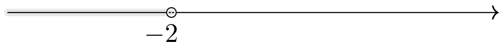
Inledande kurs i matematik, avsnitt P.1

P.1.13 Lös olikheten $-2x > 4$ och uttryck lösningen som ett intervall eller en union av intervall.

Multiplicera båda led med $-\frac{1}{2}$. Då byter också olikhetstecknet riktning,

$$\left(-\tfrac{1}{2}\right)(-2x) < \left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x < -2.$$

D.v.s. lösningen är det öppna intervallet $(-\infty, -2)$.



P.1.15 Lös olikheten

$$5x - 3 \le 7 - 3x,$$

och uttryck lösningen som ett intervall eller en union av intervall.

Precis som när vi löser en ekvation samlar vi först alla x i ena ledet. Addera båda led med $3x$,

$$5x - 3 + 3x \le 7 - 3x + 3x \qquad \Leftrightarrow \qquad 8x - 3 \le 7.$$

För att få x ensamt i ena ledet adderar vi 3,

$$8x - 3 + 3 \le 7 + 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad 8x \le 10.$$

Slutligen får vi ut x genom att dividera båda led med 8 (som är positiv och därför inte vänder på olikhetstecknet),

$$x \le \tfrac{10}{8} = \tfrac{5}{4}.$$

Lösningsintervallet är alltså $(-\infty, \frac{5}{4}\,]$.

P.1.17 Lös olikheten

$$3(2 - x) < 2(3 + x),$$

och uttryck lösningen som ett intervall eller en union av intervall.

Vi utvecklar båda led,

$$6 - 3x < 6 + 2x.$$

Samla x i ena ledet genom att addera med $3x$,

$$6 - 3x + 3x < 6 + 2x + 3x \qquad \Leftrightarrow \qquad 6 < 6 + 5x.$$

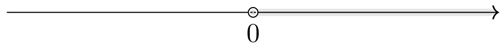
Vi får x ensamt i ena ledet genom att addera med -6,

$$6 - 6 < 6 + 5x - 6 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 < 5x.$$

Division med 5 ger svaret

$$0 < x,$$

vilket är intervallet $(0, \infty)$.



P.1.19 Lös olikheten

$$\frac{1}{2 - x} < 3,$$

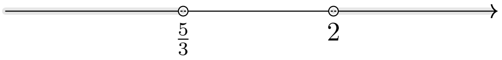
och uttryck lösningen som ett intervall eller en union av intervall.

För att kunna ”lösa ut” x vill vi multiplicera båda led med nämnaren $2 - x$, men vi vet inte om detta uttryck är positivt eller negativt, och därför inte hur olikhetstecknet påverkas av multiplikationen.

Om vi delar upp i två fall har vi

1. $2 - x > 0$:
   I detta fall påverkas inte olikhetstecknet vid multiplikationen och vi får att
   $$1 < 3 \cdot (2 - x) \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 < 6 - 3x.$$
   Addera med -6,
   $$-5 < -3x.$$
   Dividera med -3 (som är negativ och vänder på olikhetstecknet)
   $$\tfrac{5}{3} > x.$$
   Alltså, om $2 - x > 0$, d.v.s. $x < 2$, då är olikheten i uppgiftstexten uppfylld om $x < \frac{5}{3}$. Med andra ord är
   $$\begin{aligned} \frac{1}{2-x} < 3 \quad \text{och} \quad 2 - x > 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad x < 2 \quad \text{och} \quad x < \tfrac{5}{3} \\ &\Leftrightarrow \qquad x < \tfrac{5}{3}. \end{aligned}$$
   Detta ger intervallet $(-\infty, \frac{5}{3})$.
2. $2 - x < 0$:
   I detta fall multiplicerar vi olikheten med ett negativt tal och då vänds olikhetstecknet. Vi får
   $$1 > 3 \cdot (2 - x) \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 > 6 - 3x.$$
   Addera med -6,
   $$-5 > -3x.$$
   Dividera med -3 (negativ),
   $$\tfrac{5}{3} < x.$$
   Vi har alltså visat att
   $$\begin{aligned} \frac{1}{2-x} < 3 \quad \text{och} \quad 2 - x < 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad x > 2 \quad \text{och} \quad x > \tfrac{5}{3} \\ &\Leftrightarrow \qquad x > 2. \end{aligned}$$
   Detta ger intervallet $(2, \infty)$.

Sammantaget har vi alltså att olikheten är uppfylld om $x < \frac{5}{3}$ eller $x > 2$, vilket svarar mot intervallen $(-\infty, \frac{5}{3})$ och $(2, \infty)$.



P.1.21 Lös olikheten

$$x^2 - 2x \le 0$$

och uttryck lösningen som ett intervall eller en union av intervall.

Vänsterledet kan vi faktorisera, och skriva olikheten som

$$x(x - 2) \le 0.$$

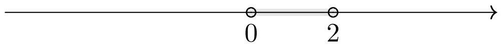
Med hjälp av teckenreglerna

$$+ \cdot + = +, \quad + \cdot - = -, \quad - \cdot + = - \quad \text{och} \quad - \cdot - = +$$

ser vi att vänsterledet är negativt om en faktor är negativ och den andra är positiv. Detta ger oss två fall.

