Linjär approximation

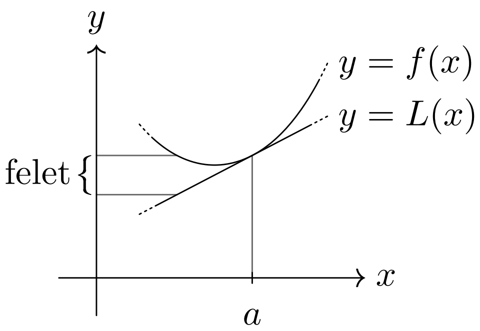
Linjäriseringen av f i punkten $x = a$,

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a),$$

approximerar f med felet

$$f(x) = L(x) + \tfrac{1}{2} f''(\xi)(x - a)^2,$$

där ξ ligger mellan a och x.



Taylors formel

Taylorpolynomet till den n ggr. deriverbara funktionen f,

$$P_{n-1}(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1},$$

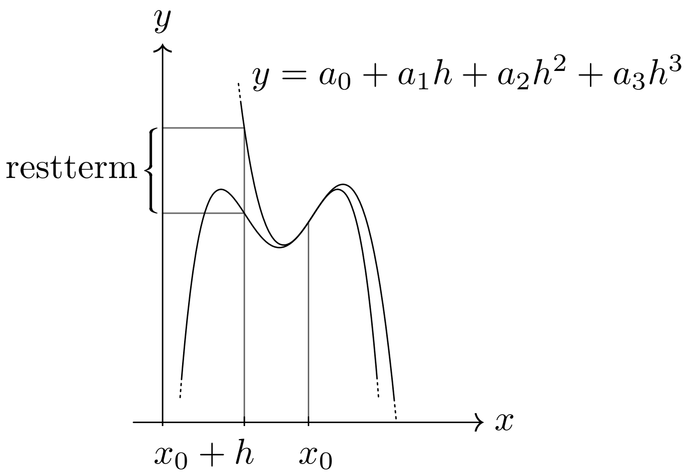
approximerar f med felet

$$f(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - a)^n,$$

där ξ ligger mellan a och x. Uttrycket

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - a)^n$$

kallas för Lagranges restterm.



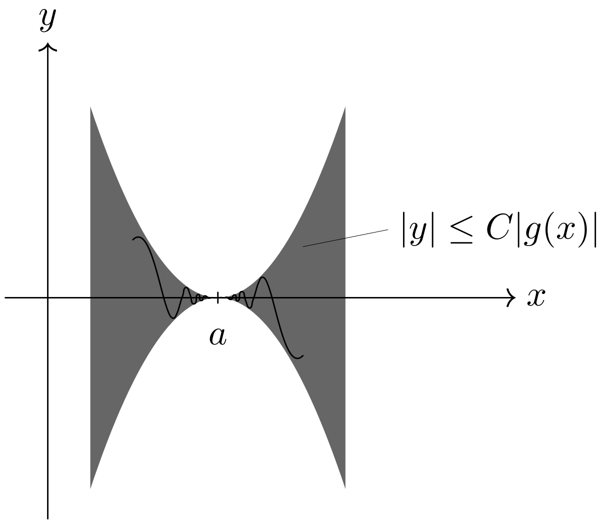
Stort Ordo

Uttrycket

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \qquad \text{då } x \to a,$$

betyder att det finns en konstant $C > 0$ så att

$|f(x)| \leq C|g(x)|$ för alla x i en punkterad omgivning av a.



Grafen till f inskränkt till omgivningen av a ligger helt inom det gråa området.

Räkneregler för Ordo

Följande räkneregler gäller då $x \to 0$

- $x^n = O(x^n)$,
- $O(x^m) \pm O(x^n) = O(x^{m \wedge n}) \quad$ där $m \wedge n = \min\{m, n\}$,
- $O(x^m) \cdot O(x^n) = O(x^{m+n})$.

Obs! $O(x^3) = O(x^2)$ men $O(x^2) \neq O(x^3)$.

Taylorpolynomens entydighetssats

Om

$$f(x) = Q_n(x) + O(x-a)^{n+1} \quad \text{då } x \to a,$$

där Q_n är ett polynom av grad högst n. Då är Q_n Taylorpolynomet av grad n till f i punkten $x = a$.