Vektorrumsbegrepp

Linjärt oberoende

Vektorerna $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ är linjärt oberoende om

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = \cdots = c_n = 0.$$

Bas

Vektorerna $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ är en bas till V om

1. $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ är linjärt oberoende,
2. $V = \operatorname{span}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$.

Dimension

Dimensionen för ett vektorrum V är det ändliga antal vektorer en bas till V har.

Linjära ODE med konstanta koefficienter

Homogena ekvationer

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (*)$$

Sats Lösningarna till $(*)$ bildar ett vektorrum med dimension 2 (om $a \neq 0$).

Om vi ansätter $y = e^{rt}$ ger $(*)$ den karakteristiska ekvationen

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Om r_1 och r_2 är rötterna till den karakteristiska ekvationen då har lösningsrummet basen

$r_1 \neq r_2$ båda reella	$\{e^{r_1 t}, e^{r_2 t}\}$
$r_1 = r_2$ båda reella	$\{e^{r_1 t}, te^{r_1 t}\}$
$r_1 \neq r_2$ komplexa	$\{e^{kt}\cos\omega t, e^{kt}\sin\omega t\}$ där $r_{1,2} = k \pm i\omega$.

Inhomogena ekvationer

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad (\dagger)$$

Partikulärlösning	En enstaka lösning till (†).
Homogen lösning	En lösning till motsvarande homogena ekvation.

Allmän lösning

Låt y_P vara en partikulärlösning till (†). Då består lösningsmängden till (†) av funktioner i formen

$$y = y_P + (\text{homogen lösning}).$$

Hur hittar vi en partikulärlösning?

$f(x) =$	Ansätt $y =$
polynom av grad n	$x^m \cdot (\text{polynom av grad } n)$
$(\text{polynom av grad } n)e^{rx}$	$x^m \cdot (\text{polynom av grad } n)e^{rx}$
$\left.\begin{array}{l}(\text{polynom av grad } n)e^{rx}\cos kx\\(\text{polynom av grad } n)e^{rx}\sin kx\end{array}\right\}$	$x^m \cdot (\text{polynom av grad } n)\, e^{rx}\cos kx + x^m \cdot (\text{polynom av grad } n)\, e^{rx}\sin kx$

där det naturliga talet m väljs minimalt så att ingen term i ansatsen är en lösning till den homogena ekvationen.