1. $x \le 0,\ x - 2 \ge 0$. Detta ger att $x \le 0$ och $x \ge 2$, som saknar lösning.
2. $x \ge 0,\ x - 2 \le 0$. Detta ger att $x \ge 0$ och $x \le 2$, d.v.s. $0 \le x \le 2$.

Sammantaget är alltså olikheten uppfylld om $0 \le x \le 2$, vilket är intervallet $[0, 2]$.



P.1.23 Lös olikheten $x^3 > 4x$ och uttryck lösningen som ett intervall eller en union av intervall.

Vi samlar x i ena ledet,

$$x^3 - 4x > 0.$$

Vi ser direkt att vi kan bryta loss en faktor x,

$$x(x^2 - 4) > 0.$$

Den andra faktorn kan vi faktorisera med konjugatregeln så att vi får en fullständig faktorisering av vänsterledet i förstagradsfaktorer,

$$x(x-2)(x+2) > 0.$$

Med teckenreglerna ser vi att vänsterledet är positivt om vi har en av följande konfigurationer:

$$1)\ +\cdot+\cdot+,\quad 2)\ +\cdot-\cdot-,\quad 3)\ -\cdot+\cdot-,\quad \text{eller}\quad 4)\ -\cdot-\cdot+.$$

Vi undersöker dessa fall.

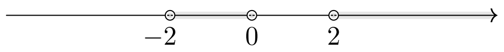
1. Då ska vi ha att $x > 0$, $x-2 > 0$, $x+2 > 0$, d.v.s. $x > 0$, $x > 2$, $x > -2$ vilket är detsamma som $x > 2$.

2. Vi ska ha att $x > 0$, $x-2 < 0$, $x+2 < 0$, d.v.s. $x > 0$, $x < 2$, $x < -2$ som saknar lösning.

3. Vi ska ha att $x < 0$, $x-2 > 0$, $x+2 < 0$, d.v.s. $x < 0$, $x > 2$, $x < -2$ som saknar lösning.

4. Vi ska ha att $x < 0$, $x-2 < 0$, $x+2 > 0$, d.v.s. $x < 0$, $x < 2$, $x > -2$. Detta kan vi skriva som $-2 < x < 0$.

Olikheten är alltså uppfylld om $-2 < x < 0$ eller $2 < x$, vilket svarar mot intervallen $(-2, 0)$ och $(2, \infty)$.



P.1.25 Lös olikheten

$$\frac{x}{2} \geq 1 + \frac{4}{x},$$

och uttryck lösningen som ett intervall eller en union av intervall.

Flytta över alla termer i ena ledet

$$\frac{x}{2} - \frac{4}{x} - 1 \geq 0.$$

Skriv vänsterledet med minsta gemensamma nämnare,

$$\frac{x^2 - 8 - 2x}{2x} \geq 0.$$

Täljarpolynomet har nollställena

$$x_\pm = 1 \pm \sqrt{8+1} = 1 \pm 3 = \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases}$$

och kan faktoriseras som $(x+2)(x-4)$. Olikheten blir därför

$$\frac{(x+2)(x-4)}{2x} \geq 0.$$

Vänsterledet är positivt när ett av följande fall inträffar

$$1)\ \frac{+\cdot+}{+},\quad 2)\ \frac{+\cdot-}{-},\quad 3)\ \frac{-\cdot+}{-},\quad \text{eller}\quad 4)\ \frac{-\cdot-}{+}.$$

Vi undersöker dessa fall

1. Vi har $x+2 \geq 0$, $x-4 \geq 0$, $x > 0$, d.v.s. $x \geq -2$, $x \geq 4$, $x > 0$ som är ekvivalent med $x \geq 4$.

2. Vi har $x+2 \geq 0$, $x-4 \leq 0$, $x < 0$, d.v.s. $x \geq -2$, $x \leq 4$, $x > 0$ som är ekvivalent med $-2 \leq x < 0$.

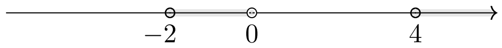
3. Vi har $x+2 \leq 0$, $x-4 \geq 0$, $x < 0$, d.v.s. $x \leq -2$, $x \geq 4$, $x < 0$ som saknar lösning.

4. Vi har $x+2 \leq 0$, $x-4 \leq 0$, $x > 0$, d.v.s. $x \leq -2$, $x \leq 4$, $x > 0$ som saknar lösning.

Sammantaget är olikheten uppfylld om

$$x \geq 4 \quad \text{eller} \quad -2 \leq x < 0,$$

vilket ger intervallen $[-2, 0)$ och $[4, \infty)$.



Anm. Nämnaren får inte vara noll, vilket ger villkoret $x > 0$ istället för $x \geq 0$.

P.1.26 Lös olikheten

$$\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1},$$

och uttryck lösningen som ett intervall eller en union av intervall.

