Summasymbolen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

Räkneregler $\quad \sum(a_i + b_i) = \sum a_i + \sum b_i$

$$\sum c a_i = c \sum a_i$$

Summaformler

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k(k-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

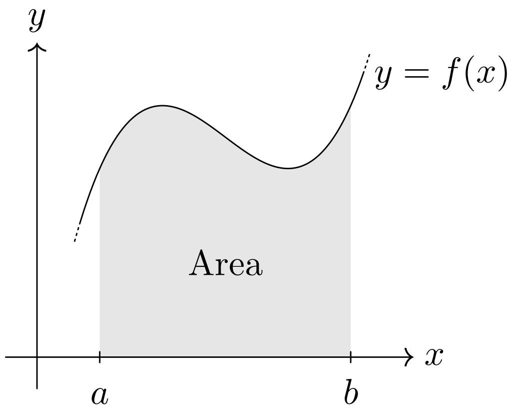
$$\sum_{k=0}^{n-1} k(k-1)(k-2) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad \text{om } x \neq 1$$

Areaberäkning

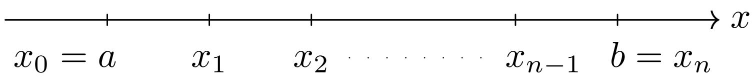
Problem

Bestäm arean under kurvan $y = f(x)$ mellan $x = a$ och $x = b$.

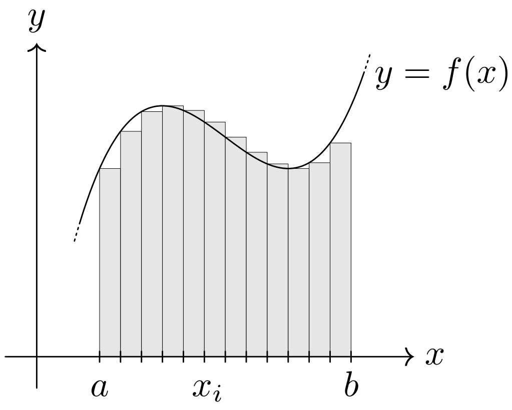


Lösning

Dela upp intervallet $[a, b]$ i n delintervall $[x_i, x_{i+1}]$ med lika längd.



I varje delintervall $[x_i, x_{i+1}]$ approximerar vi arean inom delintervallet med en rektangel med höjd $f(x_i)$.



Varje rektangel har arean

$$A_i = \text{basen} \cdot \text{höjden} = (x_{i+1} - x_i) \cdot f(x_i).$$

Den totala arean approximeras av den sammanlagda arean av alla rektanglar,

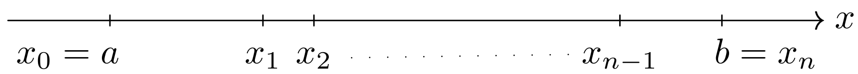
$$A \approx \sum_{i=0}^{n-1} A_i = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i).$$

Om vi låter vår indelning av intervallet $[a, b]$ bli finare, d.v.s. ökar n, så borde vi få en bättre approximation av den totala arean. I gränsfallet $n \to \infty$ borde vi ha likhet

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} A_i.$$

Partition

Låt $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ vara en punktföljd i intervallet $[a, b]$ sådan att $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.



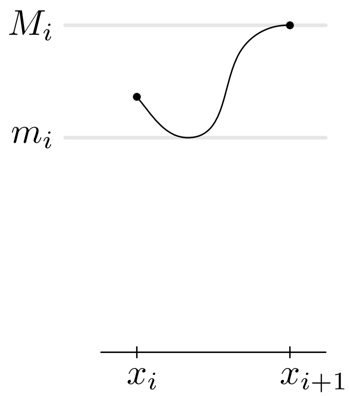
En sådan punktföljd kallas för en partition av intervallet $[a, b]$.

