**Inledande kurs i matematik, avsnitt P.3**

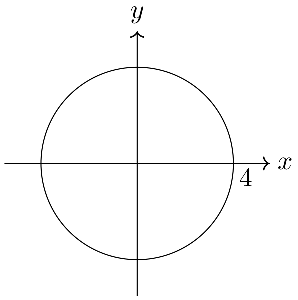
**P.3.1** Bestäm en ekvation för cirkeln med mittpunkt i $(0,0)$ och radie 4.

En cirkel med mittpunkt i $(x_c, y_c)$ och radie $r$ har ekvationen

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2.$$

I vårt fall är $x_c = y_c = 0$ och $r = 4$, vilket ger ekvationen

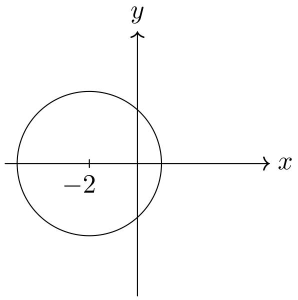
$$x^2 + y^2 = 16.$$




**P.3.3** Bestäm en ekvation för cirkeln med mittpunkt i $(-2,0)$ och radie 3.

Standardekvationen för cirkeln är

$$\begin{aligned} &\bigl(x-(-2)\bigr)^2 + \bigl(y-0\bigr)^2 = 3^2 \\ \Leftrightarrow \qquad &(x+2)^2 + y^2 = 9. \end{aligned}$$




**P.3.5** Bestäm mittpunkt och radie till cirkeln $x^2 + y^2 - 2x = 3$.

Vi vill skriva om cirkelns ekvation i standardform och därefter direkt kunna avläsa mittpunkt och radie. Med standardform menar vi

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2,$$

där $(x_c, y_c)$ är cirkelns mittpunkt och $r$ är dess radie.

Med hjälp av kvadratkompletteringsformeln

$$x^2 + px = \bigl(x + \tfrac{p}{2}\bigr)^2 - \bigl(\tfrac{p}{2}\bigr)^2$$

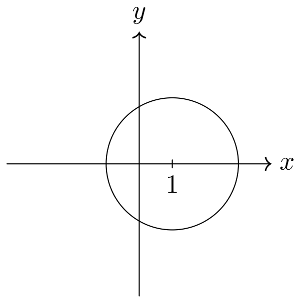
kan vi samla alla $x$ i en kvadratterm,

$$x^2 - 2x = \bigl(x + \tfrac{-2}{2}\bigr)^2 - \bigl(\tfrac{-2}{2}\bigr)^2 = (x-1)^2 - 1.$$

Cirkelns ekvation kan alltså skrivas

$$\begin{aligned} &(x-1)^2 - 1 + y^2 = 3 \\ \Leftrightarrow \qquad &(x-1)^2 + y^2 = 2^2. \end{aligned}$$

Nu kan vi avläsa cirkelns mittpunkt $(1,0)$ och radie 2.



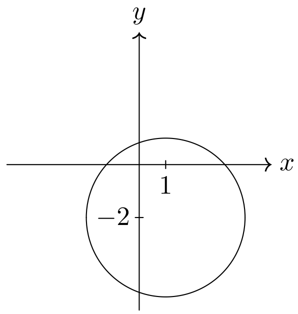

**P.3.7** Bestäm mittpunkt och radie till cirkeln $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$.

Vi skriver om cirkelns ekvation i standardform genom att kvadratkomplettera $x$- och $y$-termerna,

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= (x-1)^2 - 1, \\ y^2 + 4y &= (y+2)^2 - 4. \end{aligned}$$

Alltså är cirkelns ekvation

$$\begin{aligned} &(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 = 4 \\ \Leftrightarrow \qquad &(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 = 3^2. \end{aligned}$$




Vi kan nu avläsa att cirkelns mittpunkt är $(1,-2)$ och att dess radie är 3.

