, 2, 2)$.

624 Bestäm konstanten a så att planet $a+y+z = 2x$ tangerar sfären $x^2+y^2+z^2 = 2x$.

En tangeringspunkt måste tillhöra planet och sfären. Den uppfyller således bådas ekvationer,

$$a + y + z = 2x, \tag{1}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x. \tag{2}$$

Planet och sfären måste också ha parallella normalvektorer i tangeringspunkten. Planets normalvektor kan vi direkt avläsa från planets ekvation $(-2, 1, 1)$ (flytta över x i vänsterledet). Sfärens normalvektor ges av

$$\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\bigl(x^2 - 2x + y^2 + z^2\bigr), \frac{\partial}{\partial y}\bigl(x^2 - 2x + y^2 + z^2\bigr),$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\bigl(x^2 - 2x + y^2 + z^2\bigr)\Bigr) = (2x - 2, 2y, 2z).$$

I tangeringspunkten ska det alltså finnas en skalär λ så att

$$\lambda\,(-2, 1, 1) = (2x - 2, 2y, 2z),$$

d.v.s.

$$-2\lambda = 2x - 2, \tag{3}$$
$$\lambda = 2y, \tag{4}$$
$$\lambda = 2z. \tag{5}$$

Från (3), (4) och (5) får vi att

$$x = -\lambda + 1, \quad y = \lambda/2, \quad z = \lambda/2,$$

d.v.s. $x = -2y + 1$, $z = y$. Detta insatt i (1) och (2) ger

$$a + y + y = 2(-2y + 1)$$
$$(-2y + 1)^2 + y^2 + y^2 = 2(-2y + 1)$$

vilket ger

$$a + 6y = 2, \tag{6}$$
$$6y^2 - 1 = 0. \tag{7}$$

Från (7) får vi att $y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ vilket ger två möjliga a-värden

$$a = 2 - 6y = 2 - 6\,\tfrac{1}{\sqrt{6}} = 2 - \sqrt{6},$$
$$a = 2 - 6y = 2 - 6\,\bigl(-\tfrac{1}{\sqrt{6}}\bigr) = 2 + \sqrt{6}.$$

Avsnitt 4, Matriser

W214 Beräkna AB då

a) $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, och

b) $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Först måste vi försäkra oss om att matrismultiplikationen verkligen går att utföra. För att det ska gå måste antalet kolumner i den första matrisen vara lika med antalet rader i den andra matrisen. Om vi skriver matrisernas storlekar under matriserna i produkten,

$$\underset{2\times 2}{A}\quad \underset{2\times 2}{B}$$

så ska alltså de inre indexen vara lika, vilket de är i detta fall. Produktmatrisen kommer har samma storlek som de yttre indexen

$$\underset{2\times 2}{A}\quad \underset{2\times 2}{B}$$

d.v.s. 2×2.

a) Matrismultiplikationen går till som så att rader i den första matrisen multipliceras med kolumner i den andra matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$(1,1)$-elementet i produktmatrisen är produkten av rad 1 och kolumn 1,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 8 + 2\cdot 6 & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

De övriga elementen får vi genom att multiplicera ihop raden som har sammar radnummer som elementet med kolumnen som har samma kolumnnummer som elementet

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 1\cdot 7 + 2\cdot 5 \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 17 \\ 3\cdot 8 + 4\cdot 6 & \square \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 17 \\ 48 & 3\cdot 7 + 4\cdot 5 \end{pmatrix}$$

Alltså är

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 17 \\ 48 & 41 \end{pmatrix}.$$

c) Matrisprodukten räknar vi ut på samma sätt som i a-uppgiften

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 4 + 3\cdot(-1) & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & (-1)\cdot(-1) + 3\cdot(-3) \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 5\cdot 4 + 2\cdot(-1) & \square \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 18 & 5\cdot(-1) + 2\cdot(-3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 18 & -11 \end{pmatrix}$$

W215

a) Beräkna $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Visa att för matriserna $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ är endast den ena av de båda möjliga produkterna definierade. Beräkna denna.

a) Den vänstra matrisen har storleken 1×3 och den högra 3×2. Matrismultiplikationen är alltså möjlig eftersom antal rader i den vänstra matrisen är lika med antal kolumner i den högra matrisen. De inre indexen

$$1\times \underbrace{3\quad 3}\times 2$$

överensstämmer. Produkten har samma storlek som de yttre indexen

$$\underbrace{1\times 3\quad 3\times 2}$$

d.v.s. 1×2. Vi får produktmatrisen genom att multiplicera raden med kolumnerna,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3\\ 2 & -3\\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 0+(-1)\cdot 2+(-4)\cdot(-1) & \quad \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3\\ 2 & -3\\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & 2\cdot 3+(-1)\cdot(-3)+(-4)\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3\\ 2 & -3\\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Sätt

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1\\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen A har storleken 2×3 och matrisen B har storleken 1×2. Detta gör att produkten

$$\underset{2\times 3}{A}\;\underset{1\times 2}{B} \quad \text{inte är möjlig,}$$

$$3 \underbrace{\quad}_{\neq} 1$$

medan

$$\underset{1\times 2}{B}\;\underset{2\times 3}{A} \quad \text{är möjlig.}$$

$$2 \underbrace{\quad}_{=} 2$$

Produkten får vi som vanligt genom att multiplicera rader med kolumner,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1\\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 5+1\cdot(-1) & \quad & \quad \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1\\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2\cdot 4+1\cdot 2 & \quad \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1\\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 2\cdot(-1)+1\cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1\\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

W217 Beräkna AB då

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4\\ -2 & 2 & 0\\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3\\ 2 & -2 & 0\\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$,

b) $A = B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1\\ -4 & 5 & 3\\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Eftersom båda matriserna är 3×3 är deras produkt definierad. Vi får produkten genom att multiplicera rader med kolumner,

a)
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4\\ -2 & 2 & 0\\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3\\ 2 & -2 & 0\\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-1)+(-1)\cdot 2+4\cdot(-3) & 3\cdot 4+(-1)\cdot(-2)+4\cdot 1 & 3\cdot 3+(-1)\cdot 0+4\cdot 5\\ (-2)\cdot(-1)+2\cdot 2+0\cdot(-3) & (-2)\cdot 4+2\cdot(-2)+0\cdot 1 & (-2)\cdot 3+2\cdot 0+0\cdot 5\\ 5\cdot(-1)+(-3)\cdot 2+1\cdot(-3) & 5\cdot 4+(-3)\cdot(-2)+1\cdot 1 & 5\cdot 3+(-3)\cdot 0+1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -17 & 18 & 29\\ 6 & -12 & -6\\ -14 & 27 & 20 \end{pmatrix},$$

d)
$$\begin{pmatrix}2&-3&1\\-4&5&3\\-1&4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3&1\\-4&5&3\\-1&4&-2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2\cdot 2+(-3)\cdot(-4)+1\cdot(-1) & 2\cdot(-3)+(-3)\cdot 5+1\cdot 4 & 2\cdot 1+(-3)\cdot 3+1\cdot(-2)\\ (-4)\cdot 2+5\cdot(-4)+3\cdot(-1) & (-4)\cdot(-3)+5\cdot 5+3\cdot 4 & (-4)\cdot 1+5\cdot 3+3\cdot(-2)\\ (-1)\cdot 2+4\cdot(-4)+(-2)\cdot(-1) & (-1)\cdot(-3)+4\cdot 5+(-2)\cdot 4 & (-1)\cdot 1+4\cdot 3+(-2)\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&-17&-9\\-31&49&5\\-16&15&15\end{pmatrix}.$$

W218a Beräkna AB och BA då
$$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&0&5\\6&1&7\end{pmatrix}\quad\text{och}\quad B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\3&-5&2\\-8&-2&1\end{pmatrix}.$$

Vi får
$$AB=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&0&5\\6&1&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&-1\\3&-5&2\\-8&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+3\cdot 3+2\cdot(-8) & 1\cdot 0+3\cdot(-5)+2\cdot(-2) & 1\cdot(-1)+3\cdot 2+2\cdot 1\\ 2\cdot 2+0\cdot 3+5\cdot(-8) & 2\cdot 0+0\cdot(-5)+5\cdot(-2) & 2\cdot(-1)+0\cdot 2+5\cdot 1\\ 6\cdot 2+1\cdot 3+7\cdot(-8) & 6\cdot 0+1\cdot(-5)+7\cdot(-2) & 6\cdot(-1)+1\cdot 2+7\cdot 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-5&-19&7\\-36&-10&3\\-41&-19&3\end{pmatrix},$$
$$BA=\begin{pmatrix}2&0&-1\\3&-5&2\\-8&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&2\\2&0&5\\6&1&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1+0\cdot 2+(-1)\cdot 6 & 2\cdot 3+0\cdot 0+(-1)\cdot 1 & 2\cdot 2+0\cdot 5+(-1)\cdot 7\\ 3\cdot 1+(-5)\cdot 2+2\cdot 6 & 3\cdot 3+(-5)\cdot 0+2\cdot 1 & 3\cdot 2+(-5)\cdot 5+2\cdot 7\\ -8\cdot 1+(-2)\cdot 2+1\cdot 6 & (-8)\cdot 3+(-2)\cdot 0+1\cdot 1 & (-8)\cdot 2+(-2)\cdot 5+1\cdot 7\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-4&5&-3\\5&11&-5\\-6&-23&-19\end{pmatrix}.$$

Notera att $AB\neq BA$. Den kommutativa lagen gäller inte för matrismultiplikation.

W220 Beräkna för matriserna
$$A=\begin{pmatrix}3&1\\-2&4\end{pmatrix}\quad\text{och}\quad B=\begin{pmatrix}-1&5\\3&-2\end{pmatrix}$$

a) $A^2=AA$,

b) $B^2=BB$,

c) $(A+B)^2$,

d) $A^2+2AB+B^2$, och

e) $A^2+AB+BA+B^2$.

f) Jämför resultaten i c-, d- och e-uppgiften.

Matrismultiplikation ger

a)
$$A^2=AA=\begin{pmatrix}3&1\\-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\-2&4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3\cdot 3+1\cdot(-2) & 3\cdot 1+1\cdot 4\\ (-2)\cdot 3+4\cdot(-2) & (-2)\cdot 1+4\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&7\\-14&14\end{pmatrix},$$

b)
$$B^2=BB=\begin{pmatrix}-1&5\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&5\\3&-2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}(-1)\cdot(-1)+5\cdot 3 & (-1)\cdot 5+5\cdot(-2)\\ 3\cdot(-1)+(-2)\cdot 3 & 3\cdot 5+(-2)\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&-15\\-9&19\end{pmatrix},$$

c) $$(A+B)^2 = \left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\right)^2$$
$$= \begin{pmatrix} 3-2 & 1+5 \\ -2+3 & 4-2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2+6\cdot 1 & 2\cdot 6+6\cdot 2 \\ 1\cdot 2+2\cdot 1 & 1\cdot 6+2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 24 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Vi har att
$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-1)+1\cdot 3 & 3\cdot 5+1\cdot(-2) \\ (-2)\cdot(-1)+4\cdot 3 & (-2)\cdot 5+4\cdot(-2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 14 & -18 \end{pmatrix},$$
$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 3+5\cdot(-2) & (-1)\cdot 1+5\cdot 4 \\ 3\cdot 3+(-2)\cdot(-2) & 3\cdot 1+(-2)\cdot 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -13 & 19 \\ 13 & -5 \end{pmatrix},$$

och då är

d) $$A^2+2AB+B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -14 & 14 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 14 & -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & -15 \\ -9 & 19 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 7+2\cdot 0+16 & 7+2\cdot 13-15 \\ -14+2\cdot 14-9 & 14-2\cdot 18+19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 18 \\ 5 & -3 \end{pmatrix},$$
$$A^2+AB+BA+B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -14 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 14 & -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -13 & 19 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} 16 & -15 \\ -9 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+0-13+16 & 7+13+19-15 \\ -14+14+13-9 & 14-18-5+19 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 10 & 24 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

f) Från c- och d-uppgiften ser vi att
$$(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2,$$
d.v.s. den vanliga kvadreringsregeln gäller inte, utan kvadreringsregeln för matriser blir
$$(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2,$$
just p.g.a. att $AB \neq BA$ i allmänhet.

W221a Beräkna AB och BA då
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen A har storleken 3×2 och B är 2×3. Produkten AB,
$$\underbrace{\underset{3\times 2}{A}\quad\underset{2\times 3}{B}}$$
har därför storleken 3×3. Matrisen BA,
$$\underbrace{\underset{2\times 3}{B}\quad\underset{3\times 2}{A}}$$
får storleken 2×2. Rader multiplicerat med kolumner ger
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 2+(-2)\cdot 1 & 1\cdot(-1)+(-2)\cdot 1 & 1\cdot 0+(-2)\cdot 1 \\ 2\cdot 2+(-4)\cdot 1 & 2\cdot(-1)+(-4)\cdot 1 & 2\cdot 0+(-4)\cdot 1 \\ (-3)\cdot 2+6\cdot 1 & (-3)\cdot(-1)+6\cdot 1 & (-3)\cdot 0+6\cdot 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -4 \\ 0 & 9 & 6 \end{pmatrix},$$
$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1+(-1)\cdot 2+0\cdot(-3) & 2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-4)+0\cdot 6 \\ 1\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot(-3) & 1\cdot(-2)+1\cdot(-4)+1\cdot 6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

W223 Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Beräkna var för sig matriserna $(AB)C$ och $A(BC)$.

Vi har

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot 2 & 1\cdot 3 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 4 + 4\cdot 2 & 3\cdot 3 + 4\cdot 1 \\ 0\cdot 4 + 1\cdot 2 & 0\cdot 3 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \\
(AB)C &= \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8\cdot 1 + 5\cdot 2 & 8\cdot 0 + 5\cdot 3 \\ 20\cdot 1 + 13\cdot 2 & 20\cdot 0 + 13\cdot 3 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 2\cdot 0 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \\
BC &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4\cdot 1 + 3\cdot 2 & 4\cdot 0 + 3\cdot 3 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 2\cdot 0 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \\
A(BC) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\cdot 10 + 2\cdot 4 & 1\cdot 9 + 2\cdot 3 \\ 3\cdot 10 + 4\cdot 4 & 3\cdot 9 + 4\cdot 3 \\ 0\cdot 10 + 1\cdot 3 & 0\cdot 9 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Vi ser alltså att $(AB)C = A(BC)$. Denna likhet gäller i allmänhet och kallas för den associativa lagen.

W225 Visa att för matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

gäller $AX = XA = E$, där E är enhetsmatrisen av ordning 2.

Matrismultiplikation ger

$$\begin{aligned}
AX &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\cdot \frac{1}{3} + 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) & 1\cdot(-1) + 2\cdot\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} + 3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) & \frac{1}{2}\cdot(-1) + 3\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

vilket visar att $AX = XA = E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Matriserna A och X är alltså varandras inverser.

W227b Visa att matrisen $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 7 & -8 & -2 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ har inversen $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Matrisen B är en invers till A om den uppfyller

$$AB = BA = E. \tag{$*$}$$

Vi undersöker om detta är uppfyllt,

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 7 & -8 & -2 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} (-2)\cdot 2 + 2\cdot 1 + 1\cdot 3 \\ 7\cdot 2 + (-8)\cdot 1 + (-2)\cdot 3 \\ (-4)\cdot 2 + 5\cdot 1 + 1\cdot 3 \end{matrix} \right. \\
&\qquad \left. \begin{matrix} -2\cdot 3 + 2\cdot 2 + 1\cdot 2 & -2\cdot 4 + 2\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 7\cdot 3 + (-8)\cdot 2 + (-2)\cdot 2 & 7\cdot 4 + (-8)\cdot 3 + (-2)\cdot 2 \\ (-4)\cdot 3 + 5\cdot 2 + 1\cdot 2 & (-4)\cdot 4 + 5\cdot 3 + 1\cdot 2 \end{matrix} \right)
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 7 & -8 & -2 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-2)+3\cdot 7+4\cdot(-4) & 2\cdot 2+3\cdot(-8)+4\cdot 5 & 2\cdot 1+3\cdot(-2)+4\cdot 1 \\ 1\cdot(-2)+2\cdot 7+3\cdot(-4) & 1\cdot 2+2\cdot(-8)+3\cdot 5 & 1\cdot 1+2\cdot(-2)+3\cdot 1 \\ 3\cdot(-2)+2\cdot 7+2\cdot(-4) & 3\cdot 2+2\cdot(-8)+2\cdot 5 & 3\cdot 1+2\cdot(-2)+2\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alltså har vi visat att B uppfyller $(*)$, varför B är A^{-1}.

W231 Låt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lös med hjälp av resultaten i uppgift 227 matrisekvationerna

c) $BY = A$, och

d) $YB = A$.

c) Genom att vänstermultiplicera båda led med B^{-1} fås

$$B^{-1}BY = B^{-1}A \quad \Leftrightarrow \quad EY = B^{-1}A \quad \Leftrightarrow \quad Y = B^{-1}A.$$

I uppgift 227a visas att inversen till matrisen B är

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Alltså är

$$Y = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2+(-1)\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 2\cdot 3+(-1)\cdot 2+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 4+(-1)\cdot 3+(-1)\cdot 2 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 3 & \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2 & \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 2 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 3 & \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2 & -\frac{1}{2}\cdot 4+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

d) Vi högermultiplicerar båda led med B^{-1}

$$YBB^{-1} = AB^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad YE = AB^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad Y = AB^{-1},$$

vilket ger

$$Y = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & 2\cdot(-1)+3\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & 2\cdot(-1)+3\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2} \\ 1\cdot 2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & 1\cdot(-1)+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & 1\cdot(-1)+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2} \\ 3\cdot 2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & 3\cdot(-1)+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & 3\cdot(-1)+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

W232 Beräkna $(AB)^t$, A^tB^t och B^tA^t, då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

När vi transponerar en matris blir raderna i ursprungsmatrisen kolumner i den transponerade matrisen,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi får nu att

$$\begin{aligned} A^tB^t &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot 4 + 3\cdot 0 & 1\cdot 5 + 3\cdot(-1) \\ 2\cdot 2 + 1\cdot 1 & 2\cdot 4 + 1\cdot 0 & 2\cdot 5 + 1\cdot(-1) \\ 4\cdot 2 + 0\cdot 1 & 4\cdot 4 + 0\cdot 0 & 4\cdot 5 + 0\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 9 \\ 8 & 16 & 20 \end{pmatrix}, \\ B^tA^t &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 4\cdot 2 + 5\cdot 4 & 2\cdot 3 + 4\cdot 1 + 5\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 2 + (-1)\cdot 4 & 1\cdot 3 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Med transponeringsreglerna har vi att

$$(AB)^t = B^tA^t = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

W315 Beräkna, då matriserna A och B är givna enligt nedan, dels matriserna AB och BA, dels var för sig talen $\det(AB)$, $\det(BA)$ och $(\det A)\cdot(\det B)$, samt kontrollera att dessa är lika.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Vi börjar med att bestämma matrisprodukterna,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot 1 & 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \\ (-3)\cdot 4 + 4\cdot 1 & (-3)\cdot 3 + 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}, \\ BA &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\cdot 1 + 3\cdot(-3) & 4\cdot 2 + 3\cdot 4 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot(-3) & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 20 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Determinanterna blir

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -8 & -1 \end{vmatrix} = 6\cdot(-1) - 7\cdot(-8) = 50, \\ \det(BA) &= \begin{vmatrix} -5 & 20 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} = (-5)\cdot 10 - 20\cdot(-5) = 50, \\ \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot(-3) = 10, \\ \det B &= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot 2 - 3\cdot 1 = 5, \\ (\det A)\cdot(\det B) &= 10\cdot 5 = 50. \end{aligned}$$

Nu ser vi att $\det(AB) = \det(BA) = (\det A)\cdot(\det B)$.

b) Matrisprodukterna blir

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{matrix} 1\cdot 2 + (-2)\cdot 0 + 2\cdot 3 & 1\cdot 0 + (-2)\cdot(-1) + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 2 + 3\cdot 0 + 2\cdot 3 & 0\cdot 0 + 3\cdot(-1) + 2\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 1\cdot 3 & 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 1 \end{matrix} \right. \\
&\qquad \left. \begin{matrix} 1\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) + 2\cdot(-2) \\ 0\cdot 1 + 3\cdot(-2) + 2\cdot(-2) \\ 1\cdot 1 + 0\cdot(-2) + 1\cdot(-2) \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{matrix} 2\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 & 2\cdot(-2) + 0\cdot 3 + 1\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + (-2)\cdot 1 & 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 3 + (-2)\cdot 0 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-2)\cdot 1 & 3\cdot(-2) + 1\cdot 3 + (-2)\cdot 0 \end{matrix} \right. \\
&\qquad \left. \begin{matrix} 2\cdot 2 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 2 + (-1)\cdot 2 + (-2)\cdot 1 \\ 3\cdot 2 + 1\cdot 2 + (-2)\cdot 1 \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & -3 & -4 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Vi ska beräkna determinanterna med tre olika metoder.

Metod 1 (Sarrus regel)

När vi beräknar en determinant med Sarrus regel tar vi de två första kolumnerna och placerar kopior av dessa till höger om determinanten. Determinantens värde får vi sedan genom att lägga ihop högerdiagonalprodukterna och dra ifrån vänsterdiagonalprodukterna,

$$
\begin{aligned}
\det(AB) &= \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} 8 & 4 & 1 & 8 & 4 \\ 6 & -1 & -10 & 6 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 1 \\ - & - & -\;+ & + & + \end{array} \\
&= 8\cdot(-1)\cdot(-1) + 4\cdot(-10)\cdot 5 + 1\cdot 6\cdot 1 - 5\cdot(-1)\cdot 1 \\
&\quad - 1\cdot(-10)\cdot 8 - (-1)\cdot 6\cdot 4 \\
&= 8 - 200 + 6 + 5 + 80 + 24 = -77,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\det(BA) &= \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & -3 & -4 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} 3 & -4 & 5 & 3 & -4 \\ -2 & -3 & -4 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & 6 & 1 & -3 \\ - & - & -\;+ & + & + \end{array} \\
&= 3\cdot(-3)\cdot 6 + (-4)\cdot(-4)\cdot 1 + 5\cdot(-2)\cdot(-3) - 1\cdot(-3)\cdot 5 \\
&\quad - (-3)\cdot(-4)\cdot 3 - 6\cdot(-2)\cdot(-4) \\
&= -54 + 16 + 30 + 15 - 36 - 48 = -77,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ - & - & -\;+ & + & + \end{array} \\
&= 1\cdot 3\cdot 1 + (-2)\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot 3\cdot 2 - 0\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot(-2) \\
&= 3 - 4 + 0 - 6 - 0 - 0 = -7,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\det B &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ - & - & -\;+ & + & + \end{array} \\
&= 2\cdot(-1)\cdot(-2) + 0\cdot(-2)\cdot 3 + 1\cdot 0\cdot 1 - 3\cdot(-1)\cdot 1 \\
&\quad - 1\cdot(-2)\cdot 2 - (-2)\cdot 0\cdot 0 \\
&= 4 + 0 + 0 + 3 + 4 - 0 = 11,
\end{aligned}
$$

$$
\bigl(\det A\bigr)\cdot\bigl(\det B\bigr) = (-7)\cdot 11 = -77.
$$

Alltså har vi visat att $\det(AB) = \det(BA) = \bigl(\det A\bigr)\cdot\bigl(\det B\bigr)$.

Observera att Sarrus regel gäller endast för 3×3-determinanter.

Metod 2 (Kofaktorutveckling)

Vi kan välja att kofaktorutveckla en determinant längs en rad eller en kolumn i determinanten.

Om vi börjar med determinanten

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

så väljer vi först en rad eller en kolumn, t.ex. den andra kolumnen. Varje element i kolumn 2 ger upphov till en minorterm i utvecklingen.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= -4 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -10 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 6 & -10 \end{vmatrix} \\
&= -4 \cdot \bigl(6 \cdot (-1) - (-1) \cdot 5\bigr) + (-1) \cdot \bigl(8 \cdot (-1) - 1 \cdot 5\bigr) \\
&\quad - 1 \cdot \bigl(8 \cdot (-10) - 1 \cdot 6\bigr) \\
&= -4 \cdot 44 + (-1) \cdot (-13) - 1 \cdot (-86) = -77.
\end{aligned}$$

Tecknet framför varje term får vi från tecken-matrisen

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix},$$

och minorerna är de determinanter som uppstår när vi stryker den rad och den kolumn som motsvarande element ingår i.

De andra determinanterna räknar vi ut på motsvarande sätt genom att välja en rad eller en kolumn att utveckla längs. Räkningarna blir lite enklare om man väljer en rad/kolumn med många nollor i sig.

$$\begin{aligned}
\det(BA) &= \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & -3 & -4 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} \\
&= +1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot \bigl((-4) \cdot (-4) - 5 \cdot (-3)\bigr) - (-3) \cdot \bigl(3 \cdot (-4) - 5 \cdot (-2)\bigr) \\
&\quad + 6 \cdot \bigl(3 \cdot (-3) - (-4) \cdot (-2)\bigr) \\
&= 1 \cdot 31 - (-3) \cdot (-2) + 6 \cdot (-17) = -77, \\
\det A &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= +1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot \bigl(3 \cdot 1 - 2 \cdot 0\bigr) - 0 \cdot \bigl(\cdots\bigr) + 1 \cdot \bigl((-2) \cdot 2 - 2 \cdot 3\bigr) = -7, \\
\det B &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= -0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -0 + (-1) \cdot \bigl(2 \cdot (-2) - 1 \cdot 3\bigr) - (-2) \cdot \bigl(2 \cdot 1 - 0 \cdot 3\bigr) \\
&= 0 + (-1) \cdot (-7) - (-2) \cdot 2 = 11, \\
\bigl(\det A\bigr) \cdot \bigl(\det B\bigr) &= (-7) \cdot 11 = -77.
\end{aligned}$$

Alltså har vi visat att $\det(AB) = \det(BA) = \bigl(\det A\bigr) \cdot \bigl(\det B\bigr)$.

Metod 3 (Radoperationer)

Med hjälp av radoperationer kan vi skriva om en determinant till en triangulär determinant vars värde är produkten av diagonalelementen. Vid varje radoperation ändras determinantens värde enligt reglerna

- $|A| = |A|$,
- $|A| = \frac{1}{a}|A\,a|$, (där $a \neq 0$),
- $|A| = -|A|$.

Det första steget är att vi ser till att få nollor under $(1,1)$-elementet,

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -\frac{6}{8} & -\frac{5}{8} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 - \frac{6}{8}\cdot 8 & -1 - \frac{6}{8}\cdot 4 & -10 - \frac{6}{8}\cdot 1 \\ 5 - \frac{5}{8}\cdot 5 & 1 - \frac{5}{8}\cdot 4 & -1 - \frac{5}{8}\cdot 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -\frac{43}{4} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{13}{8} \end{vmatrix}.$$

Vi valde alltså att addera multiplar av första raden till rad 2 och 3 för att få nollor under $(1,1)$:an.
Sedan går vi till nästa diagonalelement $(2,2)$ och utför en radoperation för att få en nolla under elementet,

$$= \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -\frac{43}{4} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{13}{8} \end{vmatrix} \begin{matrix} -\frac{3}{8} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -\frac{43}{4} \\ 0 & -\frac{3}{2} - \frac{3}{8}\cdot(-4) & -\frac{13}{8} - \frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{43}{4}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -\frac{43}{4} \\ 0 & 0 & \frac{77}{32} \end{vmatrix}.$$

Vi har nu en triangulär determinant med produkten av diagonalelementen som värde,

$$= 8\cdot(-4)\cdot\frac{77}{32} = -77.$$

De andra determinanterna räknar vi ut med samma strategi,

$$\det(BA) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & -3 & -4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -\frac{17}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{13}{3} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 3 \\ 3 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{3\cdot 3}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -17 & -2 \\ 0 & -5 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} -\frac{5}{17} \end{matrix} = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -17 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{231}{17} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\cdot 3\cdot(-17)\cdot\frac{231}{17} = -77,$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} - \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -\frac{2}{3} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot\left(-\frac{7}{3}\right) = -7,$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -\frac{3}{2} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \end{vmatrix} \begin{matrix} + \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot\left(-\frac{11}{2}\right) = 11,$$

$$\big(\det A\big)\big(\det B\big) = -7\cdot 11 = -77.$$

Vi har alltså visat att $\det(AB) = \det(BA) = \big(\det A\big)\cdot\big(\det B\big)$.

