Egenskaper hos integraler

Antag att $a \leq b \leq c$ och att A, B är konstanter. Då gäller att

- $\displaystyle\int_a^b = -\int_b^a$ (teckenkonvention)
- $\displaystyle\int \big(Af + Bg\big) = A\int f + B\int g$ (linjäritet)
- $\displaystyle\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$ (additivitet)
- $\displaystyle f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int f \leq \int g$ (monotonicitet)
- $\displaystyle\left|\int f\right| \leq \int |f|$ (triangelolikheten)

Sats $\quad f$ udda $\quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Sats $\quad f$ jämn $\quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

Integralkalkylens medelvärdessats

Om f är kontinuerlig i $[a, b]$, då finns ett $\xi \in (a, b)$ s.a.

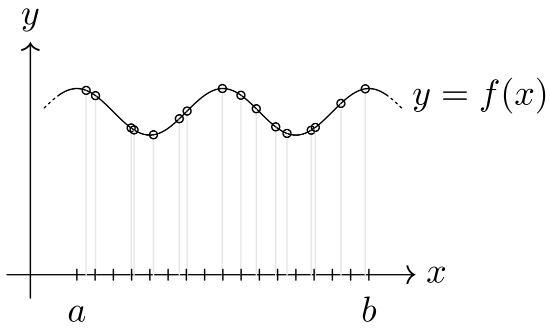
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b dx.$$

Medelvärde

Om f är integrabel på $[a, b]$, då definieras medelvärdet $\bar{f}$ som

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Härledning



Om vi delar in intervallet $[a, b]$ i n st lika stora delintervall och tar ett funktionsvärde $f(c_i)$ från varje delintervall. Då har funktionsvärdena medelvärdet

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) = \left\{\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\right\}$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\,\Delta x_i = \{\text{Riemannsumma}\}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Integralkalkylens huvudsats

Antag att f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$. Definiera en primitiv funktion $A(x)$ till f som

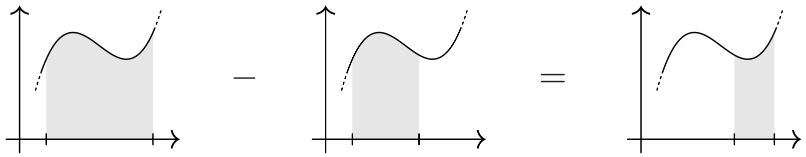
$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Då gäller att

$$A'(x) = f(x).$$

Bevis

Additiviteten ger att



$$A(x+h) \quad - \quad A(x) \quad = \quad \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Med integralkalkylens medelvärdessats har vi att

$$\begin{aligned} A(x+h) - A(x) &= \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \{\text{medelvärdessatsen}\} \\ &= f(\xi_{x,h}) \int_x^{x+h} dx = f(\xi_{x,h}) \cdot h \end{aligned}$$

där $x < \xi_{x,h} < x+h$. Ommöblering ger

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(\xi_{x,h}).$$

Låter vi $h \to 0$ fås

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} f(\xi_{x,h}) = \{f \text{ är kontinuerlig}\} \\ &= f\big(\lim_{h\to 0} \xi_{x,h}\big) = f(x). \end{aligned}$$

Detta visar att $A'(x)$ existerar och att

$$A'(x) = f(x).$$

Primitiv funktion

En funktion F kallas för en primitiv funktion till funktionen f på intervallet $[a, b]$ om F är deriverbar och

$$F'(x) = f(x) \quad \text{för alla } x \in [a, b].$$

(Tag vänster- och högerderivata i respektive ändpunkt.)

Sats Om f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ och F är en primitiv funktion till f, då är

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\, F(x) \,\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Tabell över primitiva funktioner

I tabellen nedan betyder F en primitiv funktion till f och G en primitiv funktion till g.

Funktion	En primitiv funktion
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ om $n \neq -1$
$\dfrac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
e^{ax}	$\dfrac{e^{ax}}{a}$
$a\,f(x) + b\,g(x)$	$a\,F(x) + b\,G(x)$

Styckvis kontinuerlig

Om f är definierad och kontinuerlig i intervallet $[a, b]$ utom möjligtvis i ett ändligt antal punkter, då kallas f för styckvis kontinuerlig.