**P.3.9** Beskriv området som bestäms av olikheten $x^2+y^2>1$.

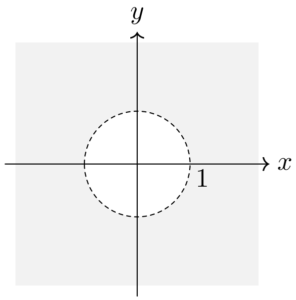
En punkt $(x,y)$ tillhör området om den uppfyller olikheten

$$x^2+y^2>1. \tag{$*$}$$

Om vi betraktar de punkter $(x,y)$ som *inte* uppfyller olikheten så uppfyller de istället den omvända olikheten

$$x^2+y^2\le 1. \tag{$\dagger$}$$

Vi vet att mängden som svarar mot ($\dagger$) är en disk med mittpunkt i origo och radie 1. De punkter som uppfyller ($*$) är därför alla punkter utanför denna disk.



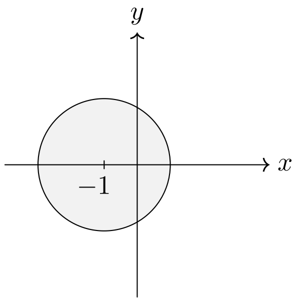

Vi har ritat cirkeln streckad eftersom den inte tillhör det gråa området.

**P.3.11** Beskriv området som bestäms av olikheten $(x+1)^2+y^2\le 4$.

Olikheten kan skrivas som

$$\bigl(x-(-1)\bigr)^2+(y-0)^2\le 2^2,$$

och då ser vi direkt att området består av alla punkter innanför (och på) cirkeln med mittpunkt i $(-1,0)$ och radie 2.

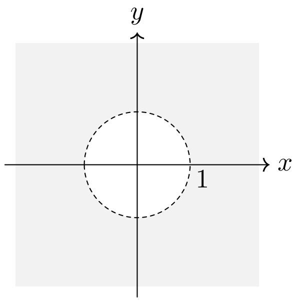



Att cirkeln är heldragen betyder att punkter på cirkeln också tillhör det gråa området.

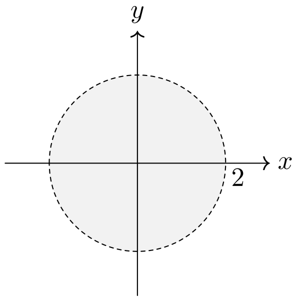
**P.3.13** Beskriv området som bestäms av olikheterna $x^2+y^2>1$ och $x^2+y^2<4$.

Området består av alla punkter $(x,y)$ som uppfyller båda olikheterna.

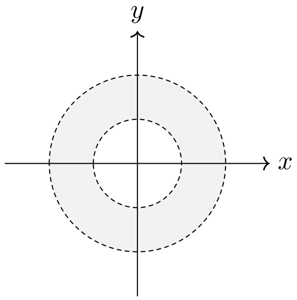
De punkter som uppfyller den första olikheten $x^2+y^2>1$ ligger alla utanför enhetscirkeln.



De punkter som uppfyller den andra olikheten $x^2 + y^2 < 4$ ligger alla innanför cirkeln med mittpunkt i origo och radie 2.




För att en punkt ska uppfylla båda olikheterna måste den alltså ligga mellan enhetscirkeln och cirkeln med radie 2.



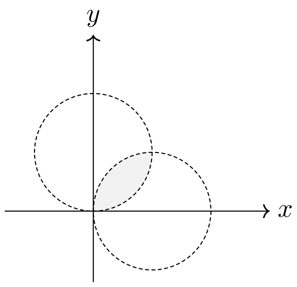

**P.3.15** Beskriv området som bestäms av olikheterna $x^2 + y^2 < 2x$ och $x^2 + y^2 < 2y$.

Vi skriver först om de två olikheterna i standardform med hjälp av kvadratkomplettering,

$$x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$$
$$y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$$