W316 Beräkna på enklaste sätt talen $\det A^2$, $\det B^3$ och $\det(ABA)$ för matriserna A och B i uppgift

a) 315a, och

b) 315b.

Determinantreglerna ger att

$$\begin{aligned}\det A^2 &= \det(AA) = \bigl(\det A\bigr)\bigl(\det A\bigr) = \bigl(\det A\bigr)^2,\\ \det B^3 &= \det(BBB) = \bigl(\det B\bigr)\bigl(\det B\bigr)\bigl(\det B\bigr) = \bigl(\det B\bigr)^3,\\ \det(ABA) &= \det(AB)\cdot\det A.\end{aligned}$$

Från uppgift 315 har vi att

a) $\det A = 10,\quad \det B = 5,\quad \det(AB) = 50,$

b) $\det A = -7,\quad \det B = 11,\quad \det(AB) = -77.$

Alltså är

a) $\det A^2 = 10^2 = 100,\ \det B^3 = 5^3 = 125,\ \det(ABA) = 50\cdot 10 = 500,$

b) $\det A^2 = (-7)^2 = 49,\ \det B^3 = 11^3 = 1331,\ \det(ABA) = -77\cdot(-7) = 539.$

W318 Visa att följande matriser är inverterbara och bestäm inversen:

a) $\begin{pmatrix}2 & 6\\ 1 & 4\end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 8\end{pmatrix}$.

En matris är inverterbar om dess determinant är skild från noll. Vi har att

a) $\begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 6\cdot 1 = 8 - 6 = 2 \neq 0,$

b) $\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 8\end{vmatrix} = 1\cdot 8 - 5\cdot 2 = 8 - 10 = -2 \neq 0.$

Alltså är båda matriserna inverterbara. Inversen bestämmer vi med adjunktformeln

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}+M_{11} & -M_{12}\\ -M_{21} & +M_{22}\end{pmatrix}^T,$$

där M_{11}, M_{12}, M_{21} och M_{22} är matrisens minorer,

a) $M_{11} = \begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 4,\qquad M_{12} = \begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 1,$

$M_{21} = \begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 6,\qquad M_{22} = \begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 2,$

b) $M_{11} = \begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 8\end{vmatrix} = 8,\qquad M_{12} = \begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 8\end{vmatrix} = 2,$

$M_{21} = \begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 8\end{vmatrix} = 5,\qquad M_{22} = \begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 8\end{vmatrix} = 1.$

Inversen är alltså

a) $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -1\\ -6 & 2\end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -6\\ -1 & 2\end{pmatrix},$

b) $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix}8 & -2\\ -5 & 1\end{pmatrix}^T = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8 & -5\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$

W320 För vilka tal k har matrisen $A + kB$ en invers, om

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Bestäm $(A + kB)^{-1}$ för dessa k.

Matrisen $A + kB$ är

$$\begin{aligned} A + kB &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 + k \cdot 1 & -1 + k \cdot 3 \\ 2 + k \cdot (-1) & 1 + k \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 3k - 1 \\ 2 - k & k + 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

och den har en invers när determinanten är skild från noll, d.v.s. när

$$\begin{aligned} \det(A + kB) &= \begin{vmatrix} k & 3k - 1 \\ 2 - k & k + 1 \end{vmatrix} = k(k + 1) - (3k - 1)(2 - k) \\ &= 4k^2 - 6k + 2 \neq 0. \end{aligned}$$

Denna andragradare har rötterna $k = 1$ och $k = \frac{1}{2}$. Alltså är matrisen $A + kB$ inverterbar när $k \neq \frac{1}{2}$ och $k \neq 1$. Inversen ges av adjunktformeln

$$(A + kB)^{-1} = \frac{1}{\det(A + kB)} \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & +M_{22} \end{pmatrix}^T,$$

där

$$M_{11} = \begin{vmatrix} k & 3k - 1 \\ 2 - k & k + 1 \end{vmatrix} = k + 1, \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} k & 3k - 1 \\ 2 - k & k + 1 \end{vmatrix} = 2 - k,$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} k & 3k - 1 \\ 2 - k & k + 1 \end{vmatrix} = 3k - 1, \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} k & 3k - 1 \\ 2 - k & k + 1 \end{vmatrix} = k.$$

Alltså

$$(A + kB)^{-1} = \frac{1}{4k^2 - 6k + 2} \begin{pmatrix} k + 1 & 1 - 3k \\ k - 2 & k \end{pmatrix}.$$

W402 Skriv följande ekvationssystem i matrisform och lös dem sedan med hjälp av koefficientmatrisens invers:

a) $\begin{aligned} 2x + 5y &= 1, \\ x + 3y &= 0, \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 4x + 3y &= 2, \\ 3x - 5y &= 6. \end{aligned}$

a) De två uttrycken i vänsterledet kan skrivas som

$$\begin{pmatrix} 2x + 5y \\ x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Elementen i matrisen är koefficienterna framför x och y. Ekvationssystemet kan alltså skrivas som matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Om koefficientmatrisen är inverterbar ger vänstermultiplikation med inversen att

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matrisen är inverterbar om dess determinant är skild från noll. Vi har att

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

Alltså finns inversen. Vi kan bestämma inversen med ”snabbformeln”: 1 delat med determinanten framför matrisen, diagonalelementen byter plats och de andra två elementen byter tecken. Alltså,

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösningen är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

c) Vi får ekvationssystemet i matrisform genom att skriva om vänsterledet som en matrisprodukt,

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Koefficientmatrisens determinant är

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 3 = -29 \neq 0,$$

varför matrisen är inverterbar och ekvationssystemet har lösningen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{-29} \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-29} \begin{pmatrix} (-5) \cdot 2 + (-3) \cdot 6 \\ (-3) \cdot 2 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{29} \\ -\frac{18}{29} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

W407a Lös med hjälp av Cramers regel ekvationssystemet

$$\begin{aligned} ax - 2y &= 4 - a, \\ (a-3)x + (a-1)y &= -1, \end{aligned}$$

för alla värden på parametern a då detta är möjligt.

Vi skriver först ekvationssystemet i matrisform,

$$\begin{pmatrix} a & -2 \\ a-3 & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Cramers regel kan användas när koefficientmatrisen är inverterbar, d.v.s. när determinanten

$$\begin{vmatrix} a & -2 \\ a-3 & a-1 \end{vmatrix} = a(a-1) - (-2)(a-3) = a^2 + a - 6$$

är skild från noll. Med andra ord, när $a \neq -3$ och $a \neq 2$ (som är determinantpolynomets rötter).

Enligt Cramers regel har ekvationssystemet lösningen

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 4-a & -2 \\ -1 & a-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -2 \\ a-3 & a-1 \end{vmatrix}} = \frac{(4-a)(a-1) - (-2)(-1)}{a^2 + a - 6} \\ &= \frac{-a^2 + 5a - 6}{a^2 + a - 6} = \frac{-a+3}{a+3}, \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} a & 4-a \\ a-3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -2 \\ a-3 & a-1 \end{vmatrix}} = \frac{a \cdot (-1) - (4-a)(a-3)}{a^2 + a - 6} \\ &= \frac{a^2 - 8a + 12}{a^2 + a - 6} = \frac{a-6}{a+3}, \end{aligned}$$

där vi får täljardeterminanterna genom att i koefficientmatrisen ersätta kolumnen som svarar mot variabeln med högerledet.

W409 Lös ekvationssystemen

a)
$$\begin{aligned} x + \ \ y + \ \ z &= 0, \\ 2x + 5y + 3z &= 1, \\ -x + 2y + \ \ z &= 2, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 4x + \ \ y - 3z &= 11, \\ 2x - 3y + 2z &= 9, \\ x + \ \ y + \ \ z &= -3, \end{aligned}$$

med gausselimination.

a) Vi skriver ekvationssystemet i ett räkneschema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

I den vänstra delen har vi skrivit upp koefficienterna framför x, y och z i respektive kolumn. I schemats högra del finns ekvationssystemets högerled. Det första steget i gausselimineringen är att utföra radoperationer så att vi får en 1:a i övre vänstra hörnet. Eftersom vi redan har en 1:a där behöver inget göras,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Nästa steg är att få nollor under 1:an,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2 \quad + \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2-2\cdot 1 & 5-2\cdot 1 & 3-2\cdot 1 & 1-2\cdot 0 \\ -1+1 & 2+1 & 1+1 & 2+0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Sedan övergår vi till nästa diagonalelement och utför en radoperation så att vi får en 1:a där,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \frac{1}{3} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Vi utför nu radoperationer så att övriga element i samma kolumn blir noll,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ - \quad -3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

När den andra kolumnen är avklarad övergår vi till det tredje diagonalelementet. Det är redan 1 så vi behöver inte utföra någon radoperation för att få detta,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right)$$

Det sista steget är att radreducera uppåt så att vi får nollor ovanför 1:an.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Nu är vi klara och det är bara att avläsa lösningen. Enklast är nog att översätta tillbaka till ekvationsformen,

$$\begin{aligned} 1\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z &= -1, \\ 0\cdot x + 1\cdot y + 0\cdot z &= 0, \\ 0\cdot x + 0\cdot y + 1\cdot z &= 1, \end{aligned}$$

d.v.s.

$$\begin{aligned} x \qquad\qquad &= -1, \\ y \qquad &= 0, \\ z &= 1. \end{aligned}$$

c) Vi ställer upp räkneschemat,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -3 & 11 \\ 2 & -3 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

Räknegången är precis densamma som i a-uppgiften.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -3 & 11 \\ 2 & -3 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{11}{4} \\ 2 & -3 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{23}{4} \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{23}{4} \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

Från sluttablån kan vi avläsa lösningen

$$x = 2, \quad y = -3, \quad z = -2.$$

W410 Lös ekvationssystemen

a) $$\begin{aligned} 3x - \ y + \ z &= 1, \\ x - 2y + \ z &= 2, \\ 2x + \ y + 3z &= 0, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x - \ y + 3z &= \ \ 6, \\ 3x - 2y + 7z &= \ 14, \\ x + \ y - 3z &= -4, \end{aligned}$$

med gausselimination.

a) Vi kan börja med att slå ihop de första två stegen (att få en 1:a i övre vänstra hörnet och nollor därunder),

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -\tfrac{1}{3} & -\tfrac{2}{3} & \tfrac{1}{3} \\ & & \\ & & \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \sim$$

Notera att radoperationerna utförs i den ordning de står (från vänster till höger). I de följande stegen gör vi samma typ av rationalisering,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \begin{matrix} & & \\ + & -\tfrac{1}{5} & -\tfrac{3}{5} \\ & & \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} & & \\ & & \\ \tfrac{2}{15} & \tfrac{1}{15} & \tfrac{1}{3} \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{15} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Lösningen är alltså

$$x = \tfrac{1}{15}, \quad y = -\tfrac{13}{15}, \quad z = \tfrac{1}{3}.$$

c) Vi gausseliminerar som i a-uppgiften

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 7 & 14 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \end{array}\right) \begin{matrix} -3 & - \\ & \\ & \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -6 & -10 \end{array}\right) \begin{matrix} & \\ -2 & + \\ & \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} & & \\ & & \\ - & \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Lösningen är

$$x = 1, \quad y = -2, \quad z = 1.$$

W411 Lös följande ekvationssystem

a)
$$\begin{aligned} x + 2y - 8z &= 0,\\ 2x - 3y + 5z &= 0,\\ 3x + 2y - 12z &= 0, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1,\\ x + y - 3z &= 0, \end{aligned}$$

med gausselimination.

a) Vi sätter igång och gausseliminerar,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -8 & 0\\ 2 & -3 & 5 & 0\\ 3 & 2 & -12 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2 \quad -3 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -8 & 0\\ 0 & -7 & 21 & 0\\ 0 & -4 & 12 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\tfrac{4}{7} \quad \tfrac{2}{7} \quad -\tfrac{1}{7} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Här har vi nått sluttablån. Den sista raden lyder

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0,$$

d.v.s. $0 = 0$, vilket är en trivialitet. Vi kan alltså stryka den sista raden. De andra två raderna lyder

$$\begin{array}{ccccc} x & & - & 2z & = & 0,\\ & y & - & 3z & = & 0. \end{array}$$

Detta system har oändligt många lösningar. För varje värde på z får vi x- och y-värden som ger en lösning enligt

$$\begin{aligned} x &= 2z,\\ y &= 3z. \end{aligned}$$

Vi kan alltså beskriva alla lösningar till systemet genom att använda z som parameter,

$$\begin{aligned} x &= 2t,\\ y &= 3t, \qquad (t \text{ parameter}),\\ z &= t. \end{aligned}$$

c) Vi gausseliminerar,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ - \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -8 & -1\\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Denna sluttablå är av samma typ som i a-uppgiften. Vi ringar in de ledande 1:orna,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -8 & -1\\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

Övriga variabler får fungera som parametrar, d.v.s. z i detta fall. Lösningarna är

$$\begin{aligned} x &= -1 + 8t,\\ y &= 1 - 5t, \qquad (t \text{ parameter}),\\ z &= t. \end{aligned}$$

W413 Bestäm antalet lösningar N till följande system

b) $\begin{aligned} 2x + 3y &= ax, \\ 4x + \ \ y &= ay, \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x - \ \ y + z &= a, \\ 3x - 2y + z &= 0, \\ 2x - \ \ y \qquad &= 0, \end{aligned}$

för alla värden på parametern a.

b) Vi samlar först variablerna i ena ledet

$$\begin{array}{rcrcl} (2-a)x & + & 3y & = & 0, \\ 4x & + & (1-a)y & = & 0. \end{array}$$

Eftersom högerledet är noll är systemet homogent och då finns alltid den triviala lösningen $x = y = 0$.

Om koefficientmatrisen dessutom är inverterbar är detta enda lösningen. Detta inträffar då

$$\begin{vmatrix} 2-a & 3 \\ 4 & 1-a \end{vmatrix} = (2-a)(1-a) - 3\cdot 4 = a^2 - 3a - 10 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad a \neq -2 \quad \text{och} \quad a \neq 5.$$

När $a = -2$ eller $a = 5$ är koefficientmatrisens determinant lika med noll och systemet har oändligt många lösningar (parameterlösning). Svaret blir alltså

$$\begin{aligned} N &= 1, && \text{när } a \neq -2 \text{ och } a \neq 5, \\ N &= \infty, && \text{när } a = -2 \text{ och } a = 5. \end{aligned}$$

c) Ekvationssystemet blir i matrisform

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Om koefficientmatrisens determinant är skild från noll, är matrisen inverterbar och då finns det exakt en lösning. Vi undersöker därför determinantens värde först. Sarrus regel ger att

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2)\cdot 0 + (-1)\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 3\cdot(-1)$$
$$- 1\cdot(-2)\cdot 2 - 1\cdot(-1)\cdot 1 - 0\cdot(-1)\cdot 3$$
$$= 0 - 2 - 3 + 4 + 1 - 0 = 0.$$

Chansningen gick alltså inte hem. Vi sätter istället igång och gausseliminerar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -3 \quad -2 \end{matrix} \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & -3a \\ 0 & 1 & -2 & -2a \end{array}\right) \begin{matrix} - \quad + \end{matrix} \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2a \\ 0 & 1 & -2 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right)$$

Den sista raden i tablån lyder

$$0 = a.$$

Talet a måste alltså vara noll för att systemet ska ha någon lösning. När $a = 0$ ges lösningen av

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= 2t, \qquad (t \text{ parameter}), \\ z &= t, \end{aligned}$$

d.v.s. vi har oändligt många lösningar. Svaret blir

$$\begin{aligned} N &= 0, && \text{när } a \neq 0, \text{ och} \\ N &= \infty, && \text{när } a = 0. \end{aligned}$$

W415 Undersök för vilka värden på konstanterna a och b som ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1,\\ 2x - 2y + 3z &= b,\\ 3x - y + az &= 2, \end{aligned}$$

har precis en lösning, flera olika lösningar respektive ingen lösning. I de fall då lösningar finns, skall dessa också bestämmas.

Vi gausseliminerar systemet och ser vad som händer,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 3 & b\\ 3 & -1 & a & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & 1 & b-2\\ 0 & -4 & a-3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4}b+\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & a-4 & 1-b \end{array}\right) \sim$$

Beroende på värdet av a och b får vi olika fall:

$a-4 \neq 0$: I detta fall kan vi slutföra gausseliminationen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4}b+\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & a-4 & -b+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4}b+\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{-b+1}{a-4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c\\ 0 & 1 & 0 & d\\ 0 & 0 & 1 & \frac{-b+1}{a-4} \end{array}\right)$$

där

$$c = \tfrac{1}{4}b + \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{4}\frac{-b+1}{a-4} = \frac{\frac{1}{4}ab + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b - \frac{13}{4}}{a-4},$$

$$d = -\tfrac{1}{4}b + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\frac{-b+1}{a-4} = \frac{-\frac{1}{4}ab + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b - \frac{7}{4}}{a-4}.$$

Alltså finns exakt en lösning,

$$x = c, \quad y = d, \quad z = \frac{-b+1}{a-4}.$$

$a-4=0,\ b\neq 1$: Sista raden i ekvationssystemet lyder då $0 = 1-b$ vilket inte är uppfyllt och systemet saknar därmed lösning.

$a-4=0,\ b=1$: Sista raden är då en nollrad som kan strykas. Resten av ekvationssystemet blir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

och har oändligt många lösningar

$$\begin{aligned} x &= -\tfrac{5}{4}t + \tfrac{3}{4},\\ y &= \tfrac{1}{4}t + \tfrac{1}{4},\\ z &= t. \end{aligned}$$

W420 Visa att skärningslinjen mellan planen $x - y - 3z + 1 = 0$ och $x + 3y + z - 2 = 0$ är parallell med planet $5x + 7y - 3z + 3 = 0$ genom att söka lösningar till det system som bildas av de tre ekvationerna.

Planen i uppgiften bildar ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x - y - 3z &= -1,\\ x + 3y + z &= 2,\\ 5x + 7y - 3z &= -3. \end{aligned}$$

Situationen i uppgiften uppstår om koefficientmatrisen har rang 2 (ett av fallen 2, 3, 4 eller 5 på sid 142 i kursboken) och det får vi redan på genom att gausseliminera matrisen,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 12 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eftersom vi har två ledande ettor är rangen 2.

W326 Visa att matriserna

e) $\begin{pmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{pmatrix}$,

f) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

är inverterbara och bestäm inversen med Jacobis metod.

Vi bestämmer inversen till matrisen A genom att ställa upp matrisen

$$(A \mid E)$$

och radreducera matrisens vänstra hälft till E. I den reducerade matrisens högra hälft har vi då A^{-1},

$$(A \mid E) \sim \cdots \sim (E \mid A^{-1}).$$

Om vi inte kan radreducera A till E saknar A invers. Vi bestämmer alltså inversen samtidigt som vi kontrollerar att inversen finns.

e)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 6 & -11 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{array}\right)$$

f)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & 6 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Alltså existerar inverserna och är

e) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 1 & -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$, respektive

f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

W322 Lös matrisekvationen $AX = A^t$, där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sarrus regel ger att

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot(-2) + 2\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot(-1)$$
$$- 1\cdot(-2)\cdot 2 - 2\cdot 2\cdot(-1) - (-2)\cdot 2\cdot 1 = 8 + 8 - 1 + 4 + 4 + 4 = 27.$$

Alltså är A inverterbar och vi får lösningen till matrisekvationen genom att vänstermultiplicera med A^{-1},

$$X = A^{-1}A^t.$$

Vi kan beräkna denna produkt med räkneschemat

$$(A \mid A^t) \sim \cdots \sim (E \mid A^{-1}A^t).$$

Vi får

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 & -2 \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -3 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & -6 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -2 & \frac{7}{2} & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} -\frac{2}{9} \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{array}\right) \begin{matrix} \frac{1}{2} & - \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{array}\right)$$

Alltså är lösningen

$$X = A^{-1}A^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Avsnitt 5, Differentialkalkyl II

401 Avgör om funktionen $\boldsymbol{f}$ respektive $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{h}$ är linjär. Om så är fallet, ange funktionens matris (t betyder transponering).

a) $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$,

c) $\boldsymbol{f}(x,y) = (2x+y, y-x)^t$,

e) $\boldsymbol{f}(x,y) = (x^2+y, x+y)^t$,

g) $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{h}$, där $\boldsymbol{g}(x,y) = (x+y, y-x)^t$ och $\boldsymbol{h}(u,v) = (u-v, u+v)^t$.

En funktion $\boldsymbol{f}(x_1,\ldots,x_n)$ från $\boldsymbol{R}^n$ till $\boldsymbol{R}^m$ är linjär om den kan skrivas i formen

$$\boldsymbol{f}(x_1,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix},$$

där a_{ij}:na är konstanta koefficienter. Vi kan sen skriva funktionen $\boldsymbol{f}$ som en matrisprodukt mellan koefficienterna a_{ij} och variablerna x_j,

$$\boldsymbol{f}(x_1,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Koefficientmatrisen kallas för funktionen $\boldsymbol{f}$:s matris.

a) I detta fall är f en funktion av tre variabler x, y och z, och ger reella tal som funktionsvärden, d.v.s. f är en funktion från $\boldsymbol{R}^3$ till $\boldsymbol{R}$. Funktionen f är en linjär funktion eftersom den just är en linjärkombination av variablerna,

$$f(x,y,z) = (x + 2y + 3z).$$

Med matriser kan f skrivas som

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

där 1×3-matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ är f:s matris.

c) Funktionen $\boldsymbol{f}$ beror av två variabler x och y, och ger funktionsvärden i $\boldsymbol{R}^2$. Vi har alltså en funktion från $\boldsymbol{R}^2$ till $\boldsymbol{R}^2$. Eftersom $\boldsymbol{f}$:s båda komponenter

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ -x+y \end{pmatrix}$$

är linjärkombinationer av x och y är $\boldsymbol{f}$ en linjär funktion. I matrisform kan $\boldsymbol{f}$ skrivas som

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{f}$:s matris är alltså $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

e) Funktionen $\boldsymbol{f}$, som är en funktion från $\boldsymbol{R}^2$ till $\boldsymbol{R}^2$, är inte linjär eftersom dess första komponent innehåller x^2.

g) Både $\boldsymbol{g}$ och $\boldsymbol{h}$ är funktioner från $\boldsymbol{R}^2$ till $\boldsymbol{R}^2$. De är också linjära funktioner eftersom deras komponenter är linjärkombinationer av variablerna,

$$\boldsymbol{g}(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{h}(u,v) = \begin{pmatrix} u-v \\ u+v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Sammansättningen $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{h}$ blir då en linjär funktion som har $\boldsymbol{g}$:s matris multiplicerat med $\boldsymbol{h}$:s matris som matris,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{h}(u,v) = \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{h}(u,v)\big) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(u,v) \\ h_2(u,v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d.v.s. $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{h}$ har matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notera ordningen i matrisprodukten. Eftersom $\boldsymbol{h}$ utförs först i sammansättningen $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{h}$ hamnar $\boldsymbol{h}$:s matris längst till höger.

405 Bestäm Jacobimatriserna till följande funktioner

a) $\boldsymbol{f}(x,y) = (2x+y, 3x+2y)$,

c) $\boldsymbol{f}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, och

e) $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x+2y+3z, xyz)$ i punkten $(x,y,z) = (1,2,3)$.

a) Vi skriver först om funktionen $\boldsymbol{f}$ i kolumnform

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 3x+2y \end{pmatrix},$$

där vi infört f_1 och f_2 som beteckningar för $\boldsymbol{f}$:s komponenter. Eftersom $\boldsymbol{f}$ är en funktion från $\boldsymbol{R}^2$ till $\boldsymbol{R}^2$ har den 2×2-matrisen

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

som Jacobimatris. Partialderivatorna är

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x+y) = 2, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x+y) = 1,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x+2y) = 3, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x+2y) = 2.$$

Alltså är Jacobimatrisen

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Funktionen $\boldsymbol{f}$ beskriver en parameterkurva i $\boldsymbol{R}^3$, men är samtidigt en funktion från $\boldsymbol{R}$ till $\boldsymbol{R}^3$,

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}.$$

Jacobimatrisen till $\boldsymbol{f}$ är 3×1-matrisen

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial t} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial t}\cos t \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\sin t \\ \dfrac{\partial}{\partial t} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notera att Jacobimatrisen är lika med kurvans riktningsvektor (fast i kolumnform).

e) Jacobimatrisen till funktionen

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ xyz \end{pmatrix}$$

är 2×3-matrisen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y,z)} &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(x+2y+3z) & \dfrac{\partial}{\partial y}(x+2y+3z) & \dfrac{\partial}{\partial z}(x+2y+3z) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(xyz) & \dfrac{\partial}{\partial y}(xyz) & \dfrac{\partial}{\partial z}(xyz) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

I punkten $(1,2,3)$ har Jacobimatrisen värdet

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y,z)}(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2\cdot 3 & 1\cdot 3 & 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Anm. I närheten av punkten $(1,2,3)$ har alltså $\boldsymbol{f}$ den linjära approximationen

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(1+h_1, 2+h_2, 3+h_3) &= \boldsymbol{f}(1,2,3) + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y,z)}(1,2,3)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} + O(\|\boldsymbol{h}\|)^2 \\ &= \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} + O(\|\boldsymbol{h}\|)^2.\end{aligned}$$

407 Bestäm Jacobimatriserna till funktionerna

a) $x = r\cos v,$
$y = r\sin v,$

b) $x = u - 2v + 3w,$
$y = 2u - w.$

a) Vi har en funktion som tar två tal r och v, och ger två värden x och y, d.v.s. en funktion från $\boldsymbol{R}^2$ till $\boldsymbol{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r,v) \\ y(r,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos v \\ r\sin v \end{pmatrix}.$$

Jacobimatrisen till denna funktion ges av 2×2-matrisen

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r}(r\cos v) & \dfrac{\partial}{\partial v}(r\cos v) \\ \dfrac{\partial}{\partial r}(r\sin v) & \dfrac{\partial}{\partial v}(r\sin v) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos v & -r\sin v \\ \sin v & r\cos v \end{pmatrix}.$$

b) Funktionen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-2v+3w \\ 2u-w \end{pmatrix}$$

går från $\boldsymbol{R}^3$ till $\boldsymbol{R}^2$ och har Jacobimatrisen

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v,w)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u}(u-2v+3w) & \dfrac{\partial}{\partial v}(u-2v+3w) & \dfrac{\partial}{\partial w}(u-2v+3w) \\ \dfrac{\partial}{\partial u}(2u-w) & \dfrac{\partial}{\partial v}(2u-w) & \dfrac{\partial}{\partial w}(2u-w) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

408 Bestäm Jacobimatriserna till

c) sammansättningen $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ i punkten $(x,y) = (1,-1)$ då $\boldsymbol{g}(x,y) = (xy, x^2)$ och $\boldsymbol{f}(u,v) = (uv, u+v)$,

d) sammansättningen $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ då $\boldsymbol{g}(x,y) = (x\sin y, y\cos x)$ och $\boldsymbol{f}(u,v) = (\sin v, \cos v \sin u)$ i punkten $(x,y) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

c) Vi ska bestämma Jacobimatrisen med två olika metoder.

