Kontinuitet

Kontinuitet i en punkt Funktionen f sägs vara kontinuerlig i $x = a$ om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Kontinuitet i ett öppet intervall Funktionen f är kontinuerlig i ett öppet intervall (a, b) om f är kontinuerlig i varje punkt i (a, b).

Höger- och vänsterkontinuitet

Funktionen f är högerkontinuerlig i $x = a$ om

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Funktionen f är vänsterkontinuerlig i $x = a$ om

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Kontinuitet i ett slutet intervall Funktionen f är kontinuerlig i det slutna intervallet $[a, b]$ om den är kontinuerlig i (a, b), och höger- och vänsterkontinuerlig i $x = b$ respektive $x = a$.

Kontinuerliga elementära funktioner

Sats Följande funktioner är alla kontinuerliga:

1. polynom,
2. rationella funktioner,
3. logaritmfunktionen,
4. exponentialfunktionen,
5. potensfunktioner,
6. de trigonometriska funktionerna,
7. de cyklometriska funktionerna, och
8. de hyperboliska funktionerna.

Sats Om f och g är kontinuerliga i en punkt $x = a$, då är följande funktioner också kontinuerliga i denna punkt

1. $f(x) + g(x)$,
2. $f(x) - g(x)$,
3. $f(x) \cdot g(x)$,
4. $f(x)/g(x)$ om $g(a) \neq 0$,
5. $\sqrt[n]{f(x)}$ om $f(a) > 0$ för n jämn.

Sats Om g är kontinuerlig i $x = a$ och f är kontinuerlig i $g(a)$, då är $f \circ g$ kontinuerlig i $x = a$, d.v.s.

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f\big(\lim_{x \to a} g(x)\big).$$

Satsen om extremvärden

Om en funktion f är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall $[a, b]$, så antar f såväl ett största som ett minsta värde i detta intervall.

Satsen om mellanliggande värden

Om funktionen f är kontinuerlig på $[a, b]$ och y_0 är ett tal mellan $f(a)$ och $f(b)$, då finns åtminstone ett $x = x_0$ s.a. $f(x_0) = y_0$.

Derivata

Derivatan till en funktion f i en punkt $x = a$ definieras som

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

om gränsvärdet existerar.

Höger- och vänsterderivata

Högerderivata $\quad f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Vänsterderivata $\quad f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Tangent och normal

Tangentlinje	Tangentlinjen till funktionen f i punkten $x = a$ är en rät linje med lutning $f'(a)$ och som går genom punkten $\big(a, f(a)\big)$.
Normallinje	Normallinjen till funktionen f i punkten $x = a$ är en rät linje med lutning $-1/f'(a)$ (vinkelrät mot tangentlinjen) och som går genom punkten $\big(a, f(a)\big)$.

Tabell över elementära funktioners derivata

$f(x)$	$f'(x)$
x^r	rx^{r-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x \log a$
$\log x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$