vilket ger

$$(x-1)^2 + y^2 < 1, \qquad (1)$$
$$x^2 + (y-1)^2 < 1. \qquad (2)$$

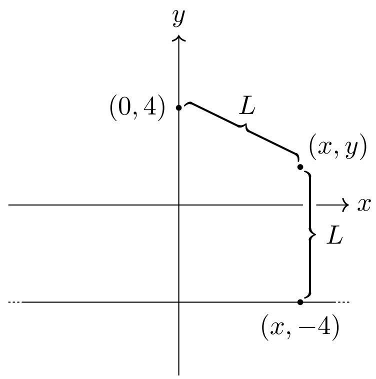



Olikhet (1) ger alla punkter som ligger innanför cirkeln med mittpunkt i $(1,0)$ och radie 1, medan olikhet (2) ger alla punkter som ligger innanför cirkeln med mittpunkt i $(0,1)$ och radie 1.

För att en punkt ska uppfylla båda olikheterna måste den ligga innanför båda cirklarna.

**P.3.21** Bestäm ekvationen för den parabel som har brännpunkt i $(0,4)$ och styrlinjen $y = -4$.

En punkt $(x,y)$ ligger på parabeln om dess avstånd till brännpunkten är lika med dess avstånd till styrlinjen.



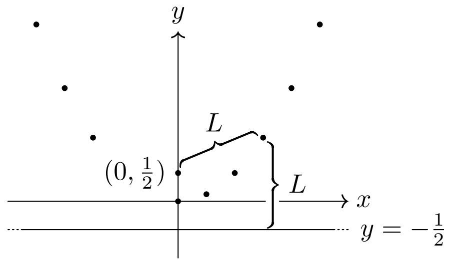

För att $(x,y)$ ska tillhöra parabeln måste alltså

$$(x-0)^2 + (y-4)^2 = (x-x)^2 + \big(y-(-4)\big)^2$$
$$\Leftrightarrow \qquad x^2 + y^2 - 8y + 16 = 0^2 + y^2 + 8y + 16 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \tfrac{1}{16}x^2.$$

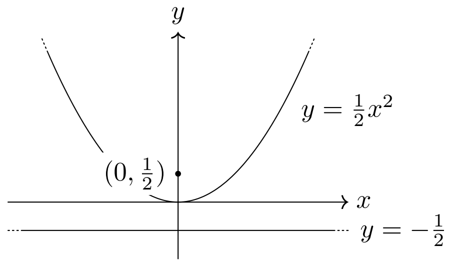
**P.3.25** Bestäm brännpunkt och styrlinje till parabeln $y = x^2/2$, och skissera parabeln, brännpunkten och styrlinjen.

En allmän tumregel för en parabel med ekvationen $y = x^2/4p$ är att den har brännpunkt i $(0, p)$ och styrlinje $y = -p$.

I vårt fall är $p = \frac{1}{2}$, och därmed är brännpunkten $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ och styrlinjen är $y = -\frac{1}{2}$. För att skissera parabeln kan man välja några punkter som ligger på lika avstånd från brännpunkten och stylinjen,



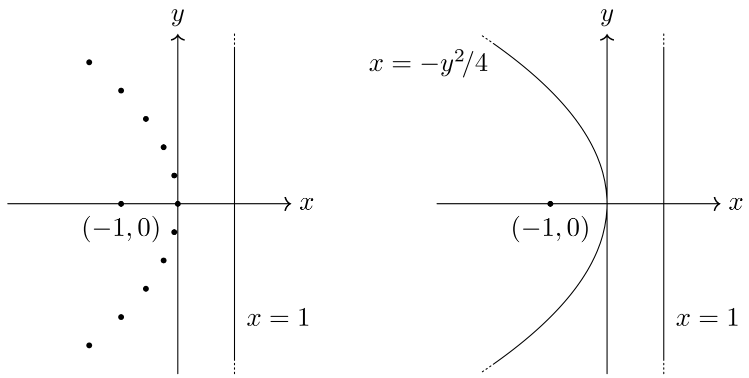

och sedan förbinda dessa punkter med en kurva.




**P.3.27** Bestäm brännpunkt och styrlinje till parabeln $x = -y^2/4$, och skissera parabeln, brännpunkten och styrlinjen.