Metod 1 (Derivera den sammansatta funktionen)

Vi räkna ut vad den sammansatta funktionen blir

$$\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}(x,y) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{g}(x,y)\big) = \begin{pmatrix} f_1\big(g(x,y)\big) \\ f_2\big(g(x,y)\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(xy,x^2) \\ f_2(xy,x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \cdot x^2 \\ xy + x^2 \end{pmatrix}.$$

Jacobimatrisen till den sammansatta funktionen blir därför

$$\frac{\partial(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\big(xy \cdot x^2\big) & \dfrac{\partial}{\partial y}\big(xy \cdot x^2\big) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\big(xy + x^2\big) & \dfrac{\partial}{\partial y}\big(xy + x^2\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y & x^3 \\ y+2x & x \end{pmatrix}.$$

I punkten $(x,y) = (1,-1)$ har den värdet

$$\frac{\partial(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})}{\partial(x,y)}(1,-1) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1^2 \cdot (-1) & 1^3 \\ -1 + 2 \cdot 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Metod 2 (Kedjeregeln)

Jacobimatriserna till $\boldsymbol{f}$ och $\boldsymbol{g}$ är respektive funktions linjära del. När vi bildar den sammansatta funktionen $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ så blir dess linjära del sammansättningen av $\boldsymbol{f}$ och $\boldsymbol{g}$:s linjära delar, m.a.o. produkten av deras Jacobimatriser,

$$\frac{\partial(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})}{\partial(x,y)} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(u,v)} \, \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial(x,y)},$$

där den första faktorn i högerledet ska beräknas i punkten $(u,v) = \boldsymbol{g}(x,y)$. Fullt utskriven blir alltså kedjeregeln

$$\frac{\partial(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})}{\partial(x,y)}(x,y) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(u,v)}\big(\boldsymbol{g}(x,y)\big) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial(x,y)}(x,y).$$

Vi har att

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u}(uv) & \dfrac{\partial}{\partial v}(uv) \\ \dfrac{\partial}{\partial u}(u+v) & \dfrac{\partial}{\partial v}(u+v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(xy) & \dfrac{\partial}{\partial y}(xy) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2) & \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}.$$

I punkten $(x,y) = (1,-1)$ är $\boldsymbol{g}(x,y) = \boldsymbol{g}(1,-1) = \big(1\cdot(-1), 1^2\big) = (-1,1)$ och vi får att

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})}{\partial(x,y)}(1,-1) &= \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(u,v)}(-1,1)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial(x,y)}(1,-1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) Den sammansatta funktionen $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ har enligt kedjeregeln Jacobimatrisen

$$\frac{\partial(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})}{\partial(x,y)}(x,y) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(u,v)}(u,v)\,\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial(x,y)}(x,y),$$

där $(u,v) = \boldsymbol{g}(x,y)$. Vi har att

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(u,v)} &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u}(\sin v) & \dfrac{\partial}{\partial v}(\sin v) \\ \dfrac{\partial}{\partial u}(\cos v\cdot\sin u) & \dfrac{\partial}{\partial v}(\cos v\cdot\sin u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \cos v \\ \cos v\cdot\cos u & -\sin v\cdot\sin u \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial(x,y)} &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(x\sin y) & \dfrac{\partial}{\partial y}(x\sin y) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(y\cos x) & \dfrac{\partial}{\partial y}(y\cos x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin y & x\cos y \\ -y\sin x & \cos x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

I punkten $(x,y) = \big(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big)$ är $(u,v) = \boldsymbol{g}\big(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big) = \big(\frac{\pi}{2},0\big)$ och vi får att

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})}{\partial(x,y)}\big(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\big) &= \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(u,v)}\big(\tfrac{\pi}{2},0\big)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial(x,y)}\big(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\big) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \cos 0 \\ \cos 0\cdot\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

450 Låt $f(x,y) = \ln(x+y)$, där $x > y > 0$. Vi betraktar f som en funktion av variablerna u och v, där $u = \sqrt{x}+\sqrt{y}$ och $v = \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$. Bestäm $\dfrac{\partial f}{\partial u}$.

I uppgiften använder vi två koordinatsystem för att beskriva punkter i planet, dels de vanliga x,y-koordinaterna, dels kroklinjiga u,v-koordinater. Mellan de två koordinatsystemen har vi ”översättningsformeln”

$$\begin{cases} u = \sqrt{x}+\sqrt{y}, \\ v = \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}. \end{cases} \qquad (*)$$

Vi har därför två sätt att representera funktionen f på, $f = f(x,y)$ och $f = f(u,v)$. Vi kan uttrycka sambandet mellan $f = f(x,y)$ och $f = f(u,v)$ med hjälp av koordinatsambandet $(*)$,

$$f(x,y) = f\big(u(x,y), v(x,y)\big).$$

Notera att i vänsterledet är f en funktion av x,y medan i högerledet är f en funktion av u,v. Kedjeregeln ger att

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \frac{\partial f}{\partial(u,v)}\,\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},$$

vilket i komponentform blir

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Vi har att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\bigl(\ln(x+y)\bigr) = \frac{1}{x+y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\bigl(\ln(x+y)\bigr) = \frac{1}{x+y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\bigl(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,\bigr) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\bigl(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,\bigr) = \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Bigl(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Bigr) = \frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Bigl(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Bigr) = -\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x},$$

varför kedjeregeln blir

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{x+y} & \dfrac{1}{x+y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2} & -\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{x} \end{pmatrix}$$

och från denna likhet kan vi lösa ut den sökta partialderivatan $\frac{\partial f}{\partial u}$.

Om vi transponerar båda led får vi ett mer välbekant utseende på ekvationen

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{x+y} \\ \dfrac{1}{x+y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}} & \dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Eftersom vi har flera bokstavsuttryck i båda led är det nog enklast att använda Cramers regel för att bestämma $\frac{\partial f}{\partial u}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{1}{x+y} & \dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2} \\ \dfrac{1}{x+y} & \dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}} & \dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y^2} \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{1}{x+y}\Bigl(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y^2}\Bigr) - \dfrac{1}{x+y}\Bigl(\dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2}\Bigr)}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Bigl(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y^2}\Bigr) - \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\Bigl(\dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2}\Bigr)} \\
&= \frac{\dfrac{1}{x+y}\Bigl(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{y}{x^2}\Bigr)}{\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{2y^2}-\dfrac{1}{2y\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{2x^2}} = \bigl\{\text{ förläng med } 2x^2y^2\sqrt{xy}\,\bigr\} \\
&= \frac{2\sqrt{xy}\bigl(xy^2-x^3-x^2y+y^3\bigr)}{(x+y)\bigl(xy^2\sqrt{y}-x^3\sqrt{y}-x^2y\sqrt{y}+y^3\sqrt{x}\,\bigr)} \\
&= \frac{2\sqrt{xy}\bigl(-xy(x-y)-(x^3-y^3)\bigr)}{(x+y)\bigl(-x\sqrt{y}(x^2-y^2)-y\sqrt{x}(x^2-y^2)\bigr)} \\
&= \bigl\{\, x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)\,\bigr\} \\
&= \frac{2\sqrt{xy}(x-y)(xy+x^2+xy+y^2)}{(x+y)(x^2-y^2)\bigl(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\,\bigr)} \\
&= \frac{2\sqrt{xy}(x+y)^2}{(x+y)^2\bigl(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\,\bigr)} = \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.
\end{aligned}$$

Eftersom partialderivatan $\frac{\partial f}{\partial u}$ är en partialderivata i u,v-systemet är det naturligare att ge svaret i dessa koordinater

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{2}{u}.$$

451 Betrakta funktionen $f(x,y)=x^y$. Genom variabelsambandet

$$\begin{aligned} u &= x+\ln y,\\ v &= x-\ln y, \end{aligned}$$

definieras en ny funktion g av u och v så att $g(u,v)=f\bigl(x(u,v),y(u,v)\bigr)$. Beräkna g'_u och g'_v då $u=v=2$.

Funktionen g är f sammansatt med $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$. Kedjeregeln ger därför att

$$\frac{\partial g}{\partial(u,v)}=\frac{\partial f}{\partial(x,y)}\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}. \tag{$*$}$$

Eftersom vi i variabelsambandet har u,v uttryckt i x,y (och inte tvärt om) skriver vi om derivatan $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ med inversformeln

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\Bigl(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Bigr)^{-1},$$

och $(*)$ blir då

$$\frac{\partial g}{\partial(u,v)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v}\end{pmatrix}=\frac{\partial f}{\partial(x,y)}\Bigl(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Bigr)^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\bigl(yx^{y-1}\quad x^y\ln x\bigr)\begin{pmatrix}1 & \dfrac{1}{y}\\[2mm] 1 & -\dfrac{1}{y}\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\bigl(yx^{y-1}\quad x^y\ln x\bigr)\frac{1}{1\cdot(-\frac{1}{y})-1\cdot\frac{1}{y}}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{y} & -\dfrac{1}{y}\\[2mm] -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=-\tfrac{1}{2}y\,\bigl(yx^{y-1}\quad x^y\ln x\bigr)\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{y} & -\dfrac{1}{y}\\[2mm] -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=-\tfrac{1}{2}y\,\Bigl(yx^{y-1}\Bigl(-\frac{1}{y}\Bigr)+x^y\ln x\cdot(-1)\quad yx^{y-1}\Bigl(-\frac{1}{y}\Bigr)+x^y\ln x\cdot 1\Bigr)$$

$$=-\tfrac{1}{2}x^y y\,\Bigl(-\frac{1}{x}-\ln x\quad -\frac{1}{x}+\ln x\Bigr),$$

d.v.s.

$$\begin{aligned} g'_u &= \frac{\partial g}{\partial u}=\tfrac{1}{2}x^y y\Bigl(\frac{1}{x}+\ln x\Bigr),\\ g'_v &= \frac{\partial g}{\partial v}=\tfrac{1}{2}x^y y\Bigl(\frac{1}{x}-\ln x\Bigr). \end{aligned}$$

I punkten $u=v=2$ ger variabelsambandet

$$\begin{aligned} 2 &= x+\ln y,\\ 2 &= x-\ln y, \end{aligned}$$

att motsvarande x,y-koordinater är $x=2$ och $y=1$. Partialderivatorna blir då

$$\begin{aligned} g'_u(2,2) &= \tfrac{1}{2}\cdot 2^1\cdot 1\bigl(\tfrac{1}{2}+\ln 2\bigr)=\tfrac{1}{2}+\ln 2,\\ g'_v(2,2) &= \tfrac{1}{2}\cdot 2^1\cdot 1\bigl(\tfrac{1}{2}-\ln 2\bigr)=\tfrac{1}{2}-\ln 2. \end{aligned}$$

452a Beräkna $\frac{\partial f}{\partial v}$ om $f(x,y)=x^2+y^2$, $u=x-y+\sqrt{x-y}$ och $v=x+y$.

Om vi betraktar f som en funktion av u,v-koordinaterna så har vi

$$f(u,v)=f\bigl(x(u,v),y(u,v)\bigr).$$

Med f menar vi alltså $f=f(u,v)$ i vänsterledet och $f=f(x,y)$ i högerledet. Kedjeregeln ger att

$$\frac{\partial f}{\partial(u,v)}=\frac{\partial f}{\partial(x,y)}\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

Om vi använder inverssambandet

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\Bigl(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Bigr)^{-1}$$

så ger kedjeregeln alltså att

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix} \frac{1}{\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}} \begin{pmatrix}\dfrac{\partial v}{\partial y} & -\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial x}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * & \dfrac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}}\end{pmatrix}. \qquad (* = \text{ointressant})$$

Vi har därmed att

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}} = \frac{-2x\cdot\left(-1-\dfrac{1}{2\sqrt{x-y}}\right) + 2y\cdot\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x-y}}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x-y}}\right)\cdot 1 - \left(-1-\dfrac{1}{2\sqrt{x-y}}\right)\cdot 1}$$

$$= \frac{2(x+y) - \dfrac{x+y}{\sqrt{x-y}}}{2+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}} = x+y = v.$$

455 Bestäm genom att införa variablerna

$$\begin{cases} u = (x+y)e^{-z}, \\ v = (x-y)e^{z}, \\ w = z, \end{cases}$$

den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$yf'_x + xf'_y + f'_z = 0.$$

När vi byter koordinater till u, v, w ska vi omvandla alla uttryck i differentialekvationen till u, v, w-koordinater. Från sambandet

$$f(x,y,z) = f\bigl(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)\bigr)$$

ger kedjeregeln att

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y,z)} = \frac{\partial f}{\partial(u,v,w)}\,\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)},$$

d.v.s.

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial w}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial w}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-z} & e^{-z} & -(x+y)e^{-z} \\ e^{z} & -e^{z} & (x-y)e^{z} \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \Bigl(\ \frac{\partial f}{\partial u}e^{-z} + \frac{\partial f}{\partial v}e^{z} \quad \frac{\partial f}{\partial u}e^{-z} - \frac{\partial f}{\partial v}e^{z}$$

$$\quad -\frac{\partial f}{\partial u}\cdot(x+y)e^{-z} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot(x-y)e^{z} + \frac{\partial f}{\partial w}\ \Bigr).$$

Differentialekvationen blir då

$$\begin{aligned}
yf'_x + xf'_y + f'_z &= y\big(f'_u e^{-z} + f'_v e^z\big) + x\big(f'_u e^{-z} - f'_v e^z\big) \\
&\qquad + \big(-f'_u \cdot (x+y)e^{-z} + f'_v \cdot (x-y)e^z + f'_w\big) \\
&= \big(ye^{-z} + xe^{-z} - (x+y)e^{-z}\big)f'_u + \big(ye^z - xe^z + (x-y)e^z\big)f'_v + f'_w \\
&= f'_w = 0.
\end{aligned}$$

Differentialekvationen har därför lösningarna

$$f(u,v,w) = g(u,v),$$

där g är en godtycklig deriverbar funktion. I x, y, z-koordinater blir lösningarna

$$f(x,y,z) = g\big((x+y)e^{-z}, (x-y)e^z\big).$$

456a Transformera följande uttryck

$$\frac{dz}{dx} \quad \text{då } z = z(x),$$

med variabelbytet $x = u + u^3$.

Kedjeregeln ger att $\displaystyle \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du}\,\frac{du}{dx} = \frac{dz}{du}\Big(\frac{dx}{du}\Big)^{-1} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{1}{1+3u^2}.$

457b Transformera uttrycket

$$x\,z'_x + y\,z'_y$$

med variabelbytet $\begin{cases} x = r\cos v, \\ y = r\sin v. \end{cases}$

Vi skriver om partialderivatorna i uttrycket i r, v-koordinater med hjälp av kedjeregeln,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial(x,y)} &= \begin{pmatrix} z'_x & z'_y \end{pmatrix} = \frac{\partial z}{\partial(r,v)}\,\frac{\partial(r,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial z}{\partial(r,v)}\Big(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,v)}\Big)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} z'_r & z'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} z'_r & z'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos v & -r\sin v \\ \sin v & r\cos v \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} z'_r & z'_v \end{pmatrix} \frac{1}{r\cos^2 v + r\sin^2 v} \begin{pmatrix} r\cos v & r\sin v \\ -\sin v & \cos v \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r}\begin{pmatrix} z'_r \cdot r\cos v - z'_v \sin v & z'_r \cdot r\sin v + z'_v \cos v \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} z'_x &= z'_r \cos v - z'_v\,\frac{1}{r}\sin v, \\ z'_y &= z'_r \sin v + z'_v\,\frac{1}{r}\cos v. \end{aligned}$$

Uttrycket blir därför

$$\begin{aligned}
xz'_x + yz'_y &= r\cos v \cdot \Big(z'_r \cos v - z'_v\,\frac{1}{r}\sin v\Big) + r\sin v \cdot \Big(z'_r \sin v + z'_v\,\frac{1}{r}\cos v\Big) \\
&= \big(r\cos^2 v + r\sin^2 v\big)z'_r + \big(-\cos v \cdot \sin v + \sin v \cdot \cos v\big)z'_v = r\,z'_r.
\end{aligned}$$

461 Transformera följande uttryck med angivet variabelbyte,

c) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0,\qquad \begin{cases} x=u+v,\\ y=u-v,\end{cases}$$

n) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\qquad \begin{cases} u=x\cos a-y\sin a,\\ v=x\sin a+y\cos a.\end{cases}$$

c) Vi ska skriva om uttrycken i u,v-koordinater. Med hjälp av kedjeregeln kan vi uttryck sambanden mellan första ordningens partialderivator

$$\frac{\partial z}{\partial(x,y)}=\frac{\partial z}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial z}{\partial(u,v)}\Bigl(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Bigr)^{-1},$$

d.v.s.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\frac{1}{1\cdot(-1)-1\cdot 1}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\
&= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{\partial z}{\partial v} & -\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\qquad \begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\Bigr),\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\Bigr).\end{aligned}$$

Detta samband gäller för alla kontinuerligt deriverbara z. Vi har därför egentligen ett samband mellan deriveringsoperatorerna i x,y- och u,v-koordinater,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}&=\frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\Bigr),\\ \frac{\partial}{\partial y}&=\frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}\Bigr).\end{aligned}$$

Med de vanliga deriveringsreglerna får vi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}z = \frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\Bigr)\frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\Bigr)z\\
&= \frac{1}{4}\Bigl(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\Bigr)z\\
&= \tfrac{1}{4}\bigl(z''_{uu}+2z''_{uv}+z''_{vv}\bigr),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}z = \frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}\Bigr)\frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}\Bigr)z\\
&= \frac{1}{4}\Bigl(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\Bigr)z\\
&= \tfrac{1}{4}\bigl(z''_{uu}-2z''_{uv}+z''_{vv}\bigr).
\end{aligned}$$

I de nya koordinaterna blir alltså uttrycket lika med

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y} &= \tfrac{1}{4}\bigl(z''_{uu}+2z''_{uv}+z''_{vv}\bigr)\\
&\quad -\tfrac{1}{4}\bigl(z''_{uu}-2z''_{uv}+z''_{vv}\bigr)-\tfrac{1}{2}\bigl(z'_u+z'_v\bigr)+\tfrac{1}{2}\bigl(z'_u-z'_v\bigr)\\
&= z''_{uv}-z'_v=0.
\end{aligned}$$

n) Vi härleder först operatorformler för deriveringar i de två koordinatsystemen med hjälp av kedjeregeln,

$$\frac{\partial z}{\partial(x,y)}=\frac{\partial z}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\qquad \begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos a & -\sin a\\ \sin a & \cos a\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos a\cdot\dfrac{\partial z}{\partial u}+\sin a\cdot\dfrac{\partial z}{\partial v} & -\sin a\cdot\dfrac{\partial z}{\partial u}+\cos a\cdot\dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\qquad \begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\cos a\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\sin a\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=-\sin a\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\cos a\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\end{aligned}$$

Operatorformlerna blir alltså

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \cos a\,\frac{\partial}{\partial u} + \sin a\,\frac{\partial}{\partial v},\\ \frac{\partial}{\partial y} &= -\sin a\,\frac{\partial}{\partial u} + \cos a\,\frac{\partial}{\partial v}.\end{aligned}$$

Vi får nu att

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \Big(\cos a\,\frac{\partial}{\partial u} + \sin a\,\frac{\partial}{\partial v}\Big)\Big(\cos a\,\frac{\partial}{\partial u} + \sin a\,\frac{\partial}{\partial v}\Big)z\\ &= \Big(\cos^2 a\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\partial}{\partial u} + \cos a\,\sin a\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\partial}{\partial v}\\ &\qquad + \sin a\,\cos a\,\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\partial}{\partial u} + \sin^2 a\,\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\partial}{\partial v}\Big)z\\ &= \cos^2 a\,z''_{uu} + 2\cos a\sin a\,z''_{uv} + \sin^2 a\,z''_{vv},\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \Big(-\sin a\,\frac{\partial}{\partial u} + \cos a\,\frac{\partial}{\partial v}\Big)\Big(-\sin a\,\frac{\partial}{\partial u} + \cos a\,\frac{\partial}{\partial v}\Big)z\\ &= \Big(\sin^2 a\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\partial}{\partial u} - \sin a\,\cos a\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\partial}{\partial v}\\ &\qquad - \cos a\,\sin a\,\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\partial}{\partial u} + \cos^2 a\,\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\partial}{\partial v}\Big)z\\ &= \sin^2 a\,z''_{uu} - 2\cos a\sin a\,z''_{uv} + \sin^2 a\,z''_{vv},\end{aligned}$$

vilket betyder att

$$\begin{aligned}z''_{xx} + z''_{yy} &= \big(\cos^2 a + \sin^2 a\big)z''_{uu} + \big(2\cos a\sin a - 2\cos a\sin a\big)z''_{uv}\\ &\quad + \big(\sin^2 a + \cos^2 a\big)z''_{vv} = z''_{uu} + z''_{vv}.\end{aligned}$$

501 Undersök om $\boldsymbol{f}$ har en differentierbar invers i någon omgivning av punkten P om

b) $\boldsymbol{f}(x,y) = (xy, x+y)$ och $P = (1,-1)$,

d) $\boldsymbol{f}(x,y) = (x^2 - y^2, \arctan xy)$ och $P \neq (0,0)$.

En differentierbar funktion $\boldsymbol{f}$ är lokalt inverterbar med differentierbar invers i en punkt P omm (om och endast om) dess linjära del är inverterbar i punkten, d.v.s. om Jacobimatrisen

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)}(P) \quad \text{är inverterbar},$$

vilket är detsamma som att

$$\det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)}(P)\Big) \neq 0.$$

b) Vi har att

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

I punkten $P = (1,-1)$ är

$$\det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)}(P)\Big) = \begin{vmatrix} -1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Alltså har $\boldsymbol{f}$ en differentierbar lokal invers i punkten $P = (1,-1)$.

d) I detta fall blir Jacobimatrisen

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y\\ \dfrac{y}{1+(xy)^2} & \dfrac{x}{1+(xy)^2}\end{pmatrix}$$

om dess determinant har värdet

$$\begin{aligned}\det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)}\Big) &= \begin{vmatrix} 2x & -2y\\ \dfrac{y}{1+(xy)^2} & \dfrac{x}{1+(xy)^2}\end{vmatrix}\\ &= \frac{2x^2}{1+(xy)^2} - \frac{-2y^2}{1+(xy)^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{1+(xy)^2}\end{aligned}$$

som är skild från noll när $(x, y) \neq (0,0)$ (täljaren är summan av två kvadrater).

Funktionen $\boldsymbol{f}$ har alltså en differentierbar lokal invers i alla punkter $P \neq (0,0)$.

505 Bestäm alla punkter P, för vilka det finns en omgivning av P, där funktionen $\boldsymbol{f}$ har en differentierbar invers, om

b) $\boldsymbol{f}(x,y) = (x\cos y, x\sin y)$,

c) $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (xy, yz, xz)$.

Det finns en differentierbar lokal invers till $\boldsymbol{f}$ i en punkt P omm $\boldsymbol{f}$:s linjära del i punkten är inverterbar, d.v.s. omm Jacobimatrisen till $\boldsymbol{f}$ har determinanten skild från noll.

b) Jacobimatrisen

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix}$$

och determinanten blir

$$\det\Bigl(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)}\Bigr) = \begin{vmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{vmatrix} = x\cos^2 y + x\sin^2 y = x.$$

Determinanten är alltså skild från noll i alla punkter utom på y-axeln.

Svaret blir att $\boldsymbol{f}$ har en differentierbar invers i en omgivning av alla punkter utom de på y-axeln.

c) Determinanten av Jacobimatrisen är

$$\det\Bigl(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y,z)}\Bigr) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y} & \dfrac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= \{\,\text{Sarrus regel}\,\} = yzx + xyz + 0 - 0 - 0 - 0 = 2xyz.$$

Denna determinant är skild från noll överallt utom på koordinatplanen. Funktionen har alltså en differentierbar invers i en omgivning av alla punkter utom för punkter på koordinatplanen $x = 0$, $y = 0$ eller $z = 0$.

506 Visa att funktionen

$$\boldsymbol{f}\colon \begin{cases} u = x + e^y \\ v = y - e^x \end{cases}$$

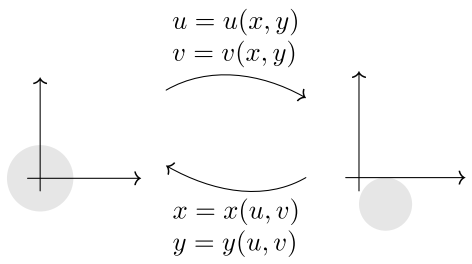
är lokalt inverterbar och beräkna de partiella derivatorna $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ och $\frac{\partial y}{\partial v}$ svarande mot punkten $(x,y) = (0,0)$.

Beräkna även inversens Jacobimatris svarande mot denna punkt.

Vi börjar med att undersöka den lokala inverterbarheten. Funktionen $\boldsymbol{f}$ är lokalt inverterbar om determinanten av dess Jacobimatris är nollskild,

$$\det\Bigl(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)}\Bigr) = \det\Bigl(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Bigr) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & e^y \\ -e^x & 1 \end{vmatrix} = 1 + e^{x+y}.$$

Eftersom exponentialfunktionen alltid är positiv är determinanten nollskild för alla punkter i planet, d.v.s. $\boldsymbol{f}$ är lokalt inverterbar överallt.



Partialderivatorna av x, y med avseende på u, v, d.v.s. inversens partialderivator, får vi enklast genom sambandet

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \Bigl(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Bigr)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & e^y \\ -e^x & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1+e^{x+y}} \begin{pmatrix} 1 & -e^y \\ e^x & 1 \end{pmatrix}.$$

I punkten som svarar mot $(x, y) = (0, 0)$ (d.v.s. $(u, v) = (1, -1)$) antar denna Jacobimatris för inversen värdet

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(1,-1) = \frac{1}{1+e^{0+0}} \begin{pmatrix} 1 & -e^0 \\ e^0 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ur matrisen kan vi också avläsa de sökta partialderivatornas värde i punkten

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \tfrac{1}{2}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\tfrac{1}{2},$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = \tfrac{1}{2}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \tfrac{1}{2}.$$

509 Som synes är $(x, y) = (0, 0)$ en lösning till ekvationssystemet

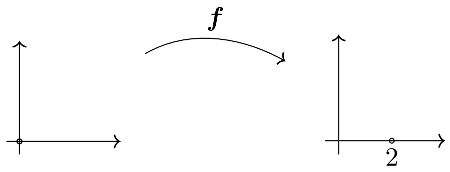
$$\begin{aligned} e^x + xy + e^y &= 2, \\ x^3 - x + y + y^3 &= 0. \end{aligned}$$

Visa att i en tillräckligt liten omgivning av $(0, 0)$ finns det inte någon annan lösning.

Definiera funktionen

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} e^x + xy + e^y \\ x^3 - x + y + y^3 \end{pmatrix}.$$

Då är $\boldsymbol{f}(0, 0) = (2, 0)^t$ precis som det står i uppgiftstexten.



