l'Hôpitals regel 0/0

Om f och g är definierade i en punkterad omgivning av $x = a$, och

- f och g är deriverbara med $g' \neq 0$ i omgivningen av a,
- $f(x), g(x) \to 0$ då $x \to a$.

Då gäller att

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

om gränsvärdet i högerledet existerar eller är $\pm\infty$.

Anm. Regeln gäller även för $a = \pm\infty$ och ensidiga gränsvärden.

Obs! Gränsvärdet i högerledet är $\dfrac{f'}{g'}$ och *inte* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'$.

l'Hôpitals regel ∞/∞

Om f och g är definierade i en punkterad omgivning av $x = a$, och

- f och g är deriverbara med $g' \neq 0$ i omgivningen av a,
- $f(x), g(x) \to \pm\infty$ då $x \to a$.

Då gäller att

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

om gränsvärdet i högerledet existerar eller är $\pm\infty$.

Anm. Regeln gäller även för $a = \pm\infty$ och ensidiga gränsvärden.

Taylors formel

Taylorpolynomet $P_{n-1}(x)$ till den n ggr deriverbara funktionen f i punkten $x = a$, approximerar f med felet

$$f(x) = P_{n-1}(x) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt.$$

Uttrycket

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$$

kallas för Cauchys restterm.

Maclaurinutvecklingar

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2}) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + O(x^{n+1}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3}) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})
\end{aligned}$$