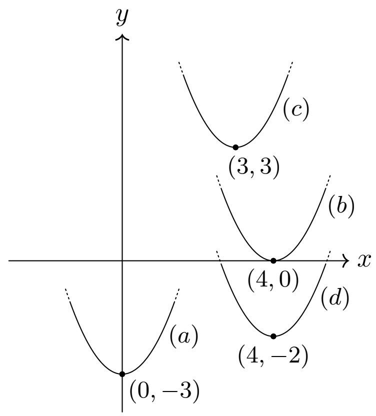
En parabel med ekvationen $x = y^2/4p$ har brännpunkt i $(p, 0)$ och styrlinje $x = -p$. Detta följer direkt genom att ge $x$ och $y$ ombytta roller i ekvationen $y = x^2/4p$.

I vårt fall är $p = -1$, och brännpunkten är $(-1, 0)$ och styrlinjen är $x = 1$. Vi ritar ut några punkter som har samma avstånd till brännpunkten som till styrlinjen, och förbinder punkterna med en kurva.

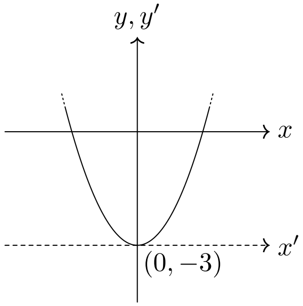


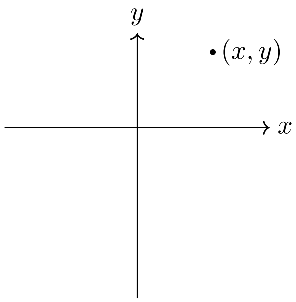

**P.3.29** Figuren till höger visar grafen till $y = x^2$ i fyra translaterade versioner.

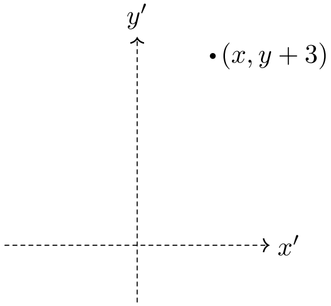
Bestäm ekvationerna för dessa fyra parabler.



a) Vi använder två koordinatsystem.
Dels det ursprungliga $x, y$-systemet, dels ett $x', y'$-system som följt med parabeln i translationen. Eftersom $x', y'$-systemet translaterats tillsammans med parabeln ges parabeln av ekvationen $y' = {x'}^2$ i $x', y'$-systemet.
För att uttrycka parabelns ekvation i $x, y$-systemet behöver vi ett samband mellan de två systemen. En punkt som har koordinater $(x, y)$ i det ursprungliga systemet har i $x', y'$-systemet koordinater $(x, y + 3)$.




Alltså är

$$
\begin{aligned}
x' &= x, \\
y' &= y + 3.
\end{aligned}
$$

Den translaterade parabelns ekvation är

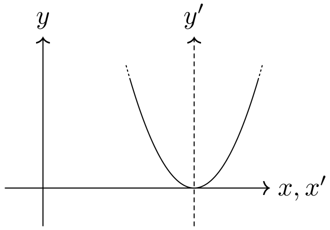
$$y + 3 = x^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = x^2 - 3.$$

b) På samma sätt som i a-uppgiften inför vi ett $x', y'$-system som följt med translationen. Sambandet mellan $x, y$- och $x', y'$-systemet är

$$
\begin{aligned}
x' &= x - 4 \\
y' &= y
\end{aligned}
$$

och den translaterade parabelns ekvation är

$$y' = {x'}^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = (x - 4)^2.$$

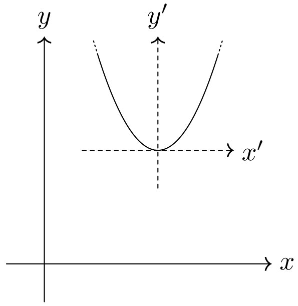



c) För c-parabeln inför vi ett koordinatsystem som translaterats 3 enheter åt höger och 3 enheter uppåt. Vi har sambandet

$$
\begin{aligned}
x' &= x - 3, \\
y' &= y - 3,
\end{aligned}
$$

mellan de två systemen. Parabelns ekvation blir

$$
\begin{aligned}
y' = {x'}^2 \qquad &\Leftrightarrow \qquad y - 3 = (x - 3)^2 \\
&\Leftrightarrow \qquad y = (x - 3)^2 + 3.
\end{aligned}
$$

