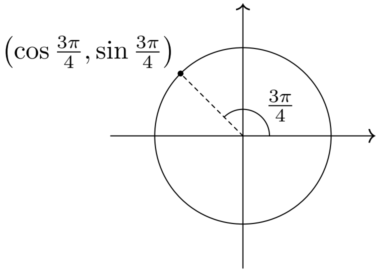
Inledande kurs i matematik, avsnitt P.6

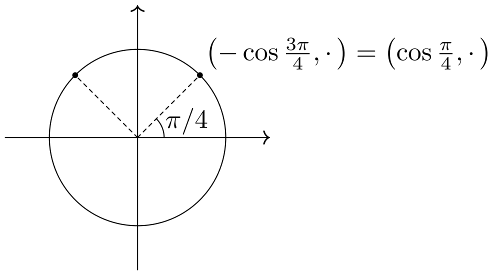
P.6.1 Beräkna $\cos \frac{3\pi}{4}$.

Vi ska använda enhetscirkeln och symmetrier i denna för att bestämma $\cos \frac{3\pi}{4}$.

Den punkt på enhetscirkeln med vinkeln $\frac{3\pi}{4}$ har koordinater $(\cos \frac{3\pi}{4}, \sin \frac{3\pi}{4})$.



Genom att spegla punkten i y-axeln får vi en punkt i första kvadranten med x-koordinaten $-\cos \frac{3\pi}{4}$ (men oförändrad y-koordinat). Denna punkt har vinkeln $\frac{\pi}{4}$ (som är spegelvinkeln till $\frac{3\pi}{4}$ i y-axeln), och därmed x-koordinaten $\cos \frac{\pi}{4}$.

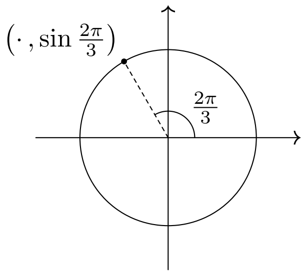


Alltså är

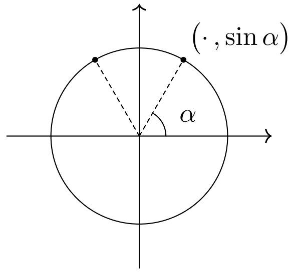
$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

P.6.3 Beräkna $\sin \frac{2\pi}{3}$.

Vi ritar upp enhetscirkeln och vinkeln $\frac{2\pi}{3}$.



Vi kan använda spegling i y-axeln för att uttrycka $\sin \frac{2\pi}{3}$ med spegelvinkeln i första kvadranten. Om α är spegelvinkeln då är



$$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \alpha.$$

Vi ser vad $\frac{2\pi}{3}$:s spegelvinkel är genom att skriva

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{6} = \frac{3\pi + \pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6},$$

för då är

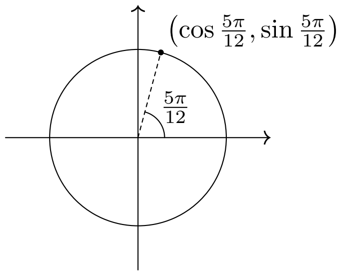
$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi - \pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Alltså är

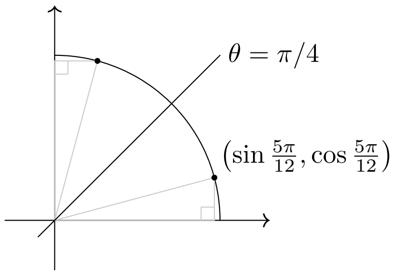
$$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

P.6.5 Beräkna $\cos\frac{5\pi}{12}$.

Vi ritar upp vinkeln $\frac{5\pi}{12}$ i enhetscirkeln.



Genom att spegla punkten i diagonallinjen (vinkeln $\frac{\pi}{4}$) får vi en spegelpunkt med x- och y-koordinater ombytta jämfört punkten (se trianglarna i figuren), d.v.s. spegelpunkten har koordinaterna $\left(\sin\frac{5\pi}{12}, \cos\frac{5\pi}{6}\right)$.