Om vi lyckas visa att $\boldsymbol{f}$ är lokalt inverterbar i $(0, 0)$, då finns en omgivning av $(0, 0)$ där $\boldsymbol{f}$ är 1:1. I den omgivningen finns då bara högst en punkt som kan avbildas på $(2, 0)$, nämligen $(0, 0)$. Detta betyder alltså att ekvationssystemet

$$\begin{aligned} e^x + xy + e^y &= 2, \\ x^3 - x + y + y^3 &= 0, \end{aligned}$$

endast har lösningen $(0, 0)$ i den omgivningen.

Funktionen $\boldsymbol{f}$ är lokalt inverterbar i $(0, 0)$ om determinanten av dess Jacobimatris i punkten är nollskild. Vi har att

$$\det\Bigl(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)}(0,0)\Bigr) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}_{x=y=0} = \begin{vmatrix} e^x + y & x + e^y \\ 3x^2 - 1 & 1 + 3y^2 \end{vmatrix}_{x=y=0}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Alltså är $\boldsymbol{f}$ lokalt inverterbar i punkten enligt inversa funktionssatsen, vilket betyder att ekvationssystemet i en omgivning av $(0,0)$ endast har $(0,0)$ som lösning.

518 En yta definieras genom ekvationen $3xyz-z^3=10$. Visa att det finns en omgivning av punkten $(1,3,2)$ där ytan kan uppfattas som en graf till en kontinuerligt deriverbar funktion $z=z(x,y)$. Bestäm z'_x och z'_y i punkten $(1,3)$.

Definiera funktionen

$$f(x,y,z)=3xyz-z^3-10.$$

Då är ytan 0-nivåytan till f. Vi kan se ytan som en funktionsyta $z=z(x,y)$ lokalt kring alla punkter där ytans tangentplan inte är lodrätt, d.v.s. där ytans normalvektor ∇f inte är horisontell. Vi har att gradienten till f är

$$\nabla f=\Bigl(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\Bigr)=\bigl(3yz,3xz,3xy-3z^2\bigr).$$

I punkten $(1,3,2)$ är den lika med

$$\nabla f(1,3,2)=\bigl(3\cdot 3\cdot 2,3\cdot 1\cdot 2,3\cdot 1\cdot 3-3\cdot 2^2\bigr)=(18,6,-3).$$

Eftersom z-koordinaten är skild från noll är $\nabla f(1,3,2)$ inte horisontell och ytan är därmed lokalt kring $(1,3,2)$ en funktionsyta $z=z(x,y)$.

I en omgivning av $(x,y)=(1,3)$ har vi alltså att

$$f\bigl(x,y,z(x,y)\bigr)\equiv 0.$$

('$\equiv$' betyder att vänsterledet är identiskt noll i omgivningen). Med kedjeregeln får vi

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y,z)}\,\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x,y)}=\mathbf{0},$$

vilket i komponentform blir

$$\begin{aligned}
(0\quad 0)&=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial x}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}\\
&=\bigl(3yz\quad 3xz\quad 3xy-3z^2\bigr)\begin{pmatrix}1 & 0\\[2mm] 0 & 1\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}\\
&=\Bigl(3yz+(3xy-3z^2)\,\frac{\partial z}{\partial x}\quad 3xz+(3xy-3z^2)\,\frac{\partial z}{\partial y}\Bigr)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\qquad \begin{aligned}&3yz+(3xy-3z^2)\,\frac{\partial z}{\partial x}=0,\\ &3xz+(3xy-3z^2)\,\frac{\partial z}{\partial y}=0,\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\qquad \begin{aligned}&\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy},\\ &\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}.\end{aligned}$$

I punkten $(x,y)=(1,3)$ är $z(1,3)=2$ och partialderivatorna får värdena

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(1,3)&=\frac{3\cdot 2}{2^2-1\cdot 3}=6,\\ \frac{\partial x}{\partial y}(1,3)&=\frac{1\cdot 2}{2^2-1\cdot 3}=2.\end{aligned}$$

521 Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2e^x - e^y - e^z = 0, \\ xyz = 1, \end{cases}$$

definierar i en omgivning av punkten $(1,1,1)$ precis två kontinuerligt deriverbara funktioner $x = x(z)$ och $y = y(z)$. Beräkna $x'(1)$.

Sätt

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^x - e^y - e^z \\ xyz - 1 \end{pmatrix}.$$

Enligt implicita funktionssatsen kan vi skriva två av variablerna x, y som funktion av den tredje variabeln z lokalt kring alla punkter som uppfyller

$$\det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)}\Big) \neq 0.$$

I vårt fall är

$$\det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)}\Big) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2e^x & -e^y \\ yz & xz \end{vmatrix} = 2xze^x + yze^y,$$

vilken i punkten $(1,1,1)$ antar värdet

$$\det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial(x,y)}(1,1)\Big) = 2\cdot 1\cdot 1\cdot e^1 + 1\cdot 1\cdot e^1 = 3e \neq 0.$$

Alltså kan vi lokalt kring punkten $(1,1,1)$ från ekvationssystemet definiera $x = x(z)$ och $y = y(z)$.

I närheten av $(1,1,1)$ är därmed

$$\boldsymbol{f}(x(z), y(z), z) \equiv \boldsymbol{0}.$$

Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y,z)} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial z} = \boldsymbol{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2e^x & -e^y & -e^z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2e^x \frac{\partial x}{\partial z} - e^y \frac{\partial y}{\partial z} &= e^z, \\ yz \frac{\partial x}{\partial z} + xz \frac{\partial y}{\partial z} &= -xy. \end{aligned}$$

Cramers regel ger att

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\begin{vmatrix} e^z & -e^y \\ -xy & xz \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2e^x & -e^y \\ yz & xz \end{vmatrix}} = \frac{xze^z - xye^y}{2xze^x + yze^y},$$

och i punkten $\big(x(1), y(1), 1\big) = (1,1,1)$ är

$$\frac{\partial x}{\partial z}(1) = \frac{1\cdot 1\cdot e^1 - 1\cdot 1\cdot e^1}{2\cdot 1\cdot 1\cdot e^1 + 1\cdot 1\cdot e^1} = 0.$$

528 Låt $f(x,y,z) = xy^2z^3$. Verifiera att det finns en omgivning av punkten $(1,1,1)$ där ekvationen $x^2+y^2+z^2-3xyz = 0$ definierar precis en kontinuerlig deriverbar funktion

a) $z = z(x,y)$ och beräkna $\dfrac{\partial}{\partial x} f\bigl(x,y,z(x,y)\bigr)$ i punkten $(1,1)$,

b) $y = y(x,z)$ och beräkna $\dfrac{\partial}{\partial x} f\bigl(x,y(x,z),z\bigr)$ i punkten $(1,1)$.

a) Den lösningsmängd som definieras av ekvationen

$$x^2+y^2+z^2-3xyz = 0$$

är 0-nivåytan till funktionen $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3xyz$. Enligt implicita funktionssatsen definierar ekvationen lokalt en funktion $z = z(x,y)$ i de punkter där

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 2z-3xy \neq 0.$$

I punkten $(1,1,1)$ är

$$\frac{\partial g}{\partial z}(1,1,1) = 2\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 1 = -1 \neq 0$$

varför vi har $z = z(x,y)$ lokalt kring $(x,y) = (1,1)$. Med kedjeregeln på $g\bigl(x,y,z(x,y)\bigr) = 0$ får vi

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\partial g}{\partial(x,y,z)}\,\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x,y)} &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial x}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2x-3yz & 2y-3xz & 2z-3xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2x-3yz+(2z-3xy)\dfrac{\partial z}{\partial x} & * \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x+3yz}{2z-3xy}.$$

Partialderivatan i uppgiftstexten får vi med kedjeregeln

$$\frac{\partial}{\partial x} f\bigl(x,y,z(x,y)\bigr) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x} = y^2z^3 + 3xy^2z^2 \cdot \Bigl(\frac{-2x+3yz}{2z-3xy}\Bigr).$$

I punkten $\bigl(x,y,z(x,y)\bigr) = (1,1,1)$ blir partialderivatans värde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\bigl[f\bigl(x,y,z(x,y)\bigr)\bigr]_{x=y=1} &= 1^2\cdot 1^3 + 3\cdot 1\cdot 1^2\cdot 1^2 \cdot \Bigl(\frac{-2\cdot 1+3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 1-3\cdot 1\cdot 1}\Bigr) \\
&= 1 + 3\cdot\frac{+1}{-1} = -2.
\end{aligned}$$

b) Med implicita funktionssatsen får vi att ekvationen

$$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3xyz = 0$$

definierar lokalt en funktion $y = y(x,z)$ kring punkten $P = (1,1,1)$ om

$$\frac{\partial g}{\partial y}(P) = 2y-3xz\,\Bigr|_{x=y=z=1} = 2\cdot 1-3\cdot 1\cdot 1 = -1 \neq 0.$$

Om vi deriverar

$$g\bigl(x,y(x,z),z\bigr) \equiv 0$$

med kedjeregeln fås

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial(x,y,z)}\,\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x,z)} = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow \qquad \mathbf{0} &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2x-3yz & 2y-3xz & 2z-3xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \left(2x - 3yz + (2y - 3xz)\frac{\partial y}{\partial x} \qquad * \quad \right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-2x + 3yz}{2y - 3xz}.$$

Vi får nu med kedjeregeln att

$$\frac{\partial}{\partial x} f\big(x, y(x,z), z\big) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x} = y^2 z^3 + 2xyz^3 \cdot \frac{-2x + 3yz}{2y - 3xz}.$$

I punkten $\big(x, y(x,z), z\big) = (1,1,1)$ får derivatan värdet

$$\frac{\partial}{\partial x} f\big(x, y(x,z), z\big)\Big|_{x=y=z=1} = 1^2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1^3 \cdot \frac{-2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1}$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{1}{-1} = -1.$$

Avsnitt 6, Egenvärden och egenvektorer

W501 Vilka av följande matriser är ortogonala?

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

En matris

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

är en ortogonal matris om dess kolumner bildar en ON-bas för rummet, d.v.s. om

- kolumnvektorerna har längd 1,

$$\|\boldsymbol{a}_i\|^2 = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_i = 1 \quad \text{för } i = 1, 2, \ldots, n, \text{ och}$$

- kolumnvektorerna är sinsemellan ortogonala (vinkelräta),

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = 0 \quad \text{för } i \neq j.$$

Dessa villkor kan sammanfattas med följande matrismultiplikationsvillkor

$$A^tA = \begin{pmatrix} \text{---} & \boldsymbol{a}_1 & \text{---} \\ \text{---} & \boldsymbol{a}_2 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \boldsymbol{a}_n & \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Vi undersöker alltså om matrisen uppfyller $A^tA = E$. Notera att matrisen A^tA alltid blir symmetrisk ($\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{a}_i$) så vi behöver bara räkna ut ena triangelhalvan av matrisprodukten.

b) Vi får

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \neq E.$$

Redan första produktelementet avslöjar att matrisen inte är en ortogonal matris.

d) Vi får

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Alltså är matrisen en ortogonal matris.

W502c Bestäm de ingående parametrarna så att matrisen

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & x \\ y & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

blir ortogonal.

Villkoret för att en matris A är ortogonal är $A^tA = E$. I vårt fall blir produkten i vänsterledet

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & y \\ x & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & x \\ y & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} + y^2 & \frac{3}{5}(-x+y) \\ & \frac{9}{25} + x^2 \end{pmatrix}.$$

Denna produkt är lika med enhetsmatrisen om

$$\tfrac{9}{25} + y^2 = 1, \quad \tfrac{3}{5}(-x+y) = 0, \quad \tfrac{9}{25} + x^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y = \pm\tfrac{4}{5}.$$

W503 Beräkna inverserna till matriserna

a) $\begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

a) Eftersom matrisen är 2×2 har vi en minnesregel för inversen: 1 delat med determinanten framför matrisen, diagonalelementen byter plats och de andra två elementen byter tecken. Alltså,

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\frac{5}{13} \cdot \frac{5}{13} - \frac{12}{13} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right)} \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

d) I uppgift 501d visade vi att matrisen är ortogonal. För en ortogonal matris A gäller att

$$A^t A = A A^t = E$$

så inversmatrisen till A är A^t. För vår matris gäller alltså

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

W505c Bestäm parametrarna så att matrisen

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & x \\ y & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

blir ortogonal med determinant $+1$.

I uppgift 502c visade vi att matrisen är ortogonal om

$$x = y = +\tfrac{4}{5} \quad \text{eller} \quad x = y = -\tfrac{4}{5}.$$

För dessa två fall blir determinanten

$$x = y = +\tfrac{4}{5}: \quad \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = \left(-\tfrac{3}{5}\right) \cdot \tfrac{3}{5} - \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{4}{5} = -1,$$

$$x = y = -\tfrac{4}{5}: \quad \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = \left(-\tfrac{3}{5}\right) \cdot \tfrac{3}{5} - \left(-\tfrac{4}{5}\right) \cdot \left(-\tfrac{4}{5}\right) = -1.$$

Inga parametervärden ger alltså determinant $+1$.

Anm. Determinant $+1$ svarar mot att kolumnvektorerna bildar en högerhänt ON-bas, medan determinant -1 svarar mot en vänsterhänt ON-bas.

W517 Bestäm alla egenvärden och motsvarande normerade egenvektorer till följande matriser

b) $\begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Det egenrum till matrisen A som svarar mot egenvärdet λ består av alla vektorer $\boldsymbol{x}$ som uppfyller

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

Egenvärdena till matrisen A får vi som rötter till sekularekvationen

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Lösningsgången blir alltså:

1. Bestäm egenvärdena till A med sekularekvationen.
2. För varje egenvärde λ bestämmer vi motsvarande egenrum genom att lösa ekvationen $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

Vi löser nu deluppgifterna.

b) Med $A = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ blir sekularekvationen

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -12 \\ 1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-5-\lambda) - (-12)\cdot 1$$
$$= \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -2 \quad \text{eller} \quad \lambda = -1.$$

Egenvärdena är alltså $\lambda = -2$ och $\lambda = -1$.

Vi bestämmer nu egenrummen som hör till respektive egenvärde.

$\lambda = -2$: Egenrummet består av alla vektorer $\boldsymbol{x}$ som uppfyller ekvationen $\big(A - (-2)E\big)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Skriver vi detta ekvationssystem med ett räkneschema fås

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -12 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

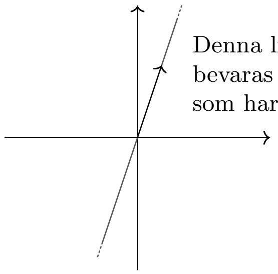
Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -12 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -4 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Lösningen är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).$$

Egenrummet består alltså av linjen med riktning $(3,1)$ som går genom origo.



Alla vektorer i egenrummet kallas för egenvektorer, och det finns två egenvektorer med längd 1,

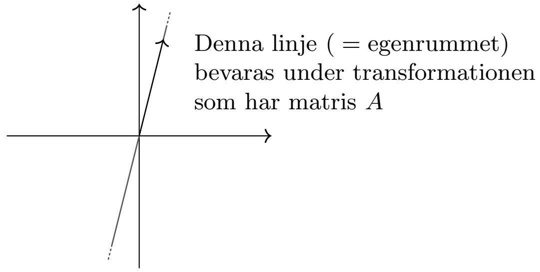
$$\pm\frac{(3,1)}{\|(3,1)\|} = \pm\frac{(3,1)}{\sqrt{3^2+1^2}} = \pm\big(\tfrac{3}{\sqrt{10}}, \tfrac{1}{\sqrt{10}}\big).$$

$\lambda = -1$: Vi får egenrummet som alla vektorer $\boldsymbol{x}$ som uppfyller ekvationen $\big(A - (-1)E\big)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Vi gausseliminerar

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -12 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Lösningen är parameterlinjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).$$



Normerade egenvektorer är

$$\pm\frac{(4,1)}{\|(4,1)\|} = \pm\frac{(4,1)}{\sqrt{4^2+1^2}} = \pm\left(\tfrac{4}{\sqrt{17}}, \tfrac{1}{\sqrt{17}}\right).$$

Svaret är alltså att egenvärdena är -2 och -1 med motsvarande normerade egenvektorer $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ respektive $\pm\left(\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

d) Sekularekvationen blir

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = 1 \quad \text{eller} \quad \lambda = 5.$$

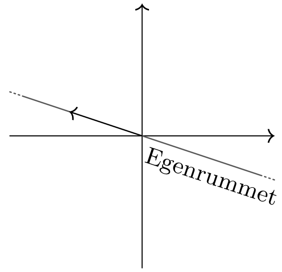
Vi bestämmer nu egenrummen som svarar mot egenvärdena.

$\lambda = 1$: Egenrummet ges av alla lösningar till ekvationssystemet $(A-1E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Vi gausseliminerar,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och lösningen är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).$$



De normerade egenvektorerna är

$$\pm\frac{(-3,1)}{\|(-3,1)\|} = \pm\frac{(-3,1)}{\sqrt{(-3)^2+1^2}} = \pm\left(\tfrac{-3}{\sqrt{10}}, \tfrac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

$\lambda = 5$: Egenvektorerna är lösningar till $(A-5E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

d.v.s. egenvektorer är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).$$

Normerade egenvektorer är

$$\pm\frac{(1,1)}{\|(1,1)\|} = \pm\frac{(1,1)}{\sqrt{1^2+1^2}} = \pm\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

W518 Bestäm alla egenvärden och motsvarande normerade egenvektorer till följande matriser

b) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -4 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

b) Egenvärdena är rötter till sekularekvationen,

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 5 \\ -4 & 4-\lambda & -10 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \{\,\text{Kofaktorutveckling längs rad 3}\,\} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\bigl(-\lambda(4-\lambda)-12\bigr) = (4-\lambda)\bigl(\lambda^2-4\lambda-12\bigr) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lambda=-2, \quad \lambda=4 \quad \text{eller} \quad \lambda=6.$$

Till varje egenvärde finns ett egenrum.

$\lambda=-2$: Egenvektorerna är lösningar till $\bigl(A-(-2)E\bigr)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 0 \\ -4 & 6 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} 2\ \ \tfrac{1}{2} \\ \\ \tfrac{1}{6} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -\tfrac{5}{2} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är därmed

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda=4$: Egenvektorerna är lösningar till $(A-4E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -3 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} -\ \ -\tfrac{1}{4} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 3 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -\tfrac{1}{4}\ \ \tfrac{1}{3} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5t \\ 10t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda=6$: Egenvektorerna är lösningar till $(A-6E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & -3 & 5 & 0 \\ -4 & -2 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} -\tfrac{2}{3}\ \ -\tfrac{1}{6} \\ \\ -\tfrac{1}{2} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{40}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \tfrac{40}{3}\ \ \tfrac{5}{6} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är därför

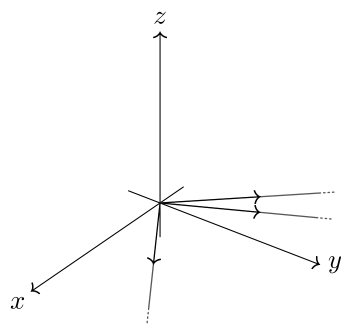
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).$$

De normerade egenvektorerna är

$$\lambda = -2: \quad \pm\frac{(3,2,0)}{\|(3,2,0)\|} = \pm\frac{(3,2,0)}{\sqrt{3^2+2^2+0^2}} = \pm\big(\tfrac{3}{\sqrt{13}}, \tfrac{2}{\sqrt{13}}, 0\big),$$

$$\lambda = 4: \quad \pm\frac{(-5,10,2)}{\|(-5,10,2)\|} = \pm\frac{(-5,10,2)}{\sqrt{(-5)^2+10^2+2^2}} = \pm\tfrac{1}{\sqrt{129}}\big(-5,10,2\big),$$

$$\lambda = 6: \quad \pm\frac{(-1,2,0)}{\|(-1,2,0)\|} = \pm\frac{(-1,2,0)}{\sqrt{(-1)^2+2^2+0^2}} = \pm\big(-\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}, 0\big).$$



d) Egenvärdena ges av sekularekvationen,

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ -2 & 5-\lambda & -2 \\ -6 & 6 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 = 0.$$

Förslagsvis löser vi ekvationen genom att gissa heltalsrötter. Eftersom polynomekvationen har heltalskoefficienter och den ledande termen har koefficient 1 så måste eventuella heltalsrötter dela konstanttermen 27, d.v.s. de enda möjliga heltalsrötterna är ±1, ±3, ±9, ±27. Av dessa visar sig -3 och $+3$ vara rötter. Enligt faktorsatsen kan sekularekvationen då skrivas

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = (\lambda+3)(\lambda-3)(\lambda-A),$$

där A är den tredje roten. Stoppar vi in $\lambda = 0$ i sambandet fås

$$27 = 3\cdot(-3)\cdot(-A) \qquad \Leftrightarrow \qquad A = 3.$$

Egenvärdena är alltså $\lambda = -3$ och $\lambda = 3$ (dubbelrot).

Vi bestämmer nu egenvektorerna till respektive egenvärde.

$\lambda = -3$: Egenvektorerna är lösningar till $\big(A-(-3)E\big)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gausselimineringen ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \frac{1}{2}\ \ \frac{3}{2}\ \ \frac{1}{4} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -\ \ \frac{1}{9} \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -\frac{1}{2} \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 3t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda = 3$: Egenvektorerna är lösningar till $(A - 3E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gausseliminering ger

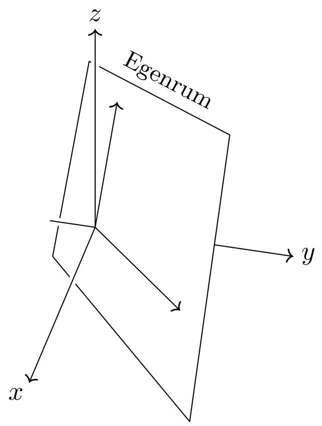
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ -6 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right) \quad - \quad -3 \quad -\tfrac{1}{2} \qquad \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (s,\ t \text{ parametrar}).$$

Egenrummet är alltså ett plan som spänns upp av $(1, 1, 0)$ och $(-1, 0, 1)$.



Normerade egenvektorer är

$\lambda = -3$: $$\pm \frac{(1,1,3)}{\|(1,1,3)\|} = \pm \frac{(1,1,3)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2}} = \pm\big(\tfrac{1}{\sqrt{11}}, \tfrac{1}{\sqrt{11}}, \tfrac{3}{\sqrt{11}}\big),$$

$\lambda = 3$: $$\pm \frac{(1,1,0)}{\|(1,1,0)\|} = \pm \frac{(1,1,0)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \pm\big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\big),$$

$$\pm \frac{(-1,0,1)}{\|(-1,0,1)\|} = \pm \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}} = \pm\big(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big).$$

W519

c) Bevisa att om λ är ett egenvärde till matrisen A, så är $\lambda + \mu$ ett egenvärde till matrisen $A + \mu E$, där E är enhetsmatrisen av samma typ som A.

d) Bevisa att om λ är ett egenvärde till matrisen A, så är λ^2 ett egenvärde till matrisen A^2.

c) Eftersom λ är ett egenvärde till matrisen A så finns en vektor $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ så att

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

Då gäller att matrisen $A + \mu E$ uppfyller

$$(A + \mu E)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + \mu\, E\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x} = (\lambda + \mu)\boldsymbol{x}.$$

Alltså har $A + \mu\, E$ egenvärdet $\lambda + \mu$, med samma egenvektor $\boldsymbol{x}$.

d) Om egenvärdet λ har egenvektorn $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, d.v.s.

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x},$$

då är

$$A^2\boldsymbol{x} = AA\boldsymbol{x} = A\lambda\boldsymbol{x} = \lambda\, A\boldsymbol{x} = \lambda\lambda\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}.$$

vilket visar att A^2 har egenvärdet λ^2.

W521 Bestäm egenvärdena och två ortogonala och normerade egenvektorer till följande matriser

b) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 17 \end{pmatrix}$.

Vi bestämmer egenvärden och egenvektorer på det vanliga sättet.

b) Egenvärdena ges av sekularekvationen

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(1-\lambda) - 2\cdot 2$$
$$= \lambda^2+\lambda-6 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=-3 \quad \text{eller} \quad \lambda = 2.$$

Egenvärdena är alltså $\lambda=-3$ och $\lambda=2$.

Vi bestämmer nu motsvarande egenvektorer.

$\lambda=-3$: Egenvektorerna är lösningar till $\big(A-(-3)E\big)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) -2 \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda=2$: Egenvektorerna är lösningar till $\big(A-2E\big)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. Gausselimination ger

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) 2 \;\; \tfrac{1}{2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).$$

Eftersom matrisen är symmetrisk ger spektralsatsen att egenrummen är ortogonala, så för att bestämma två ortogonala och normerade egenvektorer räcker det att vi väljer en normerad vektor ur varje egenrum,

$$\frac{(-2,1)}{\|(-2,1)\|} = \big(-\tfrac{2}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\big) \quad \text{och} \quad \frac{(1,2)}{\|(1,2)\|} = \big(\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\big).$$

d) Sekularekvationen blir

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 \\ -6 & 17-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(17-\lambda) - (-6)\cdot(-6)$$
$$= \lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda = 5 \quad \text{eller} \quad \lambda = 20.$$

Vi har alltså egenvärdena $\lambda=5$ och $\lambda=20$.

Vi bestämmer motsvarande egenvektorer.

$\lambda=5$: Egenvektorerna är lösningar till $(A-5E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -6 & 0 \\ -6 & 12 & 0 \end{array}\right) 2 \;\; \tfrac{1}{3} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda = 20$: Egenvektorerna är lösningar till $(A - 20E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left[\begin{array}{cc|c} -12 & -6 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -2 \quad -\tfrac{1}{6} \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Egenvektorerna är alltså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

Vi har även i detta fall en symmetrisk matris, så spektralsatsen ger att egenvektorer från olika egenrum är ortogonala. Vi behöver alltså bara välja en normerad egenvektor ur respektive rum så är de ortogonala,

$$\frac{(2,1)}{\|(2,1)\|} = \left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{och} \quad \frac{(-1,2)}{\|(-1,2)\|} = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

W522 Bestäm egenvärdena och tre parvis ortogonala och normerade egenvektorer till följande matriser

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Egenvärdena ges av sekularekvationen

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0.$$

Gissning ger rötterna $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ och $\lambda_3 = 5$. Till varje egenvärde finns motsvarande egenrum.

$\lambda = -1$: Egenvektorerna är lösningar till $\big(A - (-1)E\big)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} - \quad \tfrac{1}{2} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 2 \quad - \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Egenvektorerna är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda = 2$: Egenvektorerna är lösningar till $(A-2E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda = 5$: Egenvektorerna är lösningar till $(A-5E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

Eftersom matrisen är symmetrisk ger spektralsatsen att egenrummen är ortogonala, så för att bestämma tre ortogonala normerade egenvektorer räcker det att välja en normerad vektor från respektive egenrum,

$$\frac{(-2,2,1)}{\|(-2,2,1)\|} = \left(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right), \qquad \frac{(2,1,2)}{\|(2,1,2)\|} = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right) \qquad \text{och}$$
$$\frac{(-1,-2,2)}{\|(-1,-2,2)\|} = \left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right).$$

d) Vi bestämmer egenvärdena med sekularekvationen

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & -1-\lambda & 4 \\ -2 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots$$
$$\cdots = -\lambda^3 + 27\lambda - 54 = 0.$$

Gissning ger rötterna $\lambda = -6$ och $\lambda = 3$, och enligt faktorsatsen kan polynomet då skrivas som

$$-\lambda^3 + 27\lambda - 54 = -(\lambda+6)(\lambda-3)(\lambda-A),$$

där A är den tredje roten. Stoppar vi in $\lambda = 0$ i sambandet fås

$$-54 = -6 \cdot (-3) \cdot (-A) \qquad \Leftrightarrow \qquad A = 3.$$

Egenvärdena är alltså $\lambda = -6$ och $\lambda = 3$ (dubbelrot).