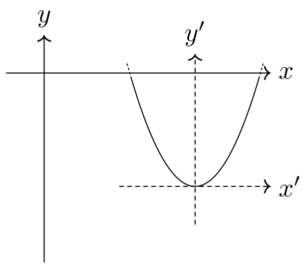



d) Vi inför ett nytt koordinatsystem som translaterats dels 4 enheter åt höger, dels 2 enheter neråt. Sambandet mellan de två koordinatsystemen är

$$
\begin{aligned}
x' &= x - 4, \\
y' &= y + 2,
\end{aligned}
$$

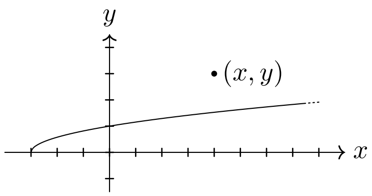
vilket ger att d-parabeln har ekvationen

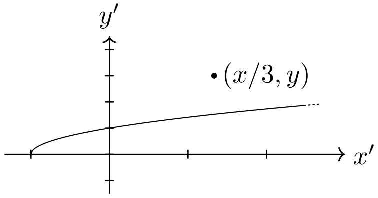
$$
\begin{aligned}
y' = {x'}^2 \qquad &\Leftrightarrow \qquad y + 2 = (x - 4)^2 \\
&\Leftrightarrow \qquad y = (x - 4)^2 - 2.
\end{aligned}
$$



**P.3.31** Bestäm ekvationen för grafen till $y = \sqrt{x+1}$ efter att horisontella avstånd multiplicerats med 3.

För den omskalade kvadratrotskurvan inför vi ett nytt $x', y'$-koordinatsystem där den horisontella skalan expanderats med en faktor 3 så att den nya kvadratrotskurvan har ekvationen $y' = \sqrt{x'+1}$.




Sambandet mellan $x, y$- och $x', y'$-koordinater är att en punkt som har $x, y$-koordinaten $(x, y)$ har i $x', y'$-systemet koordinaten $(x/3, y)$, d.v.s.

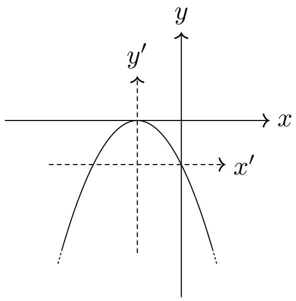
$$\begin{aligned} x' &= x/3, \\ y' &= y. \end{aligned}$$

Den expanderande kurvan har alltså följande ekvation i $x, y$-systemet

$$y' = \sqrt{x'+1} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \sqrt{x/3+1}.$$

**P.3.35** Bestäm ekvationen för den graf som fås då $y = 1 - x^2$ translateras en enhet neråt och en enhet åt vänster.

Vi inför ett koordinatsystem som följer med den translaterade kurvan.




I $x', y'$-koordinater har kurvan fortfarande ekvationen

$$y' = 1 - {x'}^2.$$

Sambandet mellan de två koordinatsystemen är

$$\begin{aligned} x' &= x + 1, \\ y' &= y + 1. \end{aligned}$$

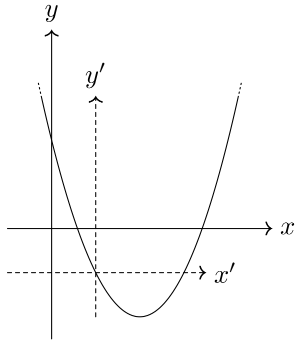
I $x, y$-koordinater har alltså kurvan ekvationen

$$y' = 1 - {x'}^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y + 1 = 1 - (x+1)^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -(x+1)^2.$$

**P.3.37** Bestäm ekvationen för den graf som fås då $y = (x-1)^2 - 1$ translateras en enhet neråt och en enhet åt höger.