Spegelvinkeln α får vi genom att skriva

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{3\pi + 2\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6},$$

för då är

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi - 2\pi}{12} = \frac{\pi}{12},$$

och vi har att $\cos\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12}$. För att bestämma $\sin\frac{\pi}{12}$ noterar vi att $\frac{\pi}{12}$ är hälften av vinkeln $\frac{\pi}{6}$ som vi kan cosinus- och sinusvärdena till. Med formeln för halva vinkeln

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

har vi att

$$|\sin\theta| = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}.$$

Alltså är

$$\left|\sin\frac{\pi}{12}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{2}}.$$

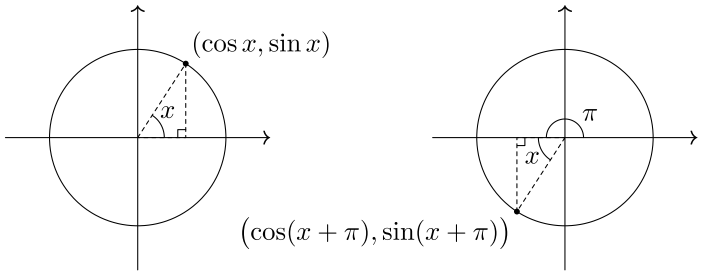
Eftersom vinkeln $\pi/12$ är i första kvadranten är $\sin\frac{\pi}{12} > 0$, och vi har att

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12} = \left|\sin\frac{\pi}{12}\right| = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{2}}.$$

Anm. I facit ges svaret $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$ som är lika med vårt svar. (Extrauppgift: Visa detta.)

P.6.7 Uttryck $\cos(\pi + x)$ i termer av $\cos x$ och $\sin x$.

Vinkeln $\pi + x$ är vinkeln x roterad ett halvt varv, varför de två trianglarna nedan är kongruenta.

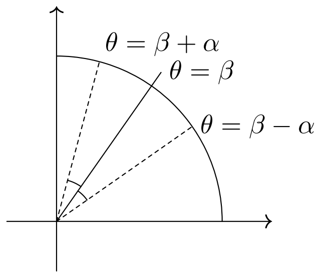


Sidlängderna lika ger att $\cos(\pi + x) = -\cos x$.

P.6.9 Uttryck $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ i termer av $\cos x$ och $\sin x$.

Vinklarna $\frac{3\pi}{2} - x$ och x har formen av att vara varandras spegelvinklar kring någon mittvinkel. Vi vill alltså kunna hitta α och β så att

$$\begin{aligned} \tfrac{3\pi}{2} - x &= \beta + \alpha, \qquad (1)\\ x &= \beta - \alpha. \qquad (2) \end{aligned}$$



$(1) + (2)$ ger $\frac{3\pi}{2} = 2\beta \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \frac{3\pi}{4}$.

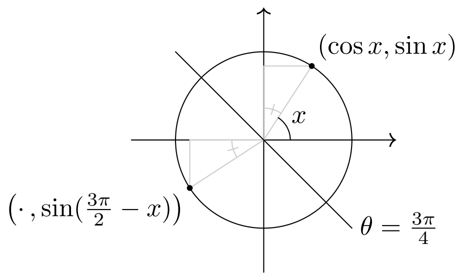
$(1) - (2)$ ger $\frac{3\pi}{2} - 2x = 2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{3\pi}{4} - x$.

Alltså kan vi skriva

$$\begin{aligned} \tfrac{3\pi}{2} - x &= \tfrac{3\pi}{4} + \left(\tfrac{3\pi}{4} - x\right),\\ x &= \tfrac{3\pi}{4} - \left(\tfrac{3\pi}{4} - x\right). \end{aligned}$$

Vinklarna $\frac{3\pi}{2} - x$ och x är alltså varandras spegelvinklar kring mittvinkeln $\frac{3\pi}{4}$.

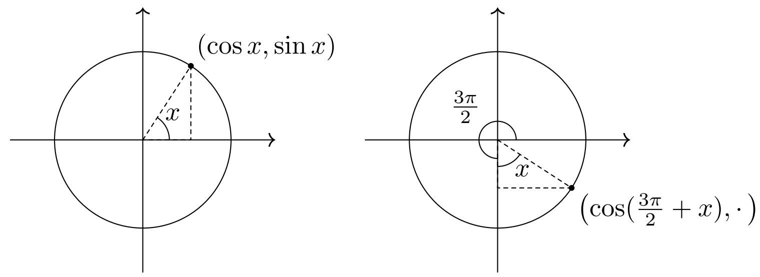
Vi kan nu uttrycka $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ i $\cos x$ och $\sin x$ med hjälp av symmetrier i enhetscirkeln (de utritade trianglarna är kongruenta).



$$\sin\left(\tfrac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x.$$

P.6.10 Uttryck $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ i termer av $\cos x$ och $\sin x$.