Vi bestämmer nu egenvektorerna.

$\lambda = -6$: Egenvektorerna är lösningar till $\big(A-(-6)E\big)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & 2 & 0 \\ 0 & -18 & -18 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ 2 \quad \frac{1}{9} \end{array} \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -\frac{5}{2} \\ \\ \end{array} \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

Egenvektorerna är därför

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).
$$

$\lambda = 3$: Egenvektorerna är lösningar till $(A-3E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2 \quad -2 \quad - \\ \\ \\ \end{array} \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

Egenvektorerna är

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s-2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (s,\, t \text{ parametrar}).
$$

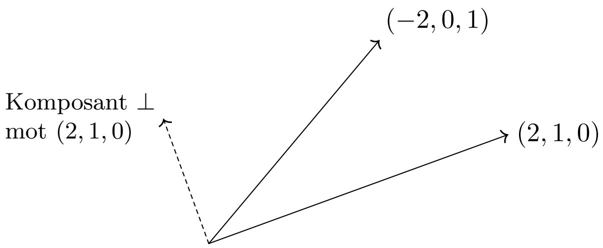
Vi ska nu välja tre ortogonala normerade egenvektorer. Eftersom egenrummet som hör till $\lambda = -6$ är en-dimensionellt och egenrummet som hör till $\lambda = 3$ är två-dimensionellt väljer vi en egenvektor från första rummet

$$
(1, -2, 2),
$$

och två egenvektorer från andra rummet

$$
(2, 1, 0) \quad \text{och} \quad (-2, 0, 1).
$$

Att matrisen är symmetrisk garanterar att $(1, -2, 2)$ är vinkelrät mot egenrummet som $(2, 1, 0)$ och $(-2, 0, 1)$ spänner upp. Däremot behöver inte $(2, 1, 0)$ och $(-2, 0, 1)$, som tillhör samma egenrum, nödvändigtvis vara ortogonala. För att få två ortogonala vektorer i egenrummet ersätter vi vektorn $(-2, 0, 1)$ med dess komposant vinkelrätt mot $(2, 1, 0)$.



Den vinkelräta komposanten blir

$$
\begin{aligned}
(-2,0,1) - \frac{(-2,0,1)\cdot(2,1,0)}{\|(2,1,0)\|^2}\,(2,1,0) \\
= (-2,0,1) - \frac{-4+0+0}{2^2+1^2+0^2}\,(2,1,0) = \bigl(-\tfrac{2}{5}, \tfrac{4}{5}, 1\bigr).
\end{aligned}
$$

De två vektorerna $(2, 1, 0)$ och $\bigl(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\bigr)$ är alltså ortogonala och spänner upp egenrummet med egenvärdet $\lambda = 3$.

Vi har nu tre ortogonala egenvektorer. Om vi normerar dem får vi svaret

$$
\begin{aligned}
\frac{(1,-2,2)}{\|(1,-2,2)\|} &= \frac{(1,-2,2)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \bigl(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\bigr), \\
\frac{(2,1,0)}{\|(2,1,0)\|} &= \frac{(2,1,0)}{\sqrt{2^2+1^2+0^2}} = \bigl(\tfrac{2}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}, 0\bigr), \\
\frac{(-2,4,5)}{\|(-2,4,5)\|} &= \frac{(-2,4,5)}{\sqrt{(-2)^2+4^2+5^2}} = \bigl(-\tfrac{2}{3\sqrt{5}}, \tfrac{4}{3\sqrt{5}}, \tfrac{5}{3\sqrt{5}}\bigr).
\end{aligned}
$$

W524b Bestäm en matris P sådan att P^tAP blir en diagonalmatris D, samt ange D då

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ortogonal diagonalisering av en symmetrisk matris A är egentligen att vi uttrycker den linjära transformation som har A som matris i sin ortonormerade egenvektorbas $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ (basen bestående av A:s ortonormerade egenvektorer). I egenvektorbasen har nämligen transformationen matrisen

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

där λ_1 och λ_2 är A:s egenvärden, och sambandet mellan transformationens två matriser A och D är

$$A = PDP^t,$$

där P är basbytesmatrisen från egenvektorbasen till standardbasen och ges av

$$P = \begin{pmatrix} | & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \\ | & | \end{pmatrix}.$$

I korthet går alltså en ortogonal diagonalisering till som följer:

1. Bestäm egenvärden λ_1, λ_2 och motsvarande ortonormala egenvektorer $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ till matrisen A.

2. Bilda matrisen

$$P = \begin{pmatrix} | & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \\ | & | \end{pmatrix}.$$

Då är $A = PDP^t$ där

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Från uppgift 521b får vi att matrisen A har egenvärdena $\lambda_1 = -3$ och $\lambda_2 = 2$. Motsvarande ortonormerade egenvektorer är $\boldsymbol{v}_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ respektive $\boldsymbol{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Basbytesmatrisen blir därför

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

och diagonalmatrisen blir

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliseringen blir alltså

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Anm. Notera att egenvärdena i diagonalmatrisen är i samma ordning som motsvarande egenvektorer radas upp i P-matrisen. Hade vi istället valt

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

(d.v.s. bytt plats på egenvektorerna) skulle diagonalmatrisen blivit

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

W525 Bestäm en ortogonalmatris P sådan att P^tAP blir en diagonalmatris D, samt ange D då A är matrisen

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$.

Matrisen P är basbytesmatrisen från egenvektorbasen till standardbasen och ges av

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix},$$

där $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ är tre ortonormerade egenvektorer till matrisen A. Diagonalmatrisen blir då

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

där λ_1, λ_2, λ_3 är egenvärdena som hör till egenvektorerna $\boldsymbol{v}_1$ $\boldsymbol{v}_2$ respektive $\boldsymbol{v}_3$.

b) Vi har redan räknat ut egenvärden och egenvektorer i uppgift 522b,

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2 \quad \text{och} \quad \lambda_3 = 5,$$

och

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \left(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right), \\ \boldsymbol{v}_2 &= \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \quad \text{samt} \\ \boldsymbol{v}_3 &= \left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Matriserna P och D blir

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliseringen av A lyder alltså $A = PDP^t$, d.v.s.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

e) Vi måste först bestämma egenvärden och egenvektorer till A. Egenvärdena är rötter till sekularekvationen

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 4 \\ 4 & 1-\lambda & -8 \\ 4 & -8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = -\lambda^3 + 9\lambda^2 + 81\lambda - 729 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = -9 \quad \text{och} \quad \lambda = 9 \ \text{(dubbelrot)}.$$

Vi räknar ut motsvarande egenvektorer.

$\lambda = -9$: Egenvektorerna är lösningar till $\big(A - (-9)E\big)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & -8 & 0 \\ 4 & -8 & 10 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ - \ \ -4 \ \ \frac{1}{4} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & -2 & 0 \\ 0 & -36 & 36 & 0 \\ 0 & -18 & 18 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -\frac{1}{2} \ \ -\frac{1}{36} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -\frac{5}{2} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är alltså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda = 9$: Egenvektorerna är lösningar till $(A - 9E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & -8 & -8 & 0 \\ 4 & -8 & -8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2 \quad 2 \quad -\tfrac{1}{2} \\ \\ \end{array} \quad \sim \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\end{array}$$

Egenvektorerna är alltså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s + 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (s,\, t \text{ parametrar}).$$

Vi har en symmetrisk matris så egenrummen är ortogonala. Vill vi därför välja tre ortonormala egenvektorer behöver vi bara ordna med ortogonaliteten mellan vektorer inom samma egenrum.

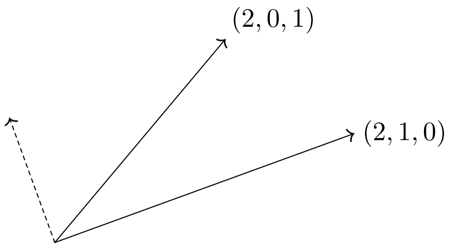
Från egenrummet som svarar mot $\lambda = -9$ får egenvektorn

$$\frac{(-1,2,2)}{\|(-1,2,2)\|} = \frac{(-1,2,2)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} = \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right).$$

Egenrummet som svarar mot $\lambda = 9$ spänns upp av två vektorer

$$(2,1,0) \quad \text{och} \quad (2,0,1).$$

För att få två ortogonala egenvektorer ersätter vi vektorn $(2,1,0)$ med dess komposant vinkelrätt mot $(2,1,0)$,



$$\begin{aligned} &(2,0,1) - \frac{(2,0,1)\cdot(2,1,0)}{\|(2,1,0)\|^2}(2,1,0) \\ &\quad = (2,0,1) - \frac{2\cdot 2 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0}{2^2 + 1^2 + 0^2}(2,1,0) \\ &\quad = (2,0,1) - \left(\tfrac{8}{5}, \tfrac{4}{5}, 0\right) = \left(\tfrac{2}{5}, -\tfrac{4}{5}, 1\right). \end{aligned}$$

Två ortonormala egenvektorer i egenrummet är alltså

$$\frac{(2,1,0)}{\|(2,1,0)\|} = \left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) \quad \text{och} \quad \frac{(2,-4,5)}{\|(2,-4,5)\|} = \left(\tfrac{2}{3\sqrt{5}}, -\tfrac{4}{3\sqrt{5}}, \tfrac{5}{3\sqrt{5}}\right).$$

Basbytesmatrisen P kan vi alltså välja som

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Då blir diagonalmatrisen

$$D = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

och diagonaliseringen lyder

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

W526 Den symmetriska matrisen A har egenvektorerna $(1,2,1)$, $(1,0,-1)$ och $(1,-1,1)$, som hör till egenvärdena 1, 3 respektive 4. Bestäm A.

Eftersom matrisen A är symmetrisk är den ortogonalt diagonaliserbar

$$A = PDP^t,$$

där matrisen P består av ortonormerade egenvektorer till A och diagonalmatrisen D av A:s egenvärden.

Normerar vi de tre egenvektorerna

$$\frac{(1,2,1)}{\|(1,2,1)\|} = \frac{(1,2,1)}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}\right),$$
$$\frac{(1,0,-1)}{\|(1,0,-1)\|} = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right),$$
$$\frac{(1,-1,1)}{\|(1,-1,1)\|} = \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

får vi tre ortonormerade egenvektorer (eftersom A är symmetrisk är de ortogonala) och P sätter vi till

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

I diagonaliseringen blir då

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix}.$$

Vi får att A är

$$\begin{aligned} A &= PDP^t \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

W527 *Beräkning av matrispotenser.* Man kan beräkna en potens A^k av en symmetrisk matris A för ett godtyckligt positivt heltal k, d.v.s. produkten $AA\cdots A$ av k faktorer A, på följande sätt: Diagonalisera först A med hjälp av en lämplig ortogonalmatris: $P^tAP = D$. Härav följer, eftersom $P^{-1} = P^t$, att $A = PDP^t$. Då är $A^2 = AA = (PDP^t)(PDP^t) = (PD)(P^tP)(DP^t) = (PD)E(DP^t) = PDDP^t = PD^2P^t$. Allmänt får man på samma sätt att $A^k = PD^kP^t$. Matrisen D^k beräknas lätt: man finner att

$$\begin{aligned} & D = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad & D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \\ & \vdots \\ \Rightarrow \quad & D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

för godtyckligt positivt heltal k.

b) Beräkna A^k för godtyckligt positivt heltal k, då A är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ange speciellt A^{2n} och A^{2n+1}.

c) Beräkna A^{2n} och A^{2n+1} då

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Om vi ska använda metoden i uppgiftstexten måste vi först ortogonalt diagonalisera A. Det första steget är att bestämma egenvärden och egenvektorer till A.

Egenvärdena är rötter till sekularekvationen

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda = -3, \quad \lambda = 0 \quad \text{eller} \quad \lambda = 3.$$

Vi bestämmer motsvarande egenvektorer.

$\lambda = -3$: Egenvektorerna är lösningar till $\big(A-(-3)E\big)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Vi Gausseliminerar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\ \ \tfrac{1}{2} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2\ \ - \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är alltså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda = 0$: Egenvektorerna är lösningar till $(A - 0\,E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Vi Gausseliminerar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2\ \ - \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \tfrac{1}{2}\ \ \tfrac{1}{2}\ \ \tfrac{1}{4} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är alltså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda = 3$: Egenvektorerna är lösningar till $(A - 3E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Vi Gausseliminerar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2\ \ \tfrac{1}{2} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\tfrac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\tfrac{1}{2}\ \ -\tfrac{3}{8}\ \ -\tfrac{1}{4} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är alltså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

Eftersom matrisen är symmetrisk och egenrummen är en-dimensionella får vi en ortonormerad egenvektorbas genom att välja en normerad vektor från varje egenrum,

$$\frac{(-2,2,1)}{\|(-2,2,1)\|} = \frac{(-2,2,1)}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}} = \left(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right),$$

$$\frac{(2,1,2)}{\|(2,1,2)\|} = \frac{(2,1,2)}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right),$$

$$\frac{(-1,-2,2)}{\|(-1,-2,2)\|} = \frac{(-1,-2,2)}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}} = \left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right).$$

Basbytesmatrisen P blir

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

och diagonaliseringen är

$$A = PDP^t = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Potensmatrisen blir nu

$$\begin{aligned} A^k &= PD^kP^t \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\,(-3)^k & \frac{2}{3}\,(-3)^k & \frac{1}{3}\,(-3)^k \\ \frac{2}{3}\,0^k & \frac{1}{3}\,0^k & \frac{2}{3}\,0^k \\ -\frac{1}{3}\,3^k & -\frac{2}{3}\,3^k & \frac{2}{3}\,3^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{9}\,(-3)^k + 0 + \frac{1}{9}\,3^k & -\frac{4}{9}\,(-3)^k + 0 + \frac{2}{9}\,3^k & -\frac{2}{9}\,(-3)^k + 0 - \frac{2}{9}\,3^k \\ -\frac{4}{9}\,(-3)^k + 0 + \frac{2}{9}\,3^k & \frac{4}{9}\,(-3)^k + 0 + \frac{4}{9}\,3^k & \frac{2}{9}\,(-3)^k + 0 - \frac{4}{9}\,3^k \\ -\frac{2}{9}\,(-3)^k + 0 - \frac{2}{9}\,3^k & \frac{2}{9}\,(-3)^k + 0 - \frac{4}{9}\,3^k & \frac{1}{9}\,(-3)^k + 0 + \frac{4}{9}\,3^k \end{pmatrix} \\ &= 3^{k-2} \begin{pmatrix} 1 + 4(-1)^k & 2 - 4(-1)^k & -2 - 2(-1)^k \\ 2 - 4(-1)^k & 4 + 4(-1)^k & -4 + 2(-1)^k \\ -2 - 2(-1)^k & -4 + 2(-1)^k & 4 + 1(-1)^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

När $k = 2n =$ jämnt helta är $(-1)^k = +1$ och vi får

$$A^{2n} = 3^{2n-2} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

När $k = 2n + 1 =$ udda heltal är $(-1)^k = -1$ och vi får

$$A^{2n+1} = 3^{2n-1} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} = 3^{2n}A.$$

c) I uppgift 525e diagonaliserade vi matrisen A,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Potenser av A blir därför

$$\begin{aligned} A^k &= PD^kP^t \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-9)^k & 0 & 0 \\ 0 & 9^k & 0 \\ 0 & 0 & 9^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(-9)^k & \frac{2}{3}(-9)^k & \frac{2}{3}(-9)^k \\ \frac{2}{\sqrt{5}}9^k & \frac{1}{\sqrt{5}}9^k & 0 \\ \frac{2}{3\sqrt{5}}9^k & -\frac{4}{3\sqrt{5}}9^k & \frac{5}{3\sqrt{5}}9^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{9}\,(-9)^k + \frac{4}{5}\,9^k + \frac{4}{9\cdot 5}\,9^k & -\frac{2}{9}\,(-9)^k + \frac{2}{5}\,9^k - \frac{8}{9\cdot 5}\,9^k & -\frac{2}{9}\,(-9)^k + 0\,9^k + \frac{10}{9\cdot 5}\,9^k \\ -\frac{2}{9}\,(-9)^k + \frac{2}{5}\,9^k - \frac{8}{9\cdot 5}\,9^k & \frac{4}{9}\,(-9)^k + \frac{1}{5}\,9^k + \frac{16}{9\cdot 5}\,9^k & \frac{4}{9}\,(-9)^k + 0\,9^k - \frac{20}{9\cdot 5}\,9^k \\ -\frac{2}{9}\,(-9)^k + 0\,9^k + \frac{10}{9\cdot 5}\,9^k & \frac{4}{9}\,(-9)^k + 0\,9^k - \frac{20}{9\cdot 5}\,9^k & \frac{4}{9}\,(-9)^k + 0\,9^k + \frac{25}{9\cdot 5}\,9^k \end{pmatrix} \\ &= \frac{9^{k-1}}{5} \begin{pmatrix} 40 + 5(-1)^k & 10 - 10(-1)^k & 10 - 10(-1)^k \\ 10 - 10(-1)^k & 25 + 20(-1)^k & -20 + 20(-1)^k \\ 10 - 10(-1)^k & -20 + 20(-1)^k & 25 + 20(-1)^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

När $k = 2n =$ jämnt heltal är $(-1)^k = +1$ och vi får

$$A^{2n} = \frac{9^{2n-1}}{5}\begin{pmatrix}45 & 0 & 0\\ 0 & 45 & 0\\ 0 & 0 & 45\end{pmatrix} = 9^{2n}E.$$

När $k = 2n+1 =$ udda heltal är $(-1)^k = -1$ och vi får

$$A^{2n+1} = \frac{9^{2n}}{5}\begin{pmatrix}35 & 20 & 20\\ 20 & 5 & -40\\ 20 & -40 & 5\end{pmatrix} = 9^{2n}E.$$

W528 Fibonaccis talföljd $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, d.v.s. $x_0, x_1, x_2, \ldots$, definieras genom rekursionsformeln

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

och begynnelsevärdena $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Man finner följden $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$. Övergången från talen x_{n-2} och x_{n-1} till talen x_{n-1} och x_n kan skrivas

$$\begin{pmatrix}x_n\\ x_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ x_{n-2}\end{pmatrix}.$$

Bestäm med hjälp härav en explicit formel för x_n, d.v.s. uttryck x_n som en funktion av n. Vad kan sägas om x_n för stora n.

Om vi använder matrissambandet några gånger

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}x_2\\ x_1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}x_3\\ x_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}x_4\\ x_3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

så kan vi uttyda mönstret

$$\begin{pmatrix}x_n\\ x_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

Även om vi kan vara ganska övertygande om att $(*)$ är riktig så behöver vi någon metod för att helt säkert fastställa att $(*)$ är sann.

Formeln $(*)$ är egentligen ett uttalande om oändligt många samband

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}x_2\\ x_1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^1\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}x_3\\ x_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}x_4\\ x_3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

och är en indexering (uppräkning) av alla dessa samband. Vad vi kan notera i $(*)$ är att varje påstående bygger på ett tidigare påstående. Påstående nr n får vi från påstående nr $n-1$ genom

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}x_n\\ x_{n-1}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ x_{n-2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Det är just i dessa typer av situationer som matematisk induktion är lämplig som bevismetod.

Låt P_n vara påståendet

$$\begin{pmatrix}x_n\\ x_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$$

① (Basfallet)
P_1 är sann, ty

$$\langle\,\text{VL AV } P_1\,\rangle = \begin{pmatrix}x_1\\ x_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^0\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \langle\,\text{HL AV } P_1\,\rangle.$$

② (Induktionssteget)
Vi visar att $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

$$\begin{aligned}\langle \text{VL AV } P_{n+1} \rangle &= \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \{\, P_n \text{ antas vara sann} \,\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \langle \text{HL AV } P_{n+1} \rangle\end{aligned}$$

③ Av induktionsaxiomet följer att P_n är sann för alla positiva heltal n.

Vi har alltså visat att

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

för alla $n \geq 1$.

För att räkna ut x_n behöver vi alltså kunna beräkna

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}.$$

Vi kan använda metoden i uppgift 528: Diagonalisera $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = PDP^t.$$

Då är

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} &= \bigl(PDP^t\bigr)\bigl(PDP^t\bigr)\cdots\bigl(PDP^t\bigr) \\ &= PD\bigl(P^tP\bigr)D\bigl(P^tP\bigr)\cdots\bigl(P^tP\bigr)DP^t = PD^{n-1}P^t.\end{aligned}$$

Matrisen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ har egenvärdena

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Motsvarande egenvektorer är

$\lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$: Egenvektorerna är lösningar till $\bigl(A - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})E\bigr)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är alltså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\sqrt{5}\,)t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$: Egenvektorerna är lösningar till $\bigl(A - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})E\bigr)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är alltså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{5}\,)t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

Normerade egenvektorer från varje egenrum är

$$\begin{aligned}\frac{(1-\sqrt{5},2)}{\|(1-\sqrt{5},2)\|} &= \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}(1-\sqrt{5},2), \\ \frac{(1+\sqrt{5},2)}{\|(1+\sqrt{5},2)\|} &= \frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}(1+\sqrt{5},2).\end{aligned}$$

Vi sätter alltså

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \dfrac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix}$$

och får

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} &= PD^{n-1}P^t \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} & \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} & * \\ * & * \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Vi får därför en formel för x_n,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n \\ * \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \\ * \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \qquad x_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.
\end{aligned}$$

Eftersom $-1 < 1-\sqrt{5} < 0$ så kommer kommer $(1-\sqrt{5})^n$ vara exponentiellt liten när n är stor, och vi har

$$x_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.$$

W531 Överför genom en ortogonal koordinattransformation följande kvadratiska former till kanonisk form. Ange även den använda koordinattransformationen. (Använd resultaten från uppgift 521 och 522.)

b) $-2x^2 + 4xy + y^2$,

d) $8x^2 - 12xy + 17y^2$,

f) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy - 4yz$,

h) $2x^2 - y^2 - z^2 + 4xy - 4xz + 8yz$.

b) Vi skriver först den kvadratiska formen med en matris,

$$-2x^2 + 4xy + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Diagonalelementen i matrisen är koefficienterna framför kvadrattermerna och de två utomdiagonala elementen svarar båda mot korstermens koefficient.

Den kvadratiska formens matris är symmetrisk och enligt uppgift 521b har den följande egenvärden och normerade egenvektorer

egenvärden	-3	2
egenvektorer	$(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$,	$(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$.

Vi väljer därför basbytesmatrisen från egenvektorbasen till standardbasen som

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Notera att vi ordnat kolumnerna i P så att $\det P = +1$, vilket betyder att basbytet är en rotation.

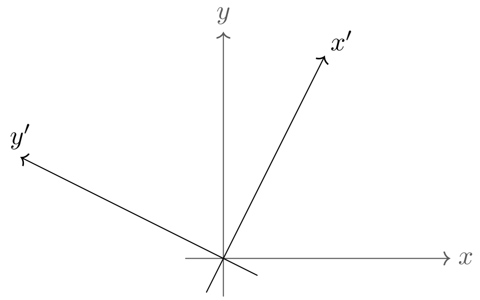
I de nya koordinaterna

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} x + 2y \\ -2x + y \end{pmatrix}$$

blir den kvadratiska formen

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2(x')^2 - 3(y')^2.$$

Detta är den kvadratiska formen skriven i kanonisk form.



Egenvektorbasen

d) Den kvadratiska formen blir i matrisform

$$8x^2 - 12xy + 17y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 17 \end{pmatrix}$$

har enligt uppgift 521d följande egenvärden och egenvektorer

$$\begin{array}{ccc} \text{egenvärden} & 5 & 20 \\ \text{egenvektorer} & (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}), & (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}). \end{array}$$

Vi väljer därför diagonaliseringsmatrisen till

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

I de nya koordinaterna

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x + 2y \end{pmatrix}$$

i egenvektorbasen har den kvadratiska formens s.k. kanoniska form utseendet

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 5(x')^2 + 20(y')^2.$$

f) Vi skriver den kvadratiska formen i matrisform

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy - 4yz = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Från uppgift 522b får vi att matrisen har egenvärdena och egenvektorerna

$$\begin{array}{cccc} \text{egenvärden} & -1 & 2 & 5, \\ \text{egenvektorer} & (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) & (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) & (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}). \end{array}$$

Vi väljer basbytesmatrisen till

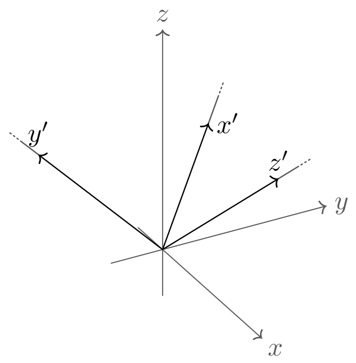
$$P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \qquad (\det P = +1).$$

I egenvektorbasens koordinater

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2x + 2y + \ \ z \\ -x - 2y + 2z \\ 2x + \ \ y + 2z \end{pmatrix}$$

har den kvadratiska formen det kanoniska utseendet

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -(x')^2 + 5(y')^2 + 2(z')^2.$$



h) Först skriver vi om den kvadratiska formen i matrisform

$$\begin{aligned}&2x^2 - y^2 - z^2 + 4xy - 4xz + 8xz\\ &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Matrisen är densamma som i uppgift 522d och har egenvärdena och egenvektorerna

$$\begin{array}{rccc} \text{egenvärden} & -6 & 3 & 3, \\ \text{egenvektorer} & (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) & (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0) & (-\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}). \end{array}$$

Basbytesmatrisen sätter vi därför till

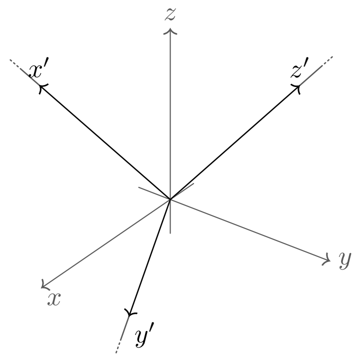
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad (\det P = +1)$$

och i de nya koordinaterna

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x - 2y + 2z) \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y) \\ \frac{1}{3\sqrt{5}}(-2x + 4y + 5z) \end{pmatrix}$$

blir den kanoniska formen

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -6(x')^2 + 3(y')^2 + 3(z')^2.$$



W532 Ange den geometriska betydelsen av andragradsekvationerna

b) $Q(x,y) = -2x^2 + 4xy + y^2 = 1$,

d) $Q(x,y) = 8x^2 - 12xy + 17y^2 = 1$,

f) $Q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy - 4yz = 1$,

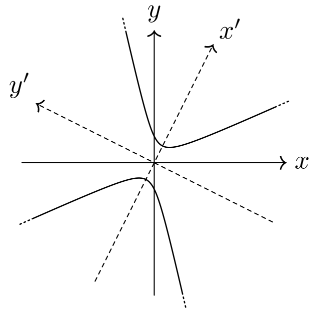
h) $Q(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - z^2 + 4xy - 4xz + 8yz = 1$.