Om vi inför ett koordinatsystem som i figuren till höger, så har den translaterade kurvan ekvationen

$$y' = (x'-1)^2 - 1.$$




Sambandet mellan de två systemen,

$$\begin{aligned} x' &= x - 1, \\ y' &= y + 1, \end{aligned}$$

ger att kurvans ekvation i $x, y$-koordinater blir

$$\begin{aligned} &y' = (x'-1)^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & y + 1 = (x-1-1)^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & y = (x-2)^2 - 2. \end{aligned}$$

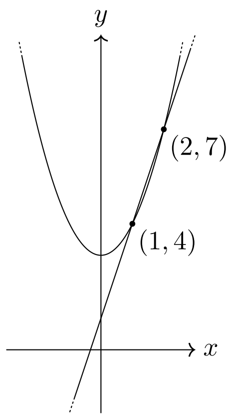
**P.3.39** Bestäm skärningspunkterna mellan kurvorna $y = x^2 + 3$ och $y = 3x + 1$.

En punkt är en skärningspunkt om den ligger på båda kurvorna, d.v.s. uppfyller båda kurvornas ekvationer

$$y = x^2 + 3, \tag{1}$$
$$y = 3x + 1. \tag{2}$$

(2) insatt i (1) ger

$$\begin{aligned} 3x + 1 = x^2 + 3 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \quad & x_\pm = \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}. \end{aligned}$$




Från (2) får vi de $y$-värden som svarar mot de två $x$-värdena

$$y_+ = 3x_+ + 1 = 7 \quad \text{och} \quad y_- = 3x_- + 1 = 4.$$

Skärningspunkterna är alltså $(1,4)$ och $(2,7)$.

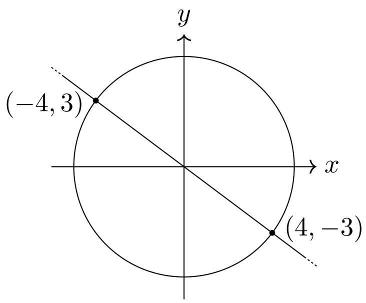
**P.3.41** Bestäm skärningspunkterna mellan kurvorna $x^2 + y^2 = 25$ och $3x + 4y = 0$.

Skärningspunkterna ska uppfylla båda kurvornas ekvationer,

$$x^2 + y^2 = 25, \tag{1}$$
$$3x + 4y = 0. \tag{2}$$

Från (2) löser vi ut $y$, $y = -\frac{3}{4}x$ och stoppar in i (1),

$$\begin{aligned} &x^2 + \left(-\tfrac{3}{4}x\right)^2 = 25 \\ \Leftrightarrow \quad & \tfrac{25}{16}x^2 = 25 \\ \Leftrightarrow \quad & x_\pm = \pm 4. \end{aligned}$$




Från $y = -\frac{3}{4}x$ får vi motsvarande $y$-värden,

$$y_+ = -3 \quad \text{och} \quad y_- = +3.$$

Skärningspunkterna är därmed $(4,-3)$ och $(-4,3)$.

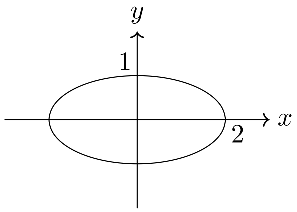
**P.3.43** Identifiera och skissera kurvan som ges av ekvationen

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Vi ser att kurvan är i formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

där $a = 2$ och $b = 1$, vilket betyder att kurvan är en ellips med mittpunkt i origo och halvaxlar 2 och 1.