För att få $\frac{3\pi}{2} + x$ från x roterar vi x $\frac{3}{4}$ varv motsols. Trianglarna nedan är alltså kongruenta.



Alltså är $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$.

P.6.12 Uttryck $\dfrac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x}$ i termer av $\cos x$ och $\sin x$.

Definitionen av $\tan x$ och $\cot x$ ger att

$$\begin{aligned} \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} &= \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\sin x}}{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}} = \{\text{ förläng med } \cos x \sin x\,\}\\ &= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{-\cos 2x}{1} = -\cos 2x. \end{aligned}$$

P.6.13 Visa att $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.

Konjugatregeln ger att

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \bigl(\cos^2 x + \sin^2 x\bigr)\bigl(\cos^2 x - \sin^2 x\bigr) = 1 \cdot \cos 2x = \cos 2x.$$

P.6.14 Visa att $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \tan \dfrac{x}{2}$.

Vi förlänger med $1 + \cos x$,

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos x}{\sin x} &= \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}\\ &= \frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{1+\cos x}.\end{aligned}$$

Vi har att

$$1+\cos x = 2\cos^2 \tfrac{x}{2} \quad \text{och} \quad \sin x = 2\cos\tfrac{x}{2}\sin\tfrac{x}{2}.$$

Alltså är

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \tan\tfrac{x}{2}.$$

P.6.15 Visa att $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2 \dfrac{x}{2}$.

Formeln för dubbla vinkeln ger att

$$\begin{aligned}2\cos\tfrac{x}{2} &= 1+\cos x,\\ 2\sin\tfrac{x}{2} &= 1-\cos x.\end{aligned}$$

Alltså är

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}} = \tan\tfrac{x}{2}.$$

P.6.17 Uttryck $\sin 3x$ i termer av $\cos x$ och $\sin x$.

Additionsformeln för sinus ger att

$$\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 2x.$$

Vidare har vi att

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{och} \quad \sin 2x = 2\cos x \sin x.$$

Alltså är

$$\sin 3x = 2\sin x\cos^2 x + \sin x\cos^2 x - \sin^3 x = 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x.$$

Anm. I facit ges svaret $3\sin x - 4\sin^3 x$ vilket är lika med vårt svar ty $3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x = 3\sin x(1-\sin^2 x) - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

P.6.18 Uttryck $\cos 3x$ i termer av $\cos x$ och $\sin x$.

Additionsformeln för cosinus ger att

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x.$$

Formeln för dubbla vinkeln,

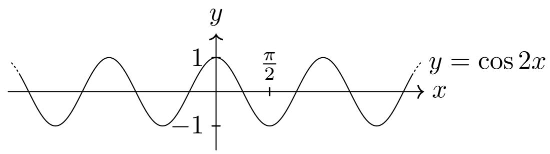
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{och} \quad \sin 2x = 2\cos x \sin x,$$

ger att

$$\cos 3x = \cos^3 x - \cos x \sin^2 x - 2\cos \sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x.$$

P.6.19 Skissera grafen till $f(x) = \cos 2x$. Vilken period har funktionen?

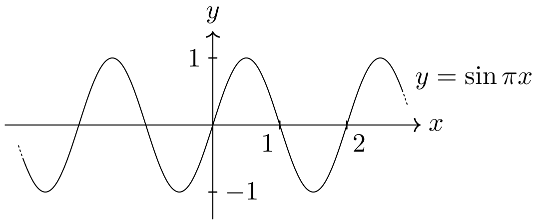
Grafen till $f(x) = \cos 2x$ är cosinus-kurvan kontraherad i x-led med en faktor $\frac{1}{2}$.



Vi vet att $x \mapsto \cos x$ är 2π-periodisk och när vi ersätter x med $2x$ förkortas perioden också med en faktor $\frac{1}{2}$, $x \mapsto \cos 2x$ är därför π-periodisk.

P.6.21 Skissera grafen till $f(x) = \sin \pi x$. Vilken period har funktionen?

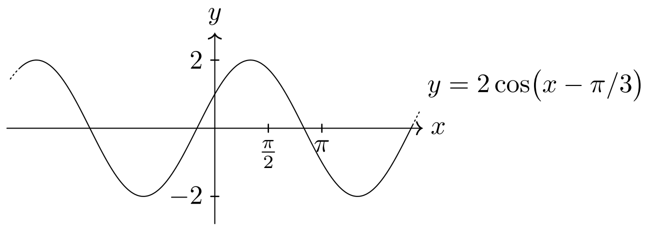
När vi ersätter x med πx skalas grafen till $x \mapsto \sin x$ med en faktor $\frac{1}{\pi}$ i x-led. Grafen till f blir alltså



Perioden till f skalas också om från 2π till $\frac{2\pi}{2} = 2$.