I uppgift 531 skrev vi de kvadratiska formerna i kanonisk form och vi ska utnyttja detta för att ange vilken typ av kurva/yta ekvation bestämmer.

b) I egenvektorbasen har ekvationen utseendet

$$2(x')^2 - 3(y')^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{x'}{1/\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{y'}{1/\sqrt{3}}\right)^2 = 1,$$

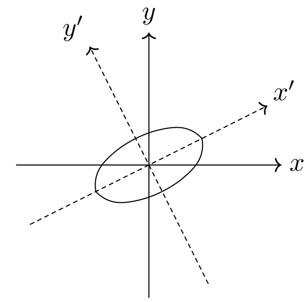
vilket är en hyperbel med halvaxlar $\frac{1}{\sqrt{2}}$ och $\frac{1}{\sqrt{3}}$.



d) Ekvationen blir i egenvektorbasen

$$5(x')^2 + 20(y')^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{x'}{1/\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{1/\sqrt{20}}\right)^2 = 1$$

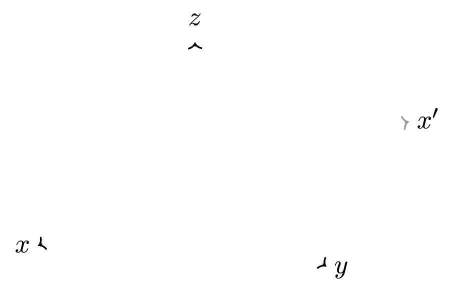
vilket är en ellips med halvaxlar $\frac{1}{\sqrt{5}}$ och $\frac{1}{\sqrt{20}}$.



f) När vi byter till egenvektorbasen får ekvationen utseendet

$$\begin{aligned} &-(x')^2+5(y')^2+2(z')^2=1 \\ \Leftrightarrow \qquad & -(x')^2+\left(\frac{y'}{1/\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{z'}{1/\sqrt{2}}\right)^2=1, \end{aligned}$$

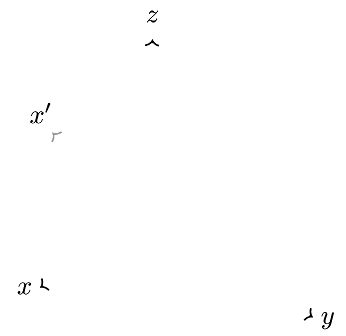
vilket är en enmantlad hyperboloid med x'-axeln som axel och halvaxlar 1, $\frac{1}{\sqrt{5}}$ och $\frac{1}{\sqrt{2}}$.



h) Ekvationens utseende i egenvektorbasen är

$$\begin{aligned} &-6(x')^2+3(y')^2+3(z')^2=1 \\ \Leftrightarrow \qquad & -\left(\frac{x'}{1/\sqrt{6}}\right)^2+\left(\frac{y'}{1/\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{z'}{1/\sqrt{3}}\right)^2=1. \end{aligned}$$

Detta är en enmantlad hyperboloid med x'-axeln som axel och halvaxlar $\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ och $\frac{1}{1/\sqrt{3}}$.



W533 Ange den geometriska betydelsen av andragradsekvationerna

b) $Q(x,y)=-2x^2+4xy+y^2=-1$,

d) $Q(x,y)=8x^2-12xy+17y^2=-1$,

f) $Q(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+4xy-4yz=-1$,

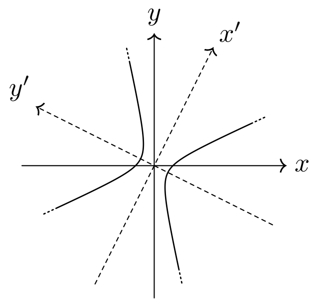
h) $Q(x,y,z)=2x^2-y^2-z^2+4xy-4xz+8yz=-1$.

Vi använder kanoniska formerna som vi räknade ut i uppgift 531 för att ange vilken typ av kurva/yta respektive ekvation bestämmer.

b) Ekvationen har följande utseende i egenvektorbasen

$$2(x')^2-3(y')^2=-1 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\left(\frac{x'}{1/\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{y'}{1/\sqrt{3}}\right)^2=1,$$

vilket är en hyperbel med halvaxlar $1/\sqrt{2}$ och $1/\sqrt{3}$.



d) Ekvationen blir i egenvektorbasen

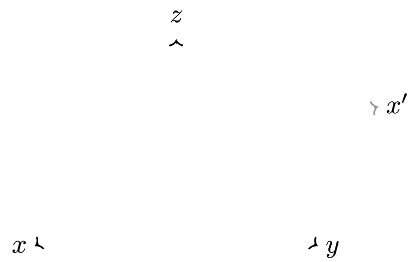
$$5(x')^2+20(y')^2=-1.$$

Eftersom vänsterledet är summan av två kvadrater och alltid positiv finns det inga punkter (x',y') som uppfyller ekvationer.

f) I egenvektorbasen har ekvationen utseende

$$\begin{aligned} &-(x')^2+5(y')^2+2(z')^2=-1 \\ \Leftrightarrow \qquad & -(x')^2+\left(\frac{y'}{1/\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{z'}{1/\sqrt{2}}\right)^2=-1. \end{aligned}$$

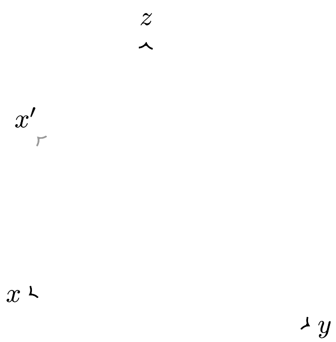
Vi känner igen denna yta som en tvåmantlad hyperboloid med x'-axeln som axel och halvaxlar 1, $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$.



h) Ekvationens utseende i egenvektorbasen är

$$
\begin{aligned}
& -6(x')^2 + 3(y')^2 + 3(z')^2 = -1 \\
\Leftrightarrow \qquad & -\Big(\frac{x'}{1/\sqrt{6}}\Big)^2 + \Big(\frac{y'}{1/\sqrt{3}}\Big)^2 + \Big(\frac{z'}{1/\sqrt{3}}\Big)^2 = -1,
\end{aligned}
$$

vilket är en tvåmantlad hyperboloid med x'-axeln som symmetriaxel och halvaxlar $\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ och $\frac{1}{\sqrt{3}}$.



W534 Ange den geometriska betydelsen av andragradsekvationerna

b) $Q(x,y) = -2x^2 + 4xy + y^2 = 0$,

d) $Q(x,y) = 8x^2 - 12xy + 17y^2 = 0$,

f) $Q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy - 4yz = 0$,

h) $Q(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - z^2 + 4xy - 4xz + 8yz = 0$.

Vi gör som i de tidigare uppgifterna och skriver om ekvationerna i kanonisk form.

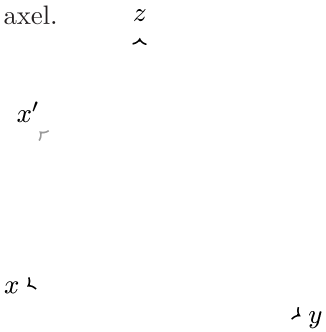
b)
$$
\begin{aligned}
& -\Big(\frac{x'}{1/\sqrt{2}}\Big)^2 + \Big(\frac{y'}{1/\sqrt{3}}\Big)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \qquad & \Big(\frac{y'}{1/\sqrt{3}} - \frac{x'}{1/\sqrt{2}}\Big)\Big(\frac{y'}{1/\sqrt{3}} + \frac{x'}{1/\sqrt{2}}\Big) = 0 \\
\Leftrightarrow \qquad & \frac{y'}{1/\sqrt{3}} - \frac{x'}{1/\sqrt{2}} = 0 \quad \text{eller} \quad \frac{y'}{1/\sqrt{3}} + \frac{x'}{1/\sqrt{2}} = 0,
\end{aligned}
$$

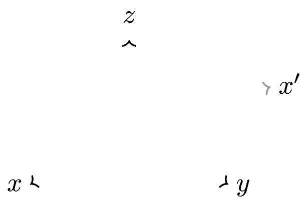
d)
$$\Big(\frac{x'}{1/\sqrt{5}}\Big)^2 + \Big(\frac{y'}{1/\sqrt{20}}\Big)^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x' = y' = 0,$$

f)
$$-(x')^2 + \Big(\frac{y'}{1/\sqrt{5}}\Big)^2 + \Big(\frac{z'}{1/\sqrt{2}}\Big)^2 = 0$$

h)
$$-\Big(\frac{x'}{1/\sqrt{6}}\Big)^2 + \Big(\frac{y'}{1/\sqrt{3}}\Big)^2 + \Big(\frac{z'}{1/\sqrt{3}}\Big)^2 = 0$$

Då ser vi att vi har två räta linjer i b-uppgiften och origo i d-uppgiften. I f- och h-uppgifterna har vi koner med x'-axeln som axel.





Avsnitt 7, Optimering

701 Bestäm Maclaurinpolynomet av andra graden till funktionen

a) $f(x,y) = \ln(1+x+y^2)$,

b) $f(x,y) = e^{xy}\cos(x+y)$.

a) Vi löser uppgiften med två metoder. I praktiska räkningar är metod 2 enklare, men var uppmärksam på att det är nödvändigt att använda Taylorpolynomens entydighetssats i det fallet.

Metod 1 (Taylors formel)

Taylors formel ger

$$f(0+h_1,0+h_2) = f(0,0) + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + O(r^3),$$

där r är en förkortning för $\|(x,y)\|$ och där vi i origo har

$$f(0,0) = \ln(1+0+0^2) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\ln(1+x+y^2)\Big|_{x=y=0} = \frac{1}{1+x+y^2}\Big|_{x=y=0} = 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\ln(1+x+y^2)\Big|_{x=y=0} = \frac{2y}{1+x+y^2}\Big|_{x=y=0} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{1+x+y^2}\Big|_{x=y=0} = -\frac{1}{(1+x+y^2)^2}\Big|_{x=y=0} = -1,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{1+x+y^2}\Big|_{x=y=0} = -\frac{2y}{(1+x+y^2)^2}\Big|_{x=y=0} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{2y}{1+x+y^2}\Big|_{x=y=0} = \frac{2\cdot(1+x+y^2) - 2y\cdot 2y}{(1+x+y^2)^2}\Big|_{x=y=0} = 2.$$

Vi får alltså att

$$\begin{aligned} f(0+h_1,0+h_2) &= 0 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + O\big(\|(h_1,h_2)\|\big)^3 \\ &= h_1 - \tfrac{1}{2}h_1^2 + h_2^2 + O\big(\|(h_1,h_2)\|\big)^3, \end{aligned}$$

eller om vi vill använda x och y som variabelnamn

$$f(x,y) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + y^2 + O\big(\|(x,y)\|\big)^3.$$

Metod 2 (Substitution)

Maclaurinutvecklingen av $\ln(1+t)$ lyder

$$\ln(1+t) = t - \tfrac{1}{2}t^2 + O(t^3).$$

I närheten av origo är uttrycket $x+y^2$ litet så om vi ersätter t med $x+y^2$ i utvecklingen ovan fås

$$\ln(1+x+y^2) = (x+y^2) - \tfrac{1}{2}(x+y^2)^2 + O\big((x+y^2)^3\big).$$

Polynomuttrycket i ordotermen har grad 3 så vi kan ersätta ordotermen med $O(r^3)$, där $r = \|(x,y)\|$. Termer utanför ordotermen med grad 3 eller högre kan vi baka in i ordo,

$$\begin{aligned} &= x + y^2 - \tfrac{1}{2}x^2 - xy^2 - \tfrac{1}{2}y^4 + O(r^3) \\ &= x - \tfrac{1}{2}x^2 + y^2 + O(r^3). \end{aligned}$$

Enligt Taylorutvecklingens entydighetssats måste

$$\ln(1+x+y^2) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + y^2 + O(r^3)$$

vara funktionens Maclaurinutveckling av grad 2.

b) Funktionen kan delas upp i två faktorer e^{xy} och $\cos(x+y)$. Vi ska Maclaurinutveckla faktorerna var för sig och sen på slutet slå ihop dem till en Maclaurinutveckling av produkten.

e^{xy}: Vi börjar med Maclaurinutvecklingen av e^t,

$$e^t = 1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 + O(t^3),$$

och eftersom xy går mot noll i origo så kan vi ersätta t med xy och få

$$e^{xy} = 1 + xy + \tfrac{1}{2}x^2y^2 + O(x^3y^3) = 1 + xy + O(r^3).$$

Vi nöjer oss med att Maclaurinutveckla till grad 2 eftersom svaret ändå bara ska vara upp till grad 2.

$\cos(x+y)$: Vi Maclaurinutvecklar $\cos t$,

$$\cos t = 1 - \tfrac{1}{2}t^2 + O(t^3),$$

och substituerar $t = x + y$,

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= 1 - \tfrac{1}{2}(x+y)^2 + O\big((x+y)^3\big)\\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 - xy - \tfrac{1}{2}y^2 + O(r^3).\end{aligned}$$

Vi får nu att produkten av e^{xy} och $\cos(x+y)$ blir

$$\begin{aligned}e^{xy}\cos(x+y) &= \big(1 + xy + O(r^3)\big)\big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 - xy - \tfrac{1}{2}y^2 + O(r^3)\big)\\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 - xy - \tfrac{1}{2}y^2 + xy - \tfrac{1}{2}x^3y - x^2y^2 - \tfrac{1}{2}xy^3 + O(r^3),\end{aligned}$$

där vi använt räknereglerna

$$\begin{aligned}x^m y^n O(r^k) &= O(r^k),\\ O(r^m)O(r^n) &= O(r^{m+n}),\\ O(r^m) + O(r^n) &= O(r^m), \quad \text{om } m \le n.\end{aligned}$$

Vi förenklar nu uttrycket genom att baka in termer av grad 3 eller högre i ordotermen,

$$e^{xy}\cos(x+y) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 + O(r^3).$$

Enligt Taylorpolynomens entydighetssats är detta andra ordningens Maclaurinutveckling av funktionen.

702 Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till funktionen

a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ i punkten $(1,0)$,

b) $f(x,y) = \ln(x+y^2)$ i punkten $(1,1)$.

a) Vi ska alltså utveckla funktionen så att den kan skrivas som

$$f(x,y) = p_2(x,y) + O(r^3),$$

där p_2 är ett polynom av grad 2 och r är en förkortning för $\|(x-1,y)\|$.

Vad vi först observerar är att funktionen är en produkt av två enklare funktioner

$$(x+y)\cdot\frac{1}{x-y},$$

så vi utvecklar faktorerna var för sig och multiplicerar ihop allt på slutet.

$x+y$: Faktorn $x+y$ är redan ett polynom så den har en enkel Taylorutveckling kring $(1,0)$,

$$x + y = 1 + (x-1) + y = 1 + (x-1) + y + O(r^3).$$

$\dfrac{1}{x-y}$: Om vi skriver om faktorn som

$$\frac{1}{1 + (x-1-y)}$$

så ser vi att den gråa termen går mot noll när $(x,y) \to (1,0)$. Vi Maclaurinutvecklar därför

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + O(t^3)$$

och substituerar sen $t = x - 1 - y$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 + (x-1-y)} &= 1 - \big((x-1) - y\big) + \big((x-1) + y\big)^2 + O(r^3)\\ &= 1 - (x-1) + y + (x-1)^2 - 2(x-1)y + y^2 + O(r^3).\end{aligned}$$

Ihopmultiplicerat får vi

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (x+y)\cdot\frac{1}{x-y}\\
&= \bigl(1+(x-1)+y+O(r^3)\bigr)\cdot\bigl(1-(x-1)+y+(x-1)^2\\
&\quad -2(x-1)y+y^2+O(r^3)\bigr)\\
&= 1-(x-1)+y+(x-1)^2-2(x-1)y+y^2+O(r^3)\\
&\quad +(x-1)-(x-1)^2+(x-1)y+O(r^3)\\
&\quad +y-(x-1)y+y^2+O(r^3)\\
&= 1+2y-2(x-1)y+2y^2+O(r^3).
\end{aligned}$$

Enligt Taylorpolynomens entydighetssats är detta Taylorutvecklingen av funktionen i punkten $(1,0)$.

b) Eftersom vi ska Taylorutveckla funktionen kring $(x,y)=(1,1)$ börjar vi med att uttrycka funktionen i variablerna $x-1$ och $y-1$. Vi har då att

$$\begin{aligned}
x &= 1+(x-1),\\
y^2 &= (y-1)^2+2y-1=(y-1)^2+2(y-1)+1.
\end{aligned}$$

Alltså är

$$\ln(x+y^2)=\ln\bigl(2+(x-1)+2(y-1)+(y-1)^2\bigr).$$

Den gråa termen är noll i $(1,1)$ så vi Maclaurinutvecklar

$$\begin{aligned}
\ln(2+t) &= \ln\bigl(2(1+\tfrac{1}{2}t)\bigr)=\ln 2+\ln(1+\tfrac{1}{2}t)\\
&= \ln 2+\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{2}\bigl(\tfrac{1}{2}t\bigr)^2+O(t^3)
\end{aligned}$$

och substituerar $t=(x-1)+2(y-1)+(y-1)^2$,

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \ln 2+\tfrac{1}{2}\bigl((x-1)+2(y-1)+(y-1)^2\bigr)\\
&\quad -\tfrac{1}{8}\bigl((x-1)+2(y-1)+(y-1)^2\bigr)^2+O(r^3)\\
&= \ln 2+\tfrac{1}{2}(x-1)+(y-1)+\tfrac{1}{2}(y-1)^2-\tfrac{1}{8}(x-1)^2\\
&\quad -\tfrac{1}{2}(x-1)(y-1)-\tfrac{1}{2}(y-1)^2+O(r^3)\\
&= \ln 2+\tfrac{1}{2}(x-1)+(y-1)-\tfrac{1}{8}(x-1)^2\\
&\quad -\tfrac{1}{2}(x-1)(y-1)+O(r^3),
\end{aligned}$$

där $r=\|(x-1,y-1)\|$. Enligt Taylorutvecklingens entydighetssats är detta Taylorutvecklingen av funktionen f av andra ordningen i punkten $(1,1)$.

704a Ange det största värdet på n, så att $f(x,y,z)=O(r^n)$, där $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ och

$$f(x,y,z)=\sin x\,\sin y\,\sin z-\sin(x+y+z).$$

Om vi Maclaurinutvecklar funktionen så kan den skrivas som

$$f(x,y,z)=(\text{konstantterm})+(\text{linjära termer})+(\text{kvadratiska termer})+\cdots.$$

Den första nollskilda termens gradtal n i utvecklingen har storleksordningen $O(r^n)$ där exponenten inte kan väljas större. Detta visar att

$$f(x,y,z)=O(r^n).$$

Alla argument till sinus-funktionerna i funktionen f går mot noll, så vi kan utnyttja Maclaurinutvecklingen av $\sin t$,

$$\sin t=t-\tfrac{1}{3!}t^3+\tfrac{1}{5!}t^5+O(t^7)$$

och substituera $t=x$, $t=y$, $t=z$ respektive $t=x+y+z$,

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \bigl(x-\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{1}{120}x^5+O(x^7)\bigr)\cdot\bigl(y-\tfrac{1}{6}y^3+\tfrac{1}{120}y^5+O(y^7)\bigr)\\
&\quad\cdot\bigl(z-\tfrac{1}{6}z^3+\tfrac{1}{120}z^5+O(r^7)\bigr)-\bigl((x+y+z)-\tfrac{1}{6}(x+y+z)^3\\
&\quad +\tfrac{1}{120}(x+y+z)^5+O(r^7)\bigr)\\
&= -x-y-z+O(r^2)=O(r^1).
\end{aligned}$$

Vi måste alltså välja $n=1$.

801b Bestäm lokala extremvärden till

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Funktionen kan anta lokala extremvärden i följande typer av punkter

1. kritiska punkter,
2. punkter där f inte är differentierbar, och
3. randpunkter som tillhör definitionsmängden.

Eftersom f är ett polynom är den differentierbar överallt och dess definitionsmängd är alla (x,y) och saknar därmed rand.

De enda punkter där f kan anta lokala extremvärden är alltså i kritiska punkter, d.v.s. i punkten där

$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = (0,0). \qquad (*)$$

Vi har

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3y, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 - 3x, \end{aligned}$$

så $(*)$ ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x^2 - y &= 0, && (1) \\ y^2 - x &= 0. && (2) \end{aligned}$$

Löser vi ut y från (1) och stoppar in i (2) fås

$$x^4 - x = x(x^3 - 1) = 0$$

som har de reella rötterna $x = 0$ och $x = 1$. Med (1) får vi då att de kritiska punkterna till f är $(0,0)$ och $(1,1)$.

Om vi Taylorutvecklar f kring en av de kritiska punkterna får vi

$$\begin{aligned} f &= \text{konstant} + \underbrace{\text{linjära termer}}_{=0} + \text{kvadratiska termer} + O(r^3) \\ &= \text{konstant} + \text{kvadratiska termer} + O(r^3). \end{aligned}$$

Lokalt kring den kritiska punkten har alltså f utseendet

$$f \approx \text{konstant} + \text{kvadratiska termer},$$

så punktens karaktär avgörs av de kvadratiska termerna.

Enligt Taylors formel ges de kvadratiska termerna av

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

där

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

Om denna kvadratiska form är

- positiv, då har f ett lokalt minimum i punkten,
- negativ, då har f ett lokalt maximum i punkten,
- både och, då har f en sadelpunkt i punkten.

Vi undersöker nu de kritiska punkterna var för sig.

$(0,0)$: Den kvadratiska formen blir i detta fall

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Eftersom matrisen är symmetrisk (vilket Hessianen alltid är) så finns det en egenvektorbas där den kvadratiska formen har utseendet

$$\begin{pmatrix} h_1' & h_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1' \\ h_2' \end{pmatrix} = \lambda_1 (h_1')^2 + \lambda_2 (h_2')^2.$$

Notera att bara existensen av en egenvektorbas, som spektralsatsen garanterar, räcker för oss. Vi är inte så intresserade av i vilka riktningar den kvadratiska formen har sina huvudaxlar utan formens tecken är det enda som är intressant.

Från sekularekvationen får vi egenvärdena

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = -3 \quad \text{och} \quad \lambda_2 = +3.$$

Den kvadratiska formen har alltså utseendet

$$-3(h_1')^2 + 3(h_2')^2$$

i egenvektorbasen. Här ser vi att den kvadratiska formen antar både positiva och negativa värden (positiva värden längs h_2'-riktningen och negativa värden längs h_1'-riktningen).

Den kritiska punkten är alltså en sadelpunkt.

$(1,1)$: Den kvadratiska formen blir

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Precis som för den kritiska punkten i origo bestämmer vi Hessianens egenvärden och därmed dess kanoniska form i egenvektorbasen.

Sekularekvationen ger

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = 3 \quad \text{och} \quad \lambda_2 = 9.$$

Den kanoniska formen blir

$$3(h_1')^2 + 9(h_2')^2,$$

som är positiv vilket betyder att den kritiska punkten är en lokal minimipunkt.

Funktionen har alltså ett lokalt minimumvärde $f(1,1) = -1$ i punkten $(1,1)$.

801d Bestäm lokala extremvärden till

$$f(x,y) = x^3 + 2x^2 + xy + y^2.$$

Lokala extremvärden kan antas i någon av följande punkter

1. kritiska punkter,
2. punkter där f inte är differentierbar, och
3. randpunkter som tillhör definitionsmängden.

Funktionen f är ett polynon så fall 2 och 3 ger inga punkter. I kritiska punkter gäller att

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (3x^2 + 4x + y, x + 2y) = (0,0)$$

d.v.s.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4x + y &= 0, & (1)\\ x + 2y &= 0. & (2) \end{aligned}$$

Från (2) får vi $x = -2y$. Detta insatt i (1) ger

$$12y^2 - 8y + y = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 0, \quad y = \tfrac{7}{12},$$

och motsvarande x-värden får vi från (2)

$$x = -2 \cdot 0 = 0 \quad \text{respektive} \quad x = -2 \cdot \tfrac{7}{12} = -\tfrac{7}{6}.$$

De kritiska punkterna är alltså $(0,0)$ och $(-\frac{7}{6}, \frac{7}{12})$.

Vi undersöker de kritiska punkternas karaktär genom att bestämma tecknen hos Hessianens egenvärden. Hessianen ges av

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x+4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$(0,0)$: I punkten $(x,y)=(0,0)$ är Hessianen

$$H_f(0,0)=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Egenvärdena får vi från sekularekvationen

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+7=0$$
$$\Leftrightarrow \qquad \lambda_1=3-\sqrt{2} \quad \text{eller} \quad \lambda_2=3+\sqrt{2}.$$

Eftersom båda egenvärdena är positiva är $(0,0)$ en lokal minimipunkt.

$(-\frac{7}{6},\frac{7}{12})$: När $(x,y)=(-\frac{7}{6},\frac{7}{12})$ är Hessianen

$$H_f(-\tfrac{7}{6},\tfrac{7}{12})=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Egenvärdena är

$$\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-7=0$$
$$\Leftrightarrow \qquad \lambda_1=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{29}, \quad \lambda_2=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{29}.$$

Ett egenvärde är negativt (λ_1) och ett egenvärde är positivt (λ_2), vilket betyder att punkten är en sadelpunkt.

Funktionen har alltså ett lokalt minimivärde $f(0,0)=0$ i origo.

801h Bestäm lokala extremvärden till

$$f(x,y)=x^3+y^2-xy-y.$$

Vi har tre typer av punkter att undersöka

1. kritiska punkter,
2. punkter där f inte är differentierbar,
3. randpunkter som tillhör definitionsmängden.

Vi undersöker de tre fallen

1. Gradienten lika med noll ger

$$\nabla f=(3x^2-y,2y-x-1)=(0,0)$$

d.v.s.

$$3x^2-y=0, \qquad (1)$$
$$2y-x-1=0. \qquad (2)$$

Från (1) får vi $y=3x^2$. Detta insatt i (2) ger

$$6x^2-x-1=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x=-\tfrac{1}{3} \quad \text{eller} \quad x=\tfrac{1}{2}.$$

Ekvation (1) ger motsvarande y-värden $y=\frac{1}{3}$ respektive $y=\frac{3}{4}$. Vi får de kritiska punkterna $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ och $(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$.

2. f är ett polynom och därför differentierbar överallt.
3. f är definierad överallt och saknar därmed randpunkter.

Hessianen till f är

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}f''_{xx} & f''_{yx}\\ f''_{xy} & f''_{yy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Vi kan avgöra de kritiska punkternas karaktär genom tecknen hos Hessianens egenvärden.

$(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$: I denna punkt är Hessianen

$$H_f\bigl(-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\bigr)=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

och egenvärdena är

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}-2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-5=0\\ \Leftrightarrow\qquad &\lambda_1=-\sqrt{5},\quad \lambda_2=+\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Punkten är alltså en sadelpunkt eftersom $\lambda_1<0<\lambda_2$.

$(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$: Hessianen har värdet

$$H_f(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4})=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Egenvärdena får vi från sekularekvationen

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+5=0\\ \Leftrightarrow\qquad &\lambda_1=\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{5},\quad \lambda_2=\tfrac{5}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Eftersom λ_1 och λ_2 är positiva är punkten en lokal minimipunkt.

Funktionen har alltså ett lokalt minimivärde $f(\frac{1}{2},\frac{3}{4})=-\frac{7}{16}$ i punkten $(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$.

801k Bestäm lokala extremvärden till

$$f(x,y)=(y-x^2)(y-2x).$$

Ett lokalt extremvärde kan antas i följande typer av punkter

1. kritiska punkter,
2. punkter där f inte är differentierbar, och
3. randpunkter som tillhör definitionsmängden.

Eftersom f är ett polynom så ger fall 2 och 3 inga punkter. Vi undersöker därför endast de kritiska punkterna.