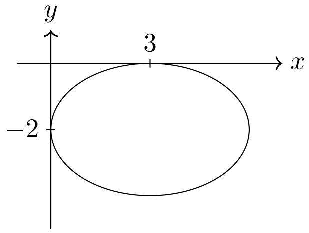

**P.3.45** Identifiera och skissera kurvan som ges av ekvationen

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

Uttrycket påminner om en ellips; en summa av två kvadrater är lika med 1. Hade ekvationen istället varit

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

skulle vi haft en ellips med mittpunkt i origo och halvaxlar 3 och 2. I vårt fall är denna ellips translaterad med tre enheter åt höger och två enheter neråt.




**P.3.47** Identifiera och skissera kurvan som ges av ekvationen

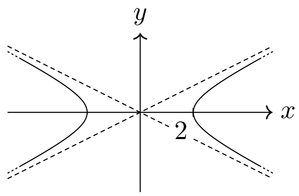
$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$$

En ekvation i formen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

är en hyperbel med asymptoter $y = \pm\frac{b}{a}x$ (linjer som hyperbeln närmar sig då $x \to \pm\infty$) och skärningspunkter $(\pm a, 0)$ med $x$-axeln.

I vårt fall ser vi att $a = 2$ och $b = 1$. Kurvan är alltså en hyperbel med utseendet



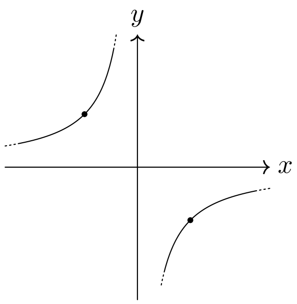
**P.3.49** Identifiera och skissera kurvan som ges av ekvationen $xy = -4$.

Den kurva som ges av ekvationen $xy = 1$ är en hyperbel som är roterad 45° moturs kring origo, går genom punkterna $(1, 1)$, $(-1, -1)$ och har koordinataxlarna som asymptoter.

Vi skriver om vår ekvation till

$$\left(\frac{x}{-2}\right) \cdot \left(\frac{y}{2}\right) = 1.$$

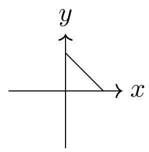
Då ser vi att i koordinatsystemet $x' = -\frac{1}{2}x$, $y' = \frac{1}{2}y$ är vår kurva en roterad hyperbel med koordinataxlarna som asymptoter och går genom punkterna $(-2, 2)$ och $(2, -2)$.



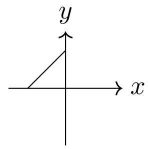

**P.3.53** Skissera grafen till $|x| + |y| = 1$.

För att kunna skriva kurvans ekvation utan beloppstecken måste vi undersöka fyra fall.

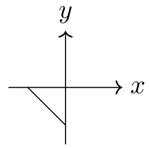
1. $x \geq 0, y \geq 0$:
   I första kvadranten är $|x| = x$ och $|y| = y$, så ekvationen blir $x + y = 1$, vilket är en rät linje som skär $x$-axeln i $(1, 0)$ och $y$-axeln i $(0, 1)$.



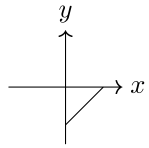

2. $x \leq 0, y \geq 0$:
   I den andra kvadranten är $x \leq 0$ och då är $|x| = -x$ medan $|y| = y$. Ekvationen blir därför $-x + y = 1$, vilket är en rät linje som skär $x$-axeln i $(-1, 0)$ och $y$-axeln i $(0, 1)$.




3. $x \leq 0, y \leq 0$:
   I den tredje kvadranten är både $x$ och $y$ negativa varför $|x| = -x$ och $|y| = -y$. Ekvationen är $-x-y = 1$, vilket är en rät linje som skär $x$-axeln i $(-1, 0)$ och $y$-axeln i $(0, -1)$.




4. $x \geq 0, y \leq 0$:
   Slutligen, i den fjärde kvadranten är $x = |x|$ och $|y| = -y$. Ekvationen blir $x - y = 1$. Detta är en rät linje som skär $x$-axeln i $(1, 0)$ och $y$-axeln i $(0, -1)$.




Sammantaget har ekvationen $|x| + |y| = 1$ grafen