P.6.23 Skissera grafen till $y = 2\cos\big(x - \pi/3\big)$.

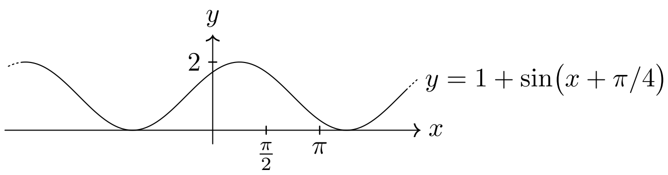
När vi ersätter x med $x - \pi/3$ förskjuts grafen till $x \mapsto \cos x$ med $\frac{\pi}{3}$ enheter åt höger. Faktorn 2 skalar sedan om grafen i y-led.



P.6.24 Skissera grafen till $y = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

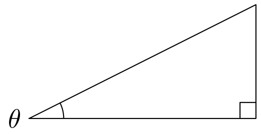
Grafen till $y = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ är förskjuten med $\frac{\pi}{4}$ enheter åt vänster jämfört med $y = \sin x$.

Grafen till $y = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ är slutligen förskjuten med en enhet uppåt.

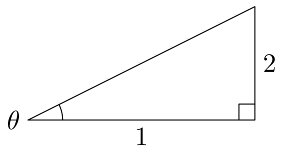


P.6.26 Givet $\tan\theta = 2$, där θ tillhör $\left[0, \pi/2\right]$. Bestäm $\cos\theta$ och $\sin\theta$.

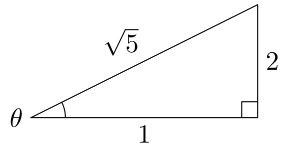
Eftersom θ ligger i intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ kan vi rita θ som en vinkel i en hjälptriangel.



Vi vet att $\tan\theta = 2$ så vi kan ge kateterna längderna 2 och 1.



Pythagoras sats ger att hypotenusan är $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$,



Från triangeln får vi nu att

$$\cos\theta = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{och} \quad \sin\theta = \tfrac{2}{\sqrt{5}}.$$

P.6.27 Givet $\cos\theta = \frac{1}{3}$, där θ tillhör intervallet $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Bestäm $\sin\theta$ och $\tan\theta$.

Den trigonometriska ettan ger att

$$|\sin\theta| = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{9}} = \tfrac{\sqrt{8}}{3} = \tfrac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Eftersom θ tillhör $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ har $\sin\theta$ ett negativt tecken. Alltså är

$$\sin\theta = -|\sin\theta| = -\tfrac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Slutligen får vi

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-2\sqrt{2}/3}{1/3} = -2\sqrt{2}.$$

P.6.29 Givet $\sin\theta = -\frac{1}{2}$, där θ tillhör intervallet $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$. Bestäm $\cos\theta$ och $\tan\theta$.

Den trigonometriska ettan ger att

$$|\cos\theta\,| = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{3}/2.$$

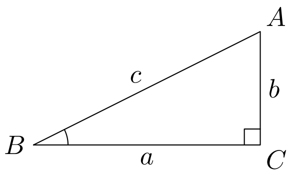
Eftersom θ tillhör intervallet $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$, som är tredje kvadranten, har $\cos\theta$ ett negativt tecken och därmed är

$$\cos\theta = -|\cos\theta\,| = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

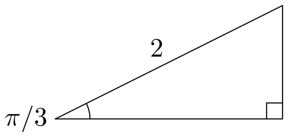
Sedan har vi att

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-1/2}{-\sqrt{3}/2} = 1/\sqrt{3}.$$

P.6.31 ABC är en triangel med en rät vinkel i C, och a, b och c är sidorna som är motstående respektive vinkel. Bestäm a och b om $c = 2$ och $B = \pi/3$.