Vi flyttar över alla termer i ena ledet

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} < 0,$$

och skriver vänsterledet med minsta gemensamma nämnare,

$$\frac{3(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x+5}{(x-1)(x+1)} < 0.$$

Vänsterledet är negativt om vi har ett av följande fall

$$1)\ \frac{-}{+\cdot+}, \quad 2)\ \frac{+}{-\cdot+}, \quad 3)\ \frac{+}{+\cdot-}, \quad \text{eller} \quad 4)\ \frac{-}{-\cdot-}.$$

Vi undersöker dessa fall.

1. Vi har $x+5<0$, $x-1>0$, $x+1>0$, d.v.s. $x<-5$, $x>1$, $x>-1$ som saknar lösning.
2. Vi har $x+5>0$, $x-1<0$, $x+1>0$, d.v.s. $x>-5$, $x<1$, $x>-1$ vilket ger $-1<x<1$.
3. Vi har $x+5>0$, $x-1>0$, $x+1<0$, d.v.s. $x>-5$, $x>1$, $x<-1$ som saknar lösning.
4. Vi har $x+5<0$, $x-1<0$, $x+1<0$, d.v.s. $x<-5$, $x<1$, $x<-1$ vilket ger $x<-5$.

Alltså är olikheten uppfylld om

$$-1 < x < 1 \quad \text{eller} \quad x < -5,$$

d.v.s. om x tillhör intervallen $(-1, 1)$ eller $(-\infty, -5)$.

P.1.27 Lös ekvationen $|x| = 3$.

Ekvationen är ekvivalent med $x = -3$ eller $x = 3$, vilka också är lösningarna.

P.1.29 Lös ekvationen $|2t + 5| = 4$.

Ekvationen är ekvivalent med

$$2t + 5 = 4 \quad \text{eller} \quad 2t + 5 = -4.$$

Eftersom dessa är förstagradsuttryck är ekvationerna enkla att lösa,

$$t = -\tfrac{1}{2} \quad \text{eller} \quad t = -\tfrac{9}{2}.$$

P.1.31 Lös ekvationen $|8 - 3s| = 9$.

Vi skriver om ekvationen som två alternativa ekvationer utan beloppstecken,

$$8 - 3s = 9 \quad \text{eller} \quad 8 - 3s = -9.$$

Dessa två förstagradare har lösningarna

$$s = -\tfrac{1}{3} \quad \text{eller} \quad s = \tfrac{17}{3}.$$

P.1.33 Bestäm intervallet som definieras av olikheten $|x| < 2$.

Beloppsolikheten är ekvivalent med

$$-2 < x < 2,$$

d.v.s. intervallet $(-2, 2)$.

P.1.35 Bestäm intervallet som definieras av olikheten $|s - 1| \le 2$.

Vi kan skriva upp en ekvivalent olikhet utan beloppstecken

$$-2 \le s - 1 \le 2.$$

Addera 1 till båda led,

$$-1 \le s \le 3.$$

Intervallet är alltså $[-1, 3]$.

P.1.37 Bestäm intervallet som definieras av olikheten $|3x - 7| < 2$.

Vi kan skriva olikheten som

$$-2 < 3x - 7 < 2.$$

Addera 7 till alla led,

$$5 < 3x < 9.$$

Dela med 3,

$$\tfrac{5}{3} < x < 3.$$

Intervallet är alltså $(\frac{5}{3}, 3)$.

P.1.39 Bestäm intervallet som definieras av olikheten $|\frac{1}{2}x - 1| \le 1$.

Vi skriver upp olikheten utan beloppstecken,

$$-1 \le \tfrac{1}{2}x - 1 \le 1.$$

Addera 1 till alla led,

$$0 \le \tfrac{1}{2}x \le 2.$$

Multiplicera med 2,

$$0 \le x \le 4.$$

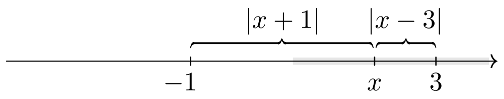
Intervallet är $[0, 4]$.

P.1.41 Lös olikheten

$$|x+1| > |x-3|$$

genom att tolka olikheten som en utsaga om avstånd på reella tallinjen.

Vänsterledet $|x-(-1)|$ är avståndet mellan x och -1, och högerledet $|x-3|$ är avståndet mellan x och 3. Vi söker alltså alla punkter x med ett större avstånd till -1 än dess avstånd till 3.



Geometriskt ser vi att x måste ligga till höger om mittpunkten mellan -1 och 3, d.v.s. $x > 1$.

P.1.44 Lös ekvationen $|x-1| = 1-x$.

Om $x-1 \geq 0$ då kan ekvationen skrivas som

$$x-1 = 1-x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1.$$

Om $x-1 \leq 0$ då kan ekvationen skrivas som

$$-(x-1) = 1-x \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = 0.$$

som är uppfylld för alla x vi betraktar (d.v.s. för alla x som uppfyller $x-1 \leq 0$). Ekvationen i uppgiftstexten är alltså uppfylld för alla $x-1 \leq 0$, d.v.s. $x \leq 1$.