Sätter vi gradienten lika med noll fås

$$\begin{aligned}\nabla f&=\bigl(-2x(y-2x)-2(y-x^2),1\cdot(y-2x)+1\cdot(y-x^2)\bigr)\\ &=\bigl(6x^2-2xy-2y,-x^2-2x+2y\bigr)=(0,0)\end{aligned}$$

d.v.s.

$$6x^2-2xy-2y=0, \tag{1}$$
$$-x^2-2x+2y=0. \tag{2}$$

Vi löser ut y från (2),

$$y=\tfrac{1}{2}x^2+x \tag{3}$$

och vi stoppar in i (1),

$$\begin{aligned}&6x^2-2x\bigl(\tfrac{1}{2}x^2+x\bigr)-2\bigl(\tfrac{1}{2}x^2+x\bigr)=0\\ \Leftrightarrow\qquad &x^3-3x^2+2x=0\\ \Leftrightarrow\qquad &x=0,\quad x=1\quad\text{eller}\quad x=2.\end{aligned}$$

Med (3) får vi motsvarande y-värden

$$y=0,\quad y=\tfrac{3}{2}\quad\text{respektive}\quad y=4.$$

Det finns alltså tre kritiska punkter $(0,0)$, $(1,\frac{3}{2})$ och $(2,4)$.

Vi bestämmer dessa punkters karaktär med Hessianen

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}f''_{xx} & f''_{yx}\\ f''_{xy} & f''_{yy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12x-2y & -2x-2\\ -2x-2 & 2\end{pmatrix}.$$

$(0,0)$: Hessianen har värdet

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

och egenvärdena

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = 1-\sqrt{5}, \quad \lambda_2 = 1+\sqrt{5}.$$

Eftersom $\lambda_1 < 0$ och $\lambda_2 > 0$ är $(0,0)$ en sadelpunkt.

$(1,\frac{3}{2})$: Hessianen har värdet

$$H_f(1,\tfrac{3}{2}) = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

och egenvärdena

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -4 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 11\lambda + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = \tfrac{1}{2}\bigl(11-\sqrt{117}\bigr), \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}\bigl(11+\sqrt{117}\bigr).$$

Eftersom $\lambda_1 > 0$ och $\lambda_2 > 0$ är $(1,\frac{3}{2})$ en lokal minimipunkt.

$(2,4)$: Hessianen har egenvärdena

$$\begin{vmatrix} 16-\lambda & -6 \\ -6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 18\lambda - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = 9-\sqrt{85}, \quad \lambda_2 = 9+\sqrt{85}.$$

Eftersom $\lambda_1 < 0$ och $\lambda_2 > 0$ är $(2,4)$ en sadelpunkt.

Funktionen har alltså ett lokalt minimivärde $f(1,\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$ i punkten $(1,\frac{3}{2})$.

801m Bestäm lokala extremvärden till

$$f(x,y) = \frac{1}{xy} + x + y \quad \text{då } xy \neq 0.$$

Lokala extrempunkter finns bland följande punkter

1. kritiska punkter,
2. punkter där f inte är differentierbar, och
3. randpunkter som tillhör definitionsmängden.

Vi kontrollerar de tre fallen.

1. Sätter vi gradienten lika med noll fås

   $$\nabla f = \Bigl(-\frac{1}{x^2y} + 1, -\frac{1}{xy^2} + 1\Bigr) = (0,0)$$

   d.v.s.

   $$x^2y - 1 = 0, \tag{1}$$
   $$xy^2 - 1 = 0. \tag{2}$$

   Vi kan lösa ut y från (1) (kom ihåg $x \neq 0$)

   $$y = \frac{1}{x^2}. \tag{3}$$

   Instoppat i (2) fås

   $$x \cdot \frac{1}{x^4} - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^3 - 1 = 0$$

   som har den (reella) roten $x = 1$. Motsvarande y-värde får vi från (3), $y = 1$. Funktionen har en kritisk punkt i $(1,1)$.

2. Funktionen f ges av ett elementärt uttryck (rationell funktion) så f är differentierbar överallt där den är definierad.

3. f är definierad överallt utom på x- och y-axeln så dessa punkter är randpunkter. Men eftersom de inte tillhör definitionsmängden kan de inte vara lokala extrempunkter.

Vi undersöker den kritiska punkten genom att beräkna Hessianen,

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{x^3y} & \dfrac{1}{x^2y^2} \\ \dfrac{1}{x^2y^2} & \dfrac{2}{xy^3} \end{pmatrix}.$$

I punkten $(1,1)$ har den värdet

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

och egenvärdena

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Hessianen har alltså två positiva egenvärden och den kritiska punkten är därmed en lokal minimipunkt.

Svaret är alltså att funktionen har ett lokalt minimivärde $f(1,1) = 3$ i punkten $(1,1)$.

801p Bestäm lokala extremvärden till

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3+8}{xy}.$$

Lokala extrempunkter hittar vi bland

1. kritiska punkter,
2. punkter där f inte är differentierbar, och
3. randpunkter som tillhör definitionsområdet.

Vi undersöker dessa tre fall

1. Kritiska punkter uppfyller

$$\begin{aligned}\nabla f &= \Bigl(\frac{3x^2\cdot xy - (x^3+y^3+8)\cdot y}{(xy)^2}, \frac{3y^2\cdot xy - (x^3+y^3+8)\cdot x}{(xy)^2}\Bigr) \\ &= \Bigl(\frac{2x^3-y^3-8}{x^2y}, \frac{2y^3-x^3-8}{xy^2}\Bigr) = (0,0)\end{aligned}$$

d.v.s.

$$2x^3 - y^3 = 8, \qquad (1)$$
$$-x^3 + 2y^3 = 8. \qquad (2)$$

Om vi behandlar x^3 och y^3 som obekanta är (1) och (2) ett linjärt ekvationssystem och Cramers regel ger att

$$x^3 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{8\cdot 2 - (-1)\cdot 8}{2\cdot 2 - (-1)\cdot(-1)} = 8,$$

$$y^3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2\cdot 8 - 8\cdot(-1)}{2\cdot 2 - (-1)\cdot(-1)} = 8,$$

vilket betyder att $x = 2$ och $y = 2$. Punkten $(2,2)$ är den enda kritiska punkten.

2. f ges av ett elementärt uttryck och därför differentierbar överallt där den är definierad.

3. f är definierad överallt utom då $xy \neq 0$, så x- och y-axeln blir randpunkten, men de tillhör inte definitionsmängden.

Vi ska nu bestämma den kritiska punktens karaktär med Hessianens egenvärden. Hessianen är

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

där

$$f''_{xx} = \frac{6x^2 \cdot x^2y - (2x^3 - y^3 - 8) \cdot 2xy}{(x^2y)^2} = \frac{2x^3 + 2y^3 + 16}{x^3y},$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{-3x^2 \cdot xy^2 - (2y^3 - x^3 - 8) \cdot y^2}{(xy^2)^2} = \frac{-2x^3 - 2y^3 + 8}{x^2y^2},$$

$$f''_{yy} = \frac{6y^2 \cdot xy^2 - (2y^3 - x^3 - 8) \cdot 2xy}{(xy^2)^2} = \frac{2x^3 + 2y^3 + 16}{xy^3}.$$

I punkten $(2,2)$ har Hessianen värdet

$$H_f(2,2) = \begin{pmatrix} \frac{2\cdot 2^3+2\cdot 2^3+16}{2^3\cdot 2} & \frac{-2\cdot 2^3-2\cdot 2^3+8}{2^2\cdot 2^2} \\ \frac{-2\cdot 2^3-2\cdot 2^3+8}{2^2\cdot 2^2} & \frac{2\cdot 2^3+2\cdot 2^3+16}{2\cdot 2^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

och egenvärdena

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + \tfrac{27}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = \tfrac{3}{2}, \quad \lambda_2 = \tfrac{9}{2}.$$

Båda egenvärdena är positiva så den kritiska punkten är en lokal minimipunkt.

Funktionen antar alltså det lokala minimivärdet $f(2,2) = 6$ i punkten $(2,2)$.

802b Bestäm lokala extremvärden till

$$f(x,y) = y^2 - 2y - (x-y)^4.$$

Vi ser direkt att f är definierad och differentierbar överallt. Lokala extrempunkter måste alltså vara kritiska punkter.

Sätter vi gradienten lika med noll fås

$$\nabla f = \big(4(x-y)^3, 2y - 2 - 4(x-y)^3 \cdot (-1)\big) = (0,0),$$

d.v.s.

$$4(x-y)^3 = 0, \qquad (1)$$
$$2y - 2 + 4(x-y)^3 = 0. \qquad (2)$$

Från (1) får vi att $x = y$. detta insatt i (2) ger

$$2y - 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 1.$$

Punkten $(1,1)$ är alltså den enda kritiska punkten.

Vi undersöker Hessianens egenvärden i den kritiska punkten. Vi har

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12(x-y)^2 & -12(x-y)^2 \\ -12(x-y)^2 & 2 - 12(x-y)^2 \end{pmatrix}$$

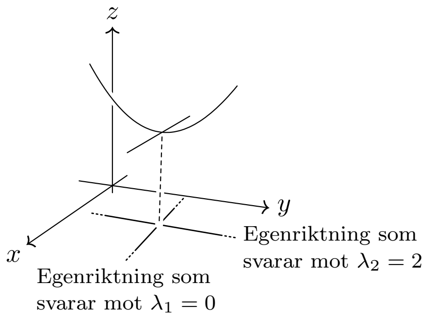
och i punkten $(1,1)$,

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena är

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2.$$

Eftersom ett egenvärde är noll och det andra egenvärdet positivt är den kvadratiska formen s.k. positivt semidefinit. I den riktning egenvärdet är noll ger andra ordningens termer (d.v.s. Hessianen) i Taylorutvecklingen ingen information om funktionens variation kring punkten. Kring punkten $(1,1)$ har alltså funktionen upp till andra ordningen en graf med utseendet



I egenriktningen som svarar mot egenvärdet $\lambda_1 = 0$ måste vi titta på högre ordningars termer i Taylorutvecklingen för att bestämma punktens karaktär.

Egenriktningen med egenvärdet $\lambda_1 = 0$ ges av lösningarna till $H_f(1,1)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Vi gausseliminerar,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \tfrac{1}{2} \quad \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenriktningen är alltså

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nu är funktionen ett polynom så det är enkelt att bestämma Taylorutvecklingen i punkten $(1,1)$ genom att skriva om polynomet i termer av $x-1$ och $y-1$. Vi har

$$\begin{aligned} y^2 - 2y &= (y-1)^2 - 1, \\ (x-y)^4 &= \big((x-1) - (y-1)\big)^4, \end{aligned}$$

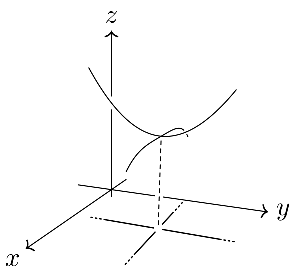
och funktionen är

$$f(x,y) = -1 + (y-1)^2 - \big((x-1)-(y-1)\big)^4.$$

I riktningen $(x-1, y-1) = t(1,0)$ är funktionen

$$f(1+t,1) = -1 - t^4 < -1 \quad \text{för } t \neq 0.$$

I egenriktningen $(1,0)$ ger alltså högre ordningars termer ett negativt bidrag till funktionen, så funktionen har alltså en graf med utseendet.



Den kritiska punkten är därmed en sadelpunkt.

Svaret blir att funktionen saknar lokala extremvärden.

812 Vilka av följande kvadratiska former är definita, indefinita eller semidefinita?

b) $Q(h,k,\ell) = h^2 + k^2 + k\ell,$

d) $Q(h,k,\ell) = 2h^2 + k^2 + \ell^2 + 2hk + k\ell,$

e) $Q(h,k,\ell) = h^2 + 2k^2 + \ell^2 - 2hk - 2k\ell.$

Den kvadratiska formen är

- definit, om den är >0 eller <0 för alla $(h,k,\ell) \neq (0,0,0)$,
- indefinit, om den är >0 i en riktning och <0 i en annan riktning, och
- semidefinit, om den är ≥ 0 eller ≤ 0 för alla $(h,k,\ell) \neq (0,0,0)$ med likhet i åtminstone en riktning.

b) Metod 1 (Egenvärden)

Vi skriver först den kvadratiska formen med en matris

$$Q(h,k,\ell) = \begin{pmatrix} h & k & \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ \ell \end{pmatrix}.$$

Om vi nu uttrycker den kvadratiska formen i matrisens egenvektorbas fås

$$Q(h',k',\ell') = \begin{pmatrix} h' & k' & \ell' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h' \\ k' \\ \ell' \end{pmatrix},$$

där (h',k',ℓ') betecknar koordinater i egenvektorbasen och $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ är matrisens egenvärden.

I denna form är Q enkel att analysera. Vi ser nämligen att

$$Q(h',k',\ell') = \lambda_1(h')^2 + \lambda_2(k')^2 + \lambda_3(\ell')^2$$

är

- definit, om $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ eller $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$,
- indefinit, om det finns två egenvärden med olika tecken,
- semidefinit, om $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ eller $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 0$ där åtminstone en av egenvärdena är noll.

Egenvärdena får vi från matrisens sekularekvation

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} \\
&\qquad = (1-\lambda)\bigl(\lambda^2 - \lambda - \tfrac{1}{4}\bigr) = 0 \\
&\Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\sqrt{2}} < 0, \quad \lambda_2 = 1 > 0, \quad \lambda_3 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\sqrt{2}} > 0.
\end{aligned}$$

Den kvadratiska formen är alltså indefinit.

Metod 2 (Kvadratkomplettering)

Vi kvadratkompletterar en variabel i taget. Eftersom h endast förekommer som en rent kvadratisk term i Q behöver vi inte kvadratkomplettera med avseende på h. När vi kvadratkompletterar nästa variabel k fås

$$Q(h,k,\ell) = h^2 + (k + \tfrac{1}{2}\ell)^2 - \bigl(\tfrac{1}{2}\ell\bigr)^2.$$

Den sista variabeln ℓ förekommer också som en rent kvadratisk term så ingen kvadratkomplettering är nödvändig.

Om vi låter h variera och håller $k + \frac{1}{2}\ell$ och $\frac{1}{2}\ell$ fixa så är Q positiv. Om vi låter ℓ variera och håller h och $k + \frac{1}{2}\ell$ fixa så är Q negativ.

Den kvadratiska formen är alltså indefinit.

Vi måste dock vara försiktiga när vi kvadratkompletterar. T.ex. är den kvadratiska formen

$$Q(h,k,\ell) = h^2 + 2h\ell + 2k^2 + \ell^2$$

lika med

$$Q(h,k,\ell) = (h+k+\ell)^2 + (h-k-\ell)^2 - (h+k)^2,$$

vilket antyder att Q skulle vara indefinit, men det är den inte. Uttrycken $h+k+\ell$, $h-k-\ell$ och $h+k$ är nämligen linjärt beroende och det gör att vi inte kan variera $h+k$ och samtidigt hålla $h+k+\ell$, $h-k-\ell$ fixa. En "korrekt" kvadratkomplettering

$$Q(h,k,\ell) = (h+\ell)^2 + 2k^2$$

avslöjar att Q är (positivt) semidefinit (*inte* definit; vi får inte glömma den tredje kvadrattermen som är noll). (Detta exempel är hämtat från [Kristoferson, Algebra och Geometri II, Stockholm 1974]).

Det är alltså viktigt att kvadratkomplettera en variabel i taget för att få linjärt oberoende basuttryck.

d) Vi kvadratkompletterar en variabel i taget

$$\begin{aligned}
Q(h,k,\ell) &= 2\bigl(h + \tfrac{1}{2}k\bigr)^2 - \tfrac{1}{2}k^2 + k^2 + \ell^2 + k\ell \\
&= 2\bigl(h + \tfrac{1}{2}k\bigr)^2 + \tfrac{1}{2}k^2 + \ell^2 + k\ell \\
&= 2\bigl(h + \tfrac{1}{2}k\bigr)^2 + \tfrac{1}{2}(k+\ell)^2 - \tfrac{1}{2}\ell^2 + \ell^2 \\
&= 2\bigl(h + \tfrac{1}{2}k\bigr)^2 + \tfrac{1}{2}(k+\ell)^2 + \tfrac{1}{2}\ell^2
\end{aligned}$$

så får vi en summa av kvadrater. Den kvadratiska formen är alltså (positivt) definit.

e) Vi sätter igång och kvadratkompletterar,

$$\begin{aligned}
Q(h,k,\ell) &= h^2 + 2k^2 + \ell^2 - 2hk - 2k\ell \\
&= (h-k)^2 - k^2 + 2k^2 + \ell^2 - 2k\ell \\
&= (h-k)^2 + k^2 + \ell^2 - 2k\ell \\
&= (h-k)^2 + (k-\ell)^2 - \ell^2 + \ell^2 \\
&= (h-k)^2 + (k-\ell)^2 + 0 \cdot \ell^2.
\end{aligned}$$

Den kvadratiska formen är alltså (positivt) semidefinit.

815 Sök det största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

Om vi sätter $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ kan problemet formuleras som

$$\begin{aligned} &\max/\min\ f(x,y) \\ &\text{då } g(x,y) = 0. \end{aligned}$$

För problem av denna typ (max/min-problem med likhetsvillkor) där bivillkoret $g(x,y) = 0$ definerar en begränsad kurva (enhetscirkeln i detta fall) antas största och minsta värdet i en av följande punkter

1. kritiska punkter till f på kurvan $g = 0$,
2. singulära punkter på kurvan $g = 0$, d.v.s. punkter där $\nabla g = \mathbf{0}$,
3. punkter där f eller g inte är differentierbara.

Vi undersöker dessa tre fall.

1. f har en kritisk punkt på kurvan $g = 0$ när

$$\nabla f \quad \text{är parallell med} \quad \nabla g.$$

Ett sätt att formulera detta villkor är att det finns en skalär λ så att

$$\nabla f = \lambda\, \nabla g. \tag{$*$}$$

Vi har att

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 1, \qquad & \frac{\partial f}{\partial y} &= 4y, \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y. \end{aligned}$$

Villkoret $(*)$ blir alltså

$$(2x - 1, 4y) = \lambda(2x, 2y).$$

Detta villkor tillsammans med bivillkoret ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 2\lambda x, & (1) \\ 4y &= 2\lambda y, & (2) \\ x^2 + y^2 &= 1. & (3) \end{aligned}$$

Från ekvation (2) får vi två fall.

$y = 0$: Då ger (3) att

$$x^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm 1.$$

Från (1) får vi att

$$\lambda = \frac{2x - 1}{2x} = 1 - \frac{1}{2x} = 1 \mp \tfrac{1}{2}.$$

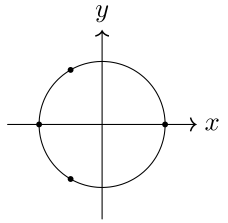
Detta fall ger oss alltså två kritiska punkter $(1,0)$ och $(-1,0)$.

$y \neq 0$: I ekvation (2) kan vi förkorta bort y och får $\lambda = 2$. Detta insatt i (1) ger $x = -\frac{1}{2}$. Ekvation (3) ger

$$\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad y \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Vi får alltså två kritiska punkter $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ och $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

Totalt har vi följande kritiska punkter $(1,0)$, $(-1,0)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ och $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.



2. Singulära punkter på kurvan $g = 0$ uppfyller

$$\nabla g = (2x, 2y) = (0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y = 0,$$

men $(0,0)$ är inte en punkt på kurvan (uppfyller inte $g = 0$).

3. Både f och g är polynom och differentierbara överallt.

Funktionen f antar alltså sitt största respektive minsta värde i en av de kritiska punkterna. Vi behöver alltså bara räkna ut f:s värde i dessa punkter för att bestämma största respektive minsta värdet

$$\begin{aligned} f(1,0) &= 0, & &\text{(minsta värde)} \\ f(-1,0) &= 2, \\ f\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) &= \tfrac{9}{4}, & &\text{(största värde)} \\ f\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) &= \tfrac{9}{4}. \end{aligned}$$

816 Vilka värden kan funktionen f antaga om

a) $f(x,y)=x^2+2y^2$ då $2x^2+y^2=1$,

c) $f(x,y)=xy^2$ då $5x^2+y^2=15$.

Om A är minsta värdet f antar på kurvan och B är f:s största värde på kurvan, då antar f alla värden mellan A och B enligt satsen om mellanliggande värden eftersom f är kontinuerlig och kurvan är sammanhängande. Värdemängden är alltså $[A,B]$.

a) Sätter vi $g(x,y)=2x^2+y^2-1$, då ska vi alltså bestämma

$$\begin{aligned}&\max/\min\ \ f(x,y)\\ &\text{då}\ \ g(x,y)=0.\end{aligned}$$

Målfunktionen f antar sitt största/minsta värde på den kompakta ellipsen $g=0$ i en av följande punkter

1. kritiska punkter (∇f parallell med ∇g),
2. singulära punkter på kurvan $g=0$ ($\nabla g=\mathbf{0}$), och
3. punkter där f eller g inte är differentierbar.

Vi undersöker dessa tre fall.

1. Ett sätt att formulera villkoret att ∇f är parallell med ∇g är att det ska finnas en skalär λ så att

$$\nabla f=\lambda\,\nabla g.$$

Ett annat sätt är att placera ∇f och ∇g som rader i en determinant. Determinanten är noll när ∇f och ∇g är parallella,

$$\begin{vmatrix}\text{—}\,\nabla f\,\text{—}\\ \text{—}\,\nabla g\,\text{—}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & 4y\\ 4x & 2y\end{vmatrix}=-12xy=0.$$

Vi får två fall

$x=0$: Bivillkoret ger då att

$$2\cdot 0^2+y^2=1 \qquad\Leftrightarrow\qquad y=\pm 1.$$

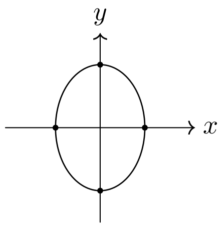
Vi får alltså två punkter $(0,1)$ och $(0,-1)$.

$y=0$: Vi får från bivillkoret

$$2x^2+0^2=1 \qquad\Leftrightarrow\qquad x=\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}},$$

vilket ger två punkter $\bigl(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\bigr)$ och $\bigl(-\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\bigr)$.

De kritiska punkterna är alltså $(0,1)$, $(0,-1)$, $\bigl(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\bigr)$ och $\bigl(-\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\bigr)$.



2. Villkoret $\nabla g=\mathbf{0}$ ger

$$\nabla g=(4x,2y)=(0,0) \qquad\Leftrightarrow\qquad x=y=0.$$

Punkten $(0,0)$ ligger dock inte på kurvan $\bigl(g(0,0)=-1\neq 0\bigr)$.

3. f och g är differentierbara överallt eftersom de är polynom.

Det största och minsta värdet av f finns bland följande värden

$$\begin{aligned} f(0,1)&=2, &&\text{största värde}\\ f(0,-1)&=2,\\ f\bigl(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\bigr)&=\tfrac{1}{2}, &&\text{minsta värde}\\ f\bigl(-\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\bigr)&=\tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Värdemängden till f på kurvan $g=0$ är alltså $\bigl[\tfrac{1}{2},2\bigr]$.

c) Vi sätter $g(x,y)=5x^2+y^2-15$. Problemet

$$\begin{aligned}&\max/\min\ \ f(x,y)\\ &\text{då}\ \ g(x,y)=0.\end{aligned}$$

antar sina lokala kritiska punkter i följande typer av punkter

1. kritiska punkter (∇f parallell med ∇g),
2. singulära punkter på kurvan ($\nabla g=\mathbf{0}$), och

3. punkter där f eller g inte är differentierbara.

Vi tar och undersöker dess punkter.

1. I en kritisk punkt är ∇f parallell med ∇g. Om vi placerar dem som rader i en determinant är de parallella omm determinanten är noll,

$$\begin{vmatrix} -\nabla f- \\ -\nabla g- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y^2 & 2xy \\ 10x & 2y \end{vmatrix} = 2y^3 - 20x^2 y$$
$$= 2y(y^2 - 10x^2) = 2y(y - \sqrt{10}x)(y + \sqrt{10}x) = 0.$$

Detta bivillkor ger oss tre fall.

$y = 0$: Bivillkoret ger då att

$$5x^2 + 0^2 = 15 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm\sqrt{3},$$

d.v.s. två punkter $(\sqrt{3}, 0)$ och $(-\sqrt{3}, 0)$.

$y = \sqrt{10}\,x$: Från bivillkoret får vi

$$5x^2 + 10x^2 = 15 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -1 \quad \text{eller} \quad x = +1,$$

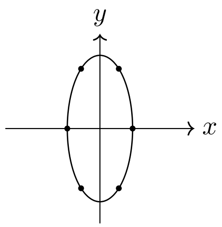
och motsvarande y-värden är $y = -\sqrt{10}$ respektive $y = \sqrt{10}$. Detta fall ger oss två punkter $(-1, -\sqrt{10}\,)$ och $(1, \sqrt{10}\,)$.

$y = -\sqrt{10}\,x$: Bivillkoret ger att

$$5x^2 + 10x^2 = 15 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -1 \quad \text{eller} \quad x = 1.$$

Motsvarande y-värden är $y = \sqrt{10}$ respektive $y = -\sqrt{10}$. Vi får två punkter $(-1, \sqrt{10}\,)$ och $(1, -\sqrt{10}\,)$.

Sammanlagt har vi följande kritiska punkter $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(-1, -\sqrt{10}\,)$, $(1, \sqrt{10}\,)$, $(-1, \sqrt{10}\,)$ och $(1, -\sqrt{10}\,)$.



2. Kurvan $g = 0$, är singulär i punkter där

$$\nabla g = (10x, 2y) = (0, 0) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y = 0,$$

men $(0, 0)$ ligger inte på kurvan ($g(0, 0) = -15 \neq 0$).

3. f och g är polynom varför de är differentierbara överallt.

Funktionens största och minsta värde på kurvan $g = 0$ är bland följande värden

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}, 0) &= 0, \\ f(-\sqrt{3}, 0) &= 0, \\ f(-1, -\sqrt{10}) &= -10, \quad && \text{minsta värde} \\ f(1, \sqrt{10}) &= 10, && \text{största värde} \\ f(-1, \sqrt{10}) &= -10, \\ f(1, -\sqrt{10}) &= 10. \end{aligned}$$

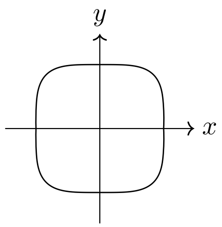
Värdemängden till f på kurvan $g = 0$ är därmed $[-10, 10]$.

819a Bestäm värdemängden till funktionen

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2$$

om $x^4 + y^4 = 17$.

Eftersom funktionen f är kontinuerlig och $x^4 + y^4 = 17$ definierar en sammanhängande kurva,



ger satsen om mellanliggande värden att f antar alla värden mellan sitt minsta och största värde.

Sätt $g(x,y) = x^4 + y^4 - 17$. Vi ska alltså lösa följande problem

$$\begin{aligned} &\max/\min \;\; f(x,y) \\ &\text{då} \;\; g(x,y) = 0. \end{aligned}$$

Vi har då att undersöka följande punkter.

1. kritiska punkter (∇f parallell med ∇g),
2. singulära punkter på kurvan $g = 0$ ($\nabla g = \mathbf{0}$), och
3. punkter där f eller g inte är differentierbara.

Vi undersöker.

1. I de kritiska punkterna är ∇f parallell med ∇g, vilket är detsamma som att

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \text{—}\,\nabla f\,\text{—} \\ \text{—}\,\nabla g\,\text{—} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 8y \\ 4x^3 & 4y^3 \end{vmatrix} &= 8xy^3 - 32x^3y \\ = 8xy(y^2 - 4x^2) &= 8xy(y-2x)(y+2x) = 0. \end{aligned}$$

Denna ekvation är uppfylld när en av dess faktorer är noll.