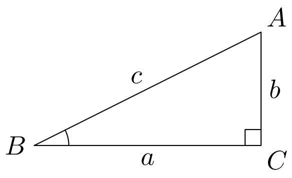
Vad som är givet är alltså



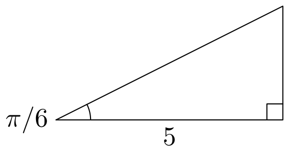
Definitionen av cosinus och sinus ger att

$$\begin{aligned}
\cos\tfrac{\pi}{3} &= \tfrac{a}{2} &\quad\Leftrightarrow\quad& a = 2\cos\tfrac{\pi}{3} = 2\cdot\tfrac{1}{2} = 1,\\
\sin\tfrac{\pi}{3} &= \tfrac{b}{2} &\quad\Leftrightarrow\quad& b = 2\sin\tfrac{\pi}{3} = 2\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

P.6.33 ABC är en triangel med en rät vinkel i C, och a, b och c är sidorna som är motstående respektive vinkel. Bestäm b och c, om $a = 5$ och $B = \frac{\pi}{6}$.



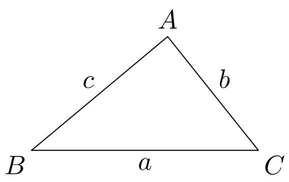
Vi ritar upp de givna storheterna i triangeln.



Definitionen av cosinus och tangens ger att

$$\begin{aligned}
\cos\tfrac{\pi}{6} &= \tfrac{5}{c} &\quad\Leftrightarrow\quad& c = \frac{5}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{5}{\sqrt{3}/2} = \frac{10}{\sqrt{3}},\\
\tan\tfrac{\pi}{6} &= \tfrac{b}{5} &\quad\Leftrightarrow\quad& b = 5\tan\tfrac{\pi}{6} = 5\cdot\tfrac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{5}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

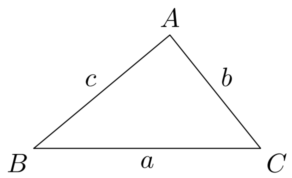
P.6.43 Låt ABC vara en triangel med sidorna a, b och c motstående vinklarna A, B respektive C. Bestäm $\sin B$ om $a = 4$, $b = 3$ och $A = \pi/4$.



Sinussatsen ger att

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \qquad\Leftrightarrow\qquad \sin B = \tfrac{b}{a}\sin A = \tfrac{3}{4}\cdot\sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{3}{4\sqrt{2}}.$$

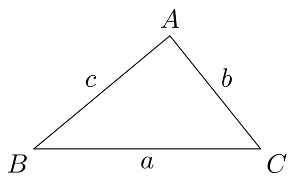
P.6.44 Låt ABC vara en triangel med sidorna a, b och c motstående vinklarna A, B respektive C. Bestäm $\cos A$ om $a = 2$, $b = 2$ och $c = 3$.



Cossinussatsen ger att

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad \Leftrightarrow$$
$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2^2+3^2-2^2}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{3}{4}.$$

P.6.45 Låt ABC vara en triangel med sidorna a, b och c motstående vinklarna A, B respektive C. Bestäm $\sin B$ om $a = 2$, $b = 3$ och $c = 4$.



Cosinussatsen ger att

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \qquad \Leftrightarrow$$
$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{2^2+4^2-3^2}{2\cdot 2\cdot 4} = \tfrac{11}{16}.$$

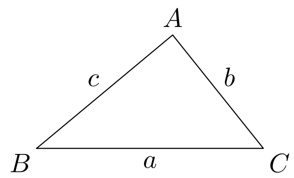
Den trigonometriska ettan ger att

$$|\sin B| = \sqrt{1-\cos^2 B} = \sqrt{1-\tfrac{121}{256}} = \sqrt{\tfrac{135}{256}}.$$

Eftersom B är en vinkel i en triangel ligger B i intervallet $[0,\pi]$, vilket betyder att $\sin B$ har positivt tecken. Alltså är

$$\sin B = |\sin B| = \sqrt{\tfrac{135}{256}}.$$

P.6.47 Låt ABC vara en triangel med sidorna a, b och c motstående vinklarna A, B respektive C. Bestäm a om $c = 4$, $A = \pi/4$ och $B = \pi/3$.



Eftersom vinkelsumman i en triangel är π, är $C = \pi - A - B = \frac{5\pi}{12}$. Sinussatsen ger att

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \qquad \Leftrightarrow \qquad a = c\,\frac{\sin A}{\sin C} = 3\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{5\pi}{12}}$$

Från uppgift P.6.5 har vi att $\sin\frac{5\pi}{12} = \sqrt{1-\cos^2\frac{5\pi}{12}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}}$

$$a = 3\cdot\frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{1+\sqrt{3}/2}}.$$