Finhet — En partitions finhet är det största avståndet mellan två närliggande punkter i partitionen, och betecknas

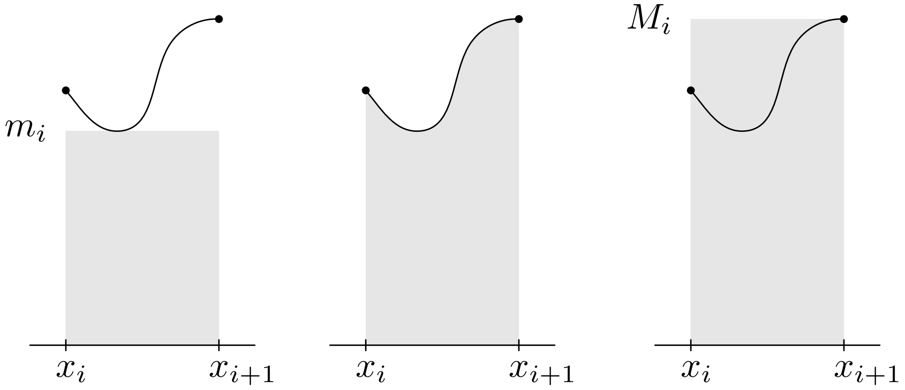
$$\|P\| = \max_{0<i\leq n-1} \{x_{i+1} - x_i\}$$

Integralens definition

I ett delintervall $[x_i, x_{i+1}]$, som ges av en partition P, antar den kontinuerliga funktionen f ett största värde M_i och ett minsta värde m_i.



Arean A_i under f:s graf i delintervallet uppfyller olikheten

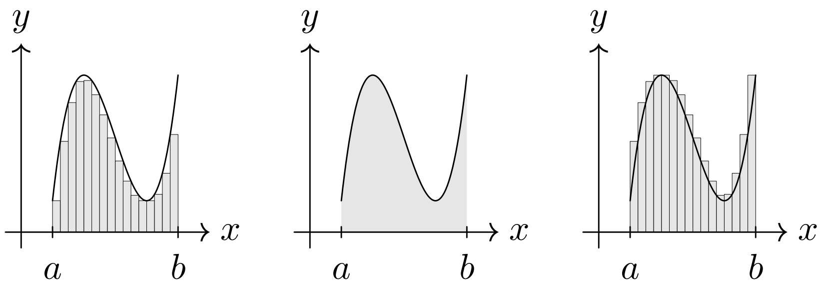


$$m_i(x_{i+1}-x_i) \quad \leq \quad A_i \quad \leq \quad M_i(x_{i+1}-x_i).$$

Denna olikhet gäller alla delintervall, och om vi summerar ihop areorna i vänsterledet respektive högerledet så får vi

$$\text{undersumma} = L(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i),$$

$$\text{översumma} \quad = U(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i).$$



$$L(f,P) \quad \leq \quad A \quad \leq \quad U(f,P)$$

Sats Om P och P' är två partitioner, då är

$$L(f,P) \leq U(f,P'),$$

d.v.s. en översumma är alltid större än en undersumma.

Definition

Antag att det finns exakt ett tal I, s.a.

$$L(f,P) \leq I \leq U(f,P) \quad \text{för alla partitioner } P.$$

Då säger vi att f är integrabel på intervallet $[a,b]$, och talet I kallas för den bestämda integralen av f över $[a,b]$ och betecknas

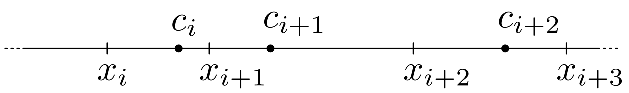
$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Sats Antag att f är en kontinuerlig funktion på intervallet $[a,b]$. Då gäller att

$$\lim_{\|P\|\to 0} L(f,P) = \lim_{\|P\|\to 0} U(f,P) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Riemannsumma

Om $P = \{x_i\}_{i=0}^{n-1}$ är en partition av intervallet $[a, b]$ och $c = \{c_i\}_{i=0}^{n-1}$ är en punktföljd s.a. varje delintervall i partitionen innehåller exakt ett c_i.



Då kallas

$$R(f, P, c) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

för en Riemannsumma till f.

Eftersom $m_i \leq f(c_i) \leq M_i$, så är alltid

$$L(f, P) \leq R(f, P, c) \leq U(f, P),$$

och

$$\lim_{\|P\| \to 0} R(f, P, c) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

(**Bevis:** Instängningsprincipen.)