$x = 0$: Bivillkoret ger då att

$$0^4 + y^4 = 17 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \pm\sqrt[4]{17},$$

och vi får punkterna $(0, \sqrt[4]{17})$ och $(0, -\sqrt[4]{17})$.

$y = 0$: Bivillkoret ger att

$$x^4 + 0^4 = 17 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm\sqrt[4]{17},$$

och vi får punkterna $(\sqrt[4]{17}, 0)$ och $(-\sqrt[4]{17}, 0)$.

$y = 2x$: Bivillkoret ger att

$$x^4 + 16x^4 = 17 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm 1.$$

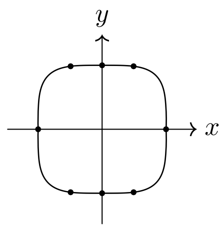
Motsvarande y-värden är $y = \pm 2$. Vi får alltså punkterna $(1,2)$ och $(-1,-2)$.

$y = -2x$: Bivillkoret ger att

$$x^4 + 16x^4 = 17 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm 1.$$

Motsvarande y-värden är $y = \mp 2$. Vi får alltså punkterna $(1,-2)$ och $(-1,2)$.

Kritiska punkter är således $(0, \sqrt[4]{17}\,)$, $(0, -\sqrt[4]{17}\,)$, $(\sqrt[4]{17}, 0)$, $(-\sqrt[4]{17}, 0)$, $(1,2)$, $(-1,-2)$, $(1,-2)$ och $(-1,2)$.



2. Singulära punkter på kurvan $g = 0$ ges av

$$\nabla g = (4x^3, 4y^3) = (0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y = 0$$

som inte tillhör kurvan.

3. Både f och g är differentierbara överallt i och med att de är polynom.

f:s största och minsta värde har vi att söka bland följande värden

$$\begin{aligned} f(0, \sqrt[4]{17}\,) &= 4\sqrt{17}, \\ f(0, -\sqrt[4]{17}\,) &= 4\sqrt{17}, \\ f(\sqrt[4]{17}, 0) &= \sqrt{17}, && \text{minsta värde} \\ f(\sqrt[4]{17}, 0) &= \sqrt{17}, \\ f(1,2) &= 17, && \text{största värde} \\ f(-1,-2) &= 17, \\ f(1,-2) &= 17, \\ f(-1,2) &= 17. \end{aligned}$$

Värdemängden är alltså $[\sqrt{17}, 17]$.

822a Vilken är den maximala produkten av tre positiva tal med summan 6?

KAlla de tre talen för x, y och z. Då ska vi alltså maximera produkten xyz när $x+y+z=6$ och x,y,z är positiva. Problemet kan därmed formuleras som

$$\begin{aligned}&\max \quad xyz\\ &\text{då} \quad \begin{cases} x+y+z=6\\ x,y,z>0\end{cases}\end{aligned}$$

Om vi sätter $f(x,y,z)=xyz$ och $g(x,y,z)=x+y+z-6$ så antar f sitt största värde på ytan $g=0$ i en av följande punkter:

1. kritiska punkter (∇f parallell med ∇g),
2. singulära punkter på ytan $g=0$ (d.v.s. $\nabla g=\mathbf{0}$), och
3. punkter där f eller g inte är differentierbar.

Notera att tilläggsvillkoren $x,y,z>0$ inte introducerar några nya randpunkter eftersom villkoren är öppna '$>$' och inte '$\geq$' vilket gör att eventuellt nya randpunkter inte tillhör mängden av tillåtna punkter.

Vi undersöker nu de tre fallen.

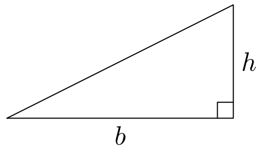
1. Att ∇f och ∇g ska vara parallella kan vi skriva som
$$\nabla f=\lambda\nabla g,$$
för någon skalär λ. Detta ger
$$(yz,xz,xy)=\lambda(1,1,1),$$
d.v.s. $yz=xz=xy=\lambda$. Dessa villkor tillsammans med bivillkoret ger ekvationssystemet
$$\begin{aligned} yz&=xz, && (1)\\ xz&=xy, && (2)\\ x+y+z&=6. && (3)\end{aligned}$$
Eftersom $x,y,z>0$ ger (1) och (2) att
$$y=x,\quad z=y \qquad\Leftrightarrow\qquad x=y=z.$$
Detta insatt i (3) ger
$$3x=6\qquad\Leftrightarrow\qquad x=2.$$
Punkten $(x,y,z,)=(2,2,2)$ är alltså den enda kritiska punkten.
2. Vi har att $\nabla g=(1,1,1)\neq(0,0,0)$.
3. f och g är differentierbara överallt.

Det största värdet f antar är alltså $f(2,2,2)=8$.

Anm. f antar faktiskt inget minsta värde i området utan $f>0$ överallt men $f\to 0$ när x, y eller $z\to 0$.

822b Vilken är den maximala arean en rätvinklig triangel med omkretsen 2?

Låt oss kalla triangelns bas för b och dess höjd för h.



Hypotenusan blir då $\sqrt{b^2+h^2}$ enligt Pythagoras sats, och triangelns omkrets blir
$$b+h+\sqrt{b^2+h^2}.$$
Vi ska alltså bestämma det största värdet arean $\frac{1}{2}bh$ kan anta då omkretsen uppfyller
$$b+h+\sqrt{b^2+h^2}=2.$$
Lite mer kortfattat lyder problemet
$$\begin{aligned}&\max \quad \tfrac{1}{2}bh\\ &\text{då} \quad b+h+\sqrt{b^2+h^2}=2\end{aligned}$$
under förutsättning att $b,h\geq 0$. Det största värdet $f(b,h)=\frac{1}{2}bh$ kan anta under bivillkoret $g(b,h)=b+h+\sqrt{b^2+h^2}-2=0$ görs i en av följande punkter

1. kritiska punkter (∇f parallell med ∇g),
2. singulära punkter på kurvan $g = 0$ ($\nabla g = \mathbf{0}$),
3. punkter där f eller g inte är differentierbar, och
4. ändpunkter till kurvan $g = 0$.

Vi har fått ytterligare ett fall att undersöka p.g.a. att villkoren $b, h \ge 0$ "hugger av" kurvan $g = 0$ och ger ändpunkter som kan vara extrempunkter. Vi undersöker dessa fall.

1. Parallellvillkoret mellan ∇f och ∇g kan vi skriva som

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} —\nabla f— \\ —\nabla g— \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}h & \frac{1}{2}b \\ 1-\dfrac{b}{\sqrt{b^2+h^2}} & 1-\dfrac{h}{\sqrt{b^2+h^2}} \end{vmatrix} \\
&= \tfrac{1}{2}h - \frac{h^2}{2\sqrt{b^2+h^2}} - \tfrac{1}{2}b + \frac{b^2}{2\sqrt{b^2+h^2}} \\
&= \tfrac{1}{2}(h-b)\Bigl(1+\frac{h+b}{\sqrt{b^2+h^2}}\Bigr) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & h = b \quad \text{eller} \quad 1+\frac{h+b}{\sqrt{b^2+h^2}} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & h = b \quad \text{eller} \quad \sqrt{b^2+h^2}+h+b = 0.
\end{aligned}$$

Detta ger att $h = b$. Den andra möjligheten strider nämligen mot omkretsvillkoret.

Bivillkoret ger då att

$$b + b + \sqrt{b^2+b^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad (2+\sqrt{2}\,)b = 2$$
$$\Leftrightarrow \quad b = \frac{2}{2+\sqrt{2}}.$$

Kritisk punkt är $(b, h) = \bigl(\frac{2}{2+\sqrt{2}}, \frac{2}{2+\sqrt{2}}\bigr)$.

2. Singulära punkter måste uppfylla

$$\nabla g = \Bigl(1-\frac{b}{\sqrt{b^2+h^2}}, 1-\frac{h}{\sqrt{b^2+h^2}}\Bigr) = (0,0)$$

d.v.s.

$$1-\frac{b}{\sqrt{b^2+h^2}} = 0, \qquad (1)$$
$$1-\frac{h}{\sqrt{b^2+h^2}} = 0. \qquad (2)$$

Detta ger $b = h = \sqrt{b^2+h^2}$ vilket betyder att $b = h = 0$ men detta strider mot bivillkoret.

3. f är differentierbar överallt medan g är differentierbar överallt utom i $(b, h) = (0, 0)$, men den punkten ligger inte på kurvan $g = 0$.

4. Kurvan $g = 0$ får ändpunkter där någon av olikheterna $b, h \ge 0$ är uppfylld med likhet.

   $b = 0$: Bivillkoret ger då att $h = 1$, d.v.s. vi får punkten $(0, 1)$.

   $h - 0$: Bivillkoret ger att $b = 1$, d.v.s. vi får punkten $(1, 0)$.

Maximal area är alltså det största av följande värden

$$\begin{aligned}
f\bigl(\tfrac{2}{2+\sqrt{2}}, \tfrac{2}{2+\sqrt{2}}\bigr) &= \tfrac{1}{3+2\sqrt{2}} = 3-2\sqrt{2}, \quad \text{störst värde} \\
f(0,1) &= 0, \\
f(1,0) &= 0.
\end{aligned}$$

824 Kan summan av tre positiva tal vara 5 om deras produkt är 8?

Om vi inför beteckningarna x, y och z för de tre talen så ska vi undersöka om uttrycket $x + y + z$ kan anta värdet 5 om vi har bivillkoret $xyz = 8$. Mera matematiskt ska vi alltså undersöka om talet 5 ingår i värdemängden till funktionen $f(x, y, z) = x + y + z$ på ytan $g(x, y, z) = xyz - 8$.

Funktionen f är kontinuerlig och ytan $g = 0$ är sammanhängande i första oktanten så värdemängden till f på $g = 0$ är alla värden mellan f:s minsta och största värde på $g = 0$. Vi får alltså reda på svaret genom att lösa problemet

$$\max/\min \quad f(x,y,z)$$
$$\text{då} \quad \begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ x,y,z \geq 0 \end{cases}$$

Denna typ av problem har sina lokala extrempunkter bland följande punkter

1. kritiska punkter (∇f parallell med ∇g),
2. singulära punkter på ytan $g = 0$ ($\nabla g = \mathbf{0}$),
3. punkter där f eller g inte är differentierbar, och
4. randpunkter till ytan $g = 0$.

Vi undersöker dessa fyra fall.

1. Vi kan uttrycka villkoret att ∇f och ∇g är parallella med determinantvillkoret

$$\begin{vmatrix} \text{---}\nabla f\text{---} \\ \text{---}\nabla g\text{---} \\ a \quad b \quad c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

som måste gälla för alla (a,b,c) eftersom de två översta raderna är linjärt beroende om de är parallella. Kofaktorutvecklingen längs tredje raden ger

$$a\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ xz & xy \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ yz & xy \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ yz & xz \end{vmatrix} = 0.$$

Eftersom a, b och c kan väljas fritt måste de tre minorerna vara noll,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ xz & xy \end{vmatrix} = xy - xz = x(y-z) = 0,$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ yz & xy \end{vmatrix} = xy - yz = y(x-z) = 0,$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ yz & xz \end{vmatrix} = xz - yz = z(x-y) = 0.$$

Tillsammans med bivillkoret ger detta ekvationssystemet

$$x(y-z) = 0, \tag{1}$$
$$y(x-z) = 0, \tag{2}$$
$$z(x-y) = 0, \tag{3}$$
$$xyz = 8. \tag{4}$$

Ekvation (4) ger att ingen av x, y eller z är noll. Då ger (1), (2) och (3) att $x = y = z$ och (4) att

$$x^3 = 8 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 2.$$

Vi har alltså en kritisk punkt $(2,2,2)$.

2. I en singulär punkt ska gälla att

$$\nabla g = (yz, xz, xy) = (0,0,0)$$

som tillsammans med bivillkoret ger

$$yz = 0, \tag{5}$$
$$xz = 0, \tag{6}$$
$$xy = 0, \tag{7}$$
$$xyz = 8. \tag{8}$$

Detta system saknar lösning eftersom t.ex. (7) och (8) inte kan vara uppfyllda samtidigt.

3. f är differentierbar överallt.

4. Ytan $g = 0$ begränsas av olikheterna $x,y,z \geq 0$, men notera att ytan $g = 0$ inte har några punkter med $x = 0$, $y = 0$ eller $z = 0$, så tilläggsvillkoren $x,y,z \geq 0$ introducerar inga randpunkter (utan sorterar bara bort komponenter av ytan $g = 0$ i de andra oktanterna).

Funktionen f har alltså ett lokalt extremvärde

$$f(2,2,2) = 2 + 2 + 2 = 6$$

på ytan $g = 0$. Eftersom ytan $g = 0$ inte är kompakt (inte begränsad) måste vi även undersöka f:s gränsvärde när x, y eller $z \to \infty$. Vi ser direkt att om detta inträffar så går $f \to \infty$. Värdemängden till f på $g = 0$ är alltså $[6, \infty)$ och eftersom talet 5 inte ingår i denna mängd blir svaret nekande.

838a Bestäm det största och minsta värdet av funktionen

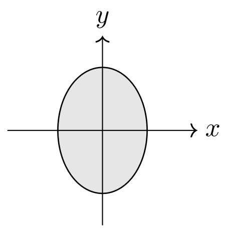
$$f(x,y) = x^2 + 2y^2$$

då $2x^2 + y^2 \le 1$.

Om vi skriver om bivillkoret något

$$\left(\frac{x}{1/\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 \le 1$$

så ser vi att det område som bivillkoret definierar är insidan och randen av en ellips med mittpunkt i origo och halvaxlar $\frac{1}{\sqrt{2}}$ och 1.



Detta område är en kompakt mängd (sluten och begränsad) så funktionen f har ett största och minsta värde i mängden. Dessa två värden antas i en lokal extrempunkt, d.v.s. i en av följande punkter

1. kritiska punkter (i en inre punkt),
2. punkter där f inte är differentierbar, och
3. randpunkter som tillhör området.

Vi undersöker de tre fallen.

1. I en kritisk punkt är gradienten till f noll,

$$\nabla f = (2x, 4y) = (0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad (x,y) = (0,0)$$

   och denna punkt ligger inom mängden (bivillkoret uppfyllt).

2. f är differentierbar överallt.

3. På randen av området är bivillkoret uppfyllt med likhet, så vi har alltså problemet

$$\begin{aligned} &\max/\min \;\; f(x,y),\\ &\text{då} \;\; g(x,y) = 0, \end{aligned}$$

   där $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 1$. Detta problem har vi faktiskt redan löst i uppgift 816a och kom fram till följande möjliga lokala extrempunkter $(0,1)$, $(0,-1)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ och $(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$.

Det största och minsta värdet till f i området är alltså bland följande värden

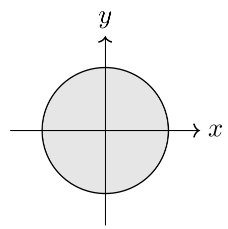
$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0, &&\text{minsta värdet}\\ f(0,1) &= 2, &&\text{största värdet}\\ f(0,-1) &= 2,\\ f(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0) &= \tfrac{1}{2},\\ f(-\tfrac{1}{\sqrt{2}},0) &= \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

838b Bestäm det största och minsta värdet av funktionen

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - x$$

då $x^2 + y^2 \le 1$.

Bivillkoret definierar området innanför enhetscirkeln och med randcirkeln inkluderad.



Eftersom detta område är kompakt kan vi garantera att f verkligen antar ett största och minsta värde i området.

De punkter där f är störst respektive minst är lokala extrempunkter och finns med bland följande punkter

1. kritiska punkter,
2. punkter där f inte är differentierbar, och
3. randpunkter som tillhör området.

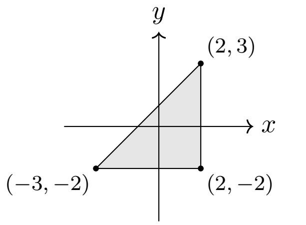
Vi bestämmer dessa punkter.

1. Gradienten av f lika med noll ger
$$\nabla f = (2x-1, 4y) = (0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad (x,y) = (\tfrac{1}{2}, 0).$$
2. f är ett polynom och därför differentierbar överallt.
3. Randpunkterna till området uppfyller bivillkoret med likhet. På randen har vi alltså problemet
$$\begin{aligned} &\max/\min \;\; f(x,y),\\ &\text{då} \;\; x^2+y^2=1. \end{aligned}$$
Detta problem löste vi i uppgift 815 och fick kandidatpunkterna $(1,0)$, $(-1,0)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\,)$ och $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,)$.

Det största respektive minsta värdet är alltså en av följande värden
$$\begin{aligned} f(\tfrac{1}{2},0) &= -\tfrac{1}{4} && \text{minsta värde}\\ f(1,0) &= 0, \\ f(-1,0) &= 2, \\ f(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,) &= \tfrac{9}{4} && \text{största värde}\\ f(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,) &= \tfrac{9}{4}. \end{aligned}$$

838f Bestäm det största och minsta värdet av funktionen
$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y$$
i den slutna triangeln med hörn i punkterna $(2,-1)$, $(2,3)$ och $(-3,-2)$.

Om vi ritar upp triangeln



så kan vi relativt enkelt bestämma kantlinjerna till

i. $\quad (x,y) = (-3,-2) + t(5,0), \qquad (0 \le t \le 1)$,

ii. $\quad (x,y) = (2,-2) + t(0,5), \qquad (0 \le t \le 1)$, och

iii. $\quad (x,y) = (-3,-2) + t(5,5), \qquad (0 \le t \le 1)$.

Den slutna triangeln är en kompakt mängd så den kontinuerliga målfunktionen f har verkligen ett största och minsta värde i triangeln.

Vi undersöker nu de tre typer av punkter där f kan ha lokala extrempunkter.

1. Kritiska punkter.

   Sätter vi gradienten till f lika med noll fås
$$\nabla f = (2x-2y, -2x+4y-2) = (0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} 2x-2y &= 0,\\ -2x+4y &= 2, \end{aligned}$$
   och detta linjära ekvationssystem har lösningen $(x,y) = (1,1)$ som ligger inom triangeln.
2. Ej differentierbara punkter.

   f är differentierbar överallt.
3. Randpunkter.

   Randen består av tre kantlinjer och vi undersöker f på dessa linjer.

i. På linjen $(x,y) = (-3,-2) + (5,0) = (-3+5t,-2)$, $(0 \le t \le 1)$, är f lika med

$$\begin{aligned} g(t) = f(x,y) &= (-3+5t)^2 - 2(-3+5t)\cdot(-2) \\ &\quad + 2\cdot(-2)^2 - 2\cdot(-2) \\ &= 9 - 30t + 25t^2 - 12 + 20t + 8 + 4 \\ &= 25t^2 - 10t + 9. \end{aligned}$$

Funktionen g antar max och min bland följande punkter

(a) kritiska punkter $g'(t) = 50t - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{5}$,
(b) icke-deriverbara punkter, som det inte finns några av, och
(c) ändpunkterna $t = 0$ och $t = 1$.

Dessa punkter svarar mot $(-2,-2)$, $(-3,-2)$ och $(2,-2)$.

ii. På linjen $(x,y) = (2,-2) + t(0,5)$, $0 \le t \le 1$, är f lika med

$$\begin{aligned} g(t) = f(2,-2+5t) &= 2^2 - 2\cdot 2\cdot(-2+5t) \\ &\quad + 2\cdot(-2+5t)^2 - 2\cdot(-2+5t) \\ &= 4 + 8 - 20t + 8 - 20t + 50t^2 + 4 - 10t \\ &= 50t^2 - 50t + 24. \end{aligned}$$

Funktionen g antar max och min bland följande punkter

(a) kritiska punkter $g'(t) = 100t - 50 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2}$,
(b) icke-deriverbara punkter, existerar inte,
(c) ändpunkterna $t = 0$ och $t = 1$.

Dessa punkter svarar mot $(2,-2)$, $(2,\frac{1}{2})$ och $(2,3)$.

iii. På linjen $(x,y) = (-3,-2) + t(5,5)$, $0 \le t \le 1$, är f lika med

$$\begin{aligned} g(t) &= f(-3+5t,-2+5t) \\ &= (-3+5t)^2 - 2\cdot(-3+5t)(-2+5t) \\ &\quad + 2(-2+5t)^2 - 2\cdot(-2+5t) \\ &= 25t^2 - 30t + 9. \end{aligned}$$

Funktionen g antar max och min bland följande punkter

(a) kritiska punkter $g'(t) = 50t - 30 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{3}{5}$,
(b) icke-deriverbara punkter, saknas,
(c) ändpunkterna $t = 0$ och $t = 1$.

Dessa punkter svarar mot $(-3,-2)$, $(0,1)$ och $(2,3)$.

Funktionens största och minsta värde i triangeln är alltså det största respektive minsta värdet bland följande värden

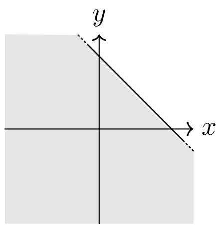
$$\begin{aligned} f(1,1) &= -1, \quad \text{minsta värde} \\ f(-2,-2) &= 8, \\ f(-3,-2) &= 9, \\ f(2,-2) &= 24, \\ f(2,\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{3}{2}, \\ f(2,3) &= 4, \\ f(0,1) &= 0. \end{aligned}$$

838h Bestäm det största och minsta värdet av funktionen

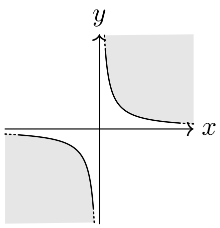
$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

då $x + y \le 10$, $xy \ge 9$ och $x > 0$.

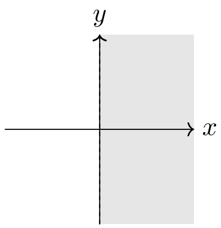
Området består av alla punkter (x,y) som uppfyller de tre olikheterna,



$x + y \le 10$

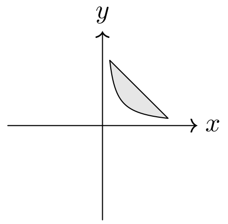


$xy \ge 9$



$x > 0$

d.v.s. området blir följande slutna mängd



som begränsas av kurvorna $x+y=10$ och $xy=9$.

Funktionen f antar största och minsta värde i en av följande punkter.

1. kritiska punkter,
2. punkter där f inte är differentierbar, och
3. randpunkter.

1. Gradienten lika med noll ger den kritiska punkten

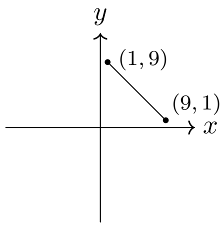
$$\nabla f = (2x, 2y) = (0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad (x,y) = (0,0)$$

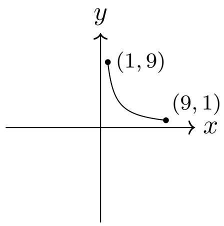
som inte tillhör området.

2. f är differentierbar överallt.

3. Området begränsas av två randkurvor $x+y=10$ och $xy=9$, så vi ska bestämma max/min av f på de två kurvavsnitt som ligger mellan skärningspunkterna

$$\begin{cases} x+y=10 \\ xy=9 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad (x,y)=(1,9) \quad \text{eller} \quad (x,y)=(9,1).$$





Vi ska alltså lösa de två problemen

$$\text{(I)} \quad \begin{array}{l} \max \;\; f(x,y), \\ \text{då} \;\; x+y=10, \end{array} \qquad \text{och} \qquad \text{(II)} \quad \begin{array}{l} \max \;\; f(x,y), \\ \text{då} \;\; xy=9. \end{array}$$

I Med $g(x,y) = x+y-10$ blir bivillkoret $g(x,y)=0$. Lokala extrempunkter kan finnas bland följande punkter

(a) kritiska punkter (∇f parallell med ∇g),
(b) singulära punkter på kurvan $g=0$ ($\nabla g = \mathbf{0}$),
(c) punkter där f eller g inte är differentierbar, och
(d) ändpunkter till kurvan.

Vi undersöker dessa fall

(a) I en kritisk punkt är ∇f parallell med ∇g vilket är detsamma som att

$$\begin{vmatrix} \text{—}\,\nabla f\,\text{—} \\ \text{—}\,\nabla g\,\text{—} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x-y) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y.$$

Bivillkoret ger då att

$$x + x = 10 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 5.$$

Kritisk punkt är alltså $(5,5)$.

(b) Kurvan är singulär där

$$\nabla g = (1,1) = (0,0)$$

vilket inte inträffar i någon punkt.

(c) f och g är differentierbara överallt.

(d) Ändpunkter till kurvan är $(1,9)$ och $(9,1)$.

II Nu sätter vi $g(x,y) = xy-9$ och bivillkoret blir $g(x,y)=0$. På denna kurva har f lokala extrempunkter bland

(a) kritiska punkter (∇f parallella med ∇g),
(b) singulära punkter på kurvan $g=0$ ($\nabla g = \mathbf{0}$),
(c) punkter där f eller g inte är differentierbar, och
(d) ändpunkter till kurvan.

Vi undersöker dessa fall

(a) ∇f är parallell med ∇g omm

$$\begin{vmatrix} \text{—}\,\nabla f\,\text{—} \\ \text{—}\,\nabla g\,\text{—} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2(x+y)(x-y) = 0$$

vilket ger två fall

$x+y=0$: Då är $y=-x<-0$ vilket strider mot bivillkoret $xy=9$.

$x-y=0$: Då är $x=y$ och bivillkoret ger

$$x^2=9 \qquad \Leftrightarrow \qquad x=3.$$

Detta ger den kritiska punkten $(3,3)$.

(b) Kurvan är singulär där

$$\nabla g=(y,x)=(0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad (x,y)=(0,0)$$

som inte ligger på kurvan.

(c) f och g är differentierbara överallt.

(d) Ändpunkterna är $(1,9)$ och $(9,1)$.

Funktionen f:s största och minsta värde finns alltså bland följande värden

$$\begin{aligned} &f(5,5)=50, \\ &f(3,3)=18, \quad \text{minsta värde} \\ &f(1,9)=82, \quad \text{största värde} \\ &f(9,1)=82. \end{aligned}$$

MKV 1.1e & 1.3e Skriv upp normalekvationen till systemet

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

och ange minstakvadratlösningen.

Vi får normalekvationen genom att multiplicera båda led med koefficientmatrisens transponat

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

vilket ger systemet

$$14x=4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x=\tfrac{2}{7}$$

vilket är MKV-lösningen.

MKV 1.1h & 1.3h Skriv upp normalekvationen till systemet

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$$

och ange minstakvadratlösningen.

Normalekvationen fås genom att multiplicera båda led med koefficientmatrisens transponat

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$$

vilket ger systemet

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Vi kan direkt avläsa MKV-lösningen $x_1=1$, $x_2=0$.

MKV 1.9 Bestäm ekvationen för den räta linje $y = kx + \ell$ som i minstakvadratmening bästa anpassar till punkterna $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$ och $(3,8)$. Bestäm också medelfelet.

Vi ställer upp det ekvationssystem vi skulle ha om alla fyra punkter låg på linjen

$$\begin{aligned} k \cdot 0 + \ell &= 0 \\ k \cdot 1 + \ell &= 1 \\ k \cdot 2 + \ell &= 1 \\ k \cdot 3 + \ell &= 8 \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Minstakvadratlösningen får vi genom att lösa normalekvationen. Multiplicera båda led med koefficientmatrisens transponant

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

och vi får normalekvationen

$$\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Detta ekvationssystem har lösningen $k = \frac{12}{5}$ och $\ell = -\frac{11}{10}$. MKV-linjen är alltså

$$y = \tfrac{12}{5}x - \tfrac{11}{10}.$$