Inverssubstitution

Antag att $x = g(u)$ är deriverbar och strängt monoton på $[\alpha, \beta]$ och att f är kontinuerlig på $[a, b]$. Då är

$$\int_a^b f(x)\,dx = \{x = g(u);\ dx = g'(u)\,du\}$$
$$= \int_\alpha^\beta f\big(g(u)\big)g'(u)\,du.$$

där

$$\begin{aligned} a = g(\alpha) \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha = g^{-1}(a) \\ b = g(\beta) \quad &\Leftrightarrow \quad \beta = g^{-1}(b) \end{aligned}$$

Trigonometriska substitutioner

Integral	Substitution
$\int R(\sqrt{a^2 - x^2}, x)\,dx$	$x = a\,\sin\theta$
$\int R(\sqrt{a^2 + x^2}, x)\,dx$	$x = a\,\tan\theta$
$\int R(\sqrt{x^2 - a^2}, x)\,dx$	$x = \dfrac{a}{\cos\theta}$

där R är en rationell funktion.

Partialbråkuppdelning

Betrakta det rationella uttrycket

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_i)^{m_i}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{n_1}\cdots(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^{n_j}},$$

där täljarens grad är mindre än nämnarens grad.

Detta rationella uttryck kan skrivas som en summa av termer med utseendet:

- Till varje faktor av typen $(x-\alpha)^m$ svarar termerna

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_m}{(x-\alpha)^1}.$$

- Till varje faktor av typen $(x^2-\beta x+\gamma)^n$ svarar termerna

$$\frac{B_1 x + C_1}{(x^2+\beta x+\gamma)^n} + \cdots + \frac{B_n x + C_n}{(x^2+\beta x+\gamma)^1}.$$

Handpåläggning

Om nämnaren till ett rationellt uttryck består av enkla faktorer, då har partialbråkuppdelningen utseendet

$$\frac{1}{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}.$$

Koefficienten A_1 kan då bestämmas genom att täcka över den faktor som svarar mot A_1 i vänsterledet och ersätta x med α_1,

$$A_1 = \frac{1}{\qquad (\alpha_1-\alpha_2)\cdots(\alpha_1-\alpha_n)}.$$

På samma sätt kan vi bestämma de andra koefficienterna,

$$A_2 = \frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1) \qquad \cdots(\alpha_2-\alpha_n)},$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{1}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)\cdots \qquad}.$$

Rationella integrander

Integralen av en rationell funktion kan skrivas i formen

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

där P och Q är polynom.

Arbetsgång

1. Om $\operatorname{grad} P \geq \operatorname{grad} Q$ kan vi med polynomdivision förenkla integranden till

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)},$$

där $\operatorname{grad} P_2 < \operatorname{grad} Q$.

2. Faktorisera nämnarpolynomet $Q(x)$,

$$\begin{aligned} Q(x) = (x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_i)^{m_i} \\ \cdot (x^2-\beta_1 x+\gamma_1)^{n_1}\cdots(x^2-\beta_j x+\gamma_j)^{n_j}. \end{aligned}$$

3. Partialbråkuppdela uttrycket $P_2(x)/Q(x)$. Detta reducerar problemet till en summa av integraler av typen

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^m}\,dx \quad \text{och} \quad \int